NOTATKI DO ĆWICZEŃ Z ALGEBRY METODĄ FIZYCZNĄ UPRAWIANEJ

Liczby zespolone

Kanoniczna postać liczby zespolonej: $z = x + iy$. Liczba $z = x$ zwie się liczbą (czysto) rzeczywistą, liczba $z = iy$ zwie się liczbą (czysto) urojoną. Oczywiście $i^2 = -1$. Części rzeczywista i urojona liczby zespolonej $z = x + iy$: $\mathrm{Re}z = x$, $\mathrm{Im}z = y$ (uwaga: część urojona liczby zespolonej z jest liczbą rzeczywistą!). Moduł $|z|$ liczby zespolonej $z = x+iy$: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Liczba zespolona sprzężona do danej liczby $z = x+iy$: $z^* \equiv \bar{z} = x-iy$. Zachodzą związki: $|z| = |z^*|$, $z^*z = z\,z^* = |z|^2 = |z^2| = x^2 + y^2$; $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$, $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$. Ponadto $z+z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z$ (liczba zawsze rzeczywista), $z-z^* = 2i\,\mathrm{Im}\,z$ (liczba zawsze urojona).

Przydatny wzór[1] na (dwa) pierwiastki kwadratowe z danej liczby $z = x + iy$:

$$z^{\frac{1}{2}} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej. Jeśli liczbę zespoloną $z = a+ib$ reprezentować punktem na płaszczyźnie o osiach $a = \mathrm{Re}z$, $b = \mathrm{Im}z$, to zamiast współrzędnymi (a, b) można tę samą liczbę identyfikować przez podanie jej współrzędnych biegunowych (r, φ)

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = |z|\,, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Re}z}\,,$$

przy czym kąt φ, zwany argumentem, $\mathrm{Arg}z$, liczby zespolonej, aby liczba z była reprezentowana "kanonicznie" (dlaczego? żeby się matematycy cieszyli... A poważniej, to jest kwestia umowy, ale umowa ta zacznie być istotna, gdy będziemy obliczać logarytmy liczb zespolonych) trzeba wybrać z przedziału $[0, 2\pi)$. Ponieważ wartość funkcji $\mathrm{arctg}(\cdot)$ leży z definicji (przyjętej arbitralnie i dla niektórych celów mogącej wymagać zmienienia) w przedziale $(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi)$, oznacza to, że czasem trzeba kąt φ uzyskany przez arctg "ręcznie" poprawić. Zachodzą (oczywiste) związki (niezależne od tego, czy kąt φ należy do "kanonicznego" przedziału, czy nie)

$$\mathrm{Re}z = a = r\cos\varphi\,, \qquad \mathrm{Im}z = b = r\sin\varphi\,,$$

co najlepiej zapisać w postaci

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{i\varphi} = |z|\,e^{i\mathrm{Arg}z}\,.$$

[1] Credit: Prof. Mikołaj Misiak. Wzór łatwo sprawdzić bezpośrednio podnosząc jego prawą stronę do kwadratu.

Ostatnia równość wynika z rozwinięcia w szereg Taylora

$$
\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^2}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, \varphi^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\,(-1)^n}{(2n+1)!}\, \varphi^{2n+1} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Wynikają z niej także ważne wzory

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)\,, \\
\sin\varphi &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)\,,
\end{aligned}
$$

które warto porównać z definicjami funkcji hiperbolicznych

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch}x &= \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\,, \\
\mathrm{sh}x &= \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Jest więc jasne, że

$$
\cos(ix) = \mathrm{ch}x\,, \qquad \sin(ix) = i\,\mathrm{sh}x\,.
$$

Oczywisty jest także tzw. wzór de Moivre'a

$$
(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\,.
$$

W szkole (w trzeciej klasie liceum, ale to było za komuny, a nie za PiSu, bo dla PiSowskich ministrów takie rzeczy są za trudne...) dowodziło się go za pomocą indukcji dla naturalnych n, ale widać, że wzór jest słuszny nawet, gdy n jest liczbą zespoloną.

Zauważmy, że dodawanie (i odejmowanie) dwóch liczb zespolonych $z_1 = a_1 + ib_1 = r_1\, e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = a_2 + ib_2 = r_2\, e^{i\varphi_2}$ jest łatwiejsze w postaci kartezjańskiej $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$, ale ich mnożenie i dzielenie jest łatwiejsze w postaci trygonometrycznej:

$$
z_1 z_2 = (r_1 r_2)\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\,, \qquad \frac{z_1}{z_2} = (r_1/r_2)\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\,.
$$

Problemik: Obliczyć sumę

$$
S_N = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin Nx = \sum_{n=1}^{N} \sin nx\,.
$$

Rozwiązanie: Wystarczy skorzystać z liniowości operacji brania części rzeczywistej i części urojonej liczby zespolonej, (tj. z tego, że $\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + \ldots) = \mathrm{Re} z_1 + \mathrm{Re} z_2 + \ldots$, $\mathrm{Im}(z_1 + z_2 + \ldots) = \mathrm{Im} z_1 + \mathrm{Im} z_2 + \ldots$) i napisać

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Im}\, e^{inx} = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{inx}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ix} \sum_{n=0}^{N-1} e^{inx}\right).$$

Teraz, ponieważ występuje tu suma będąca szeregiem (ale skończonym, więc problem zbieżności tu nie ingeruje) geometrycznym o $''q'' = e^{ix}$, możemy wykorzystać znany wzór[2]

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = 1 + q + \ldots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q} = \frac{q^N - 1}{q - 1}.$$

Prowadzi on do

$$S_N = \mathrm{Im}\left(e^{ix} \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1}\right).$$

Teraz wystarczy tylko obliczyć część urojoną, ale żeby się nie zakałapućkać, trzeba to zrobić sprytnie:

$$S_N = \mathrm{Im}\left(e^{ix} \frac{e^{iNx/2}}{e^{ix/2}} \frac{e^{iNx/2} - e^{-iNx/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i(N+1)x/2} \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right).$$

Iloraz sinusów jest czysto rzeczywisty, a ponieważ jeśli a jest liczbą rzeczywistą, $\mathrm{Im}(az) = a\, \mathrm{Im} z$, więc

$$S_N = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \mathrm{Im}\big(e^{i(N+1)x/2}\big) = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \sin((N+1)x/2).$$

Nietrudno też zobaczyć (biorąc część rzeczywistą zamiast urojonej), że

$$C_N = \sum_{n=1}^{N} \cos nx = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos Nx = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \cos((N+1)x/2).$$

Jeśli $x = 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to w mianownikach uzyskanych wzorów robi się zero. Ale nietrudno ustalić biorąc granice $x \to 0$ (granice $x \to 2\pi k$ muszą dać to samo, bo funkcje są okresowe) uzyskanych wzorów, że suma S_N sinusów da wtedy zero, a suma C_N kosinusów N, tak jak powinno być.

Pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej z. Jeśli $w = z^{1/n}$, to znaczy, że szukamy wszystkich takich liczb w_k, że $w_k^n = z$. Liczb takich jest dokładnie n, czyli są to $w_0, \ldots, w_{n-1}$. Aby to zobaczyć piszemy

$$w = |w|(\cos\theta + i \sin\theta) = |w|\, e^{i\theta},$$
$$z = |z|\,(\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z|\, e^{i\varphi},$$

[2]Stopień wielomianu $(1-q)(1+q+\ldots+q^{N-1})$ jest równy N, więc w liczniku po prawej stronie musi być q^N.

i wtedy równość $z = w^n$ oznacza, że $|z| = |w|^n$ oraz, że $e^{i\varphi} = e^{in\theta}$. Pierwszy warunek daje $|w| = |z|^{1/n}$, przy czym tu $|z|^{1/n}$ oznacza zwykły, rzeczywisty i dodatni pierwiastek n-tego stopnia z rzeczywistej i dodatniej liczby $|z|$; druga równość wymaga czujności: jeśli zamiast φ napiszemy $\varphi+2\pi k$ z dowolnym $k \in \mathbb{Z}$, to dalej $|z|e^{i(\varphi+2\pi k)} = z$, ale w zależności od wartości k dostaniemy różne kąty θ_k:

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{1}{n}\,\varphi + 2\pi\,\frac{k}{n}\,.$$

k może być niby dowolną liczbą całkowitą, ale tylko n różnych k da różne liczby w_k: jako te różne przyjęło się brać

$$w_0 = |z|^{1/n}e^{i\theta_0}\,, \qquad w_1 = |z|^{1/n}e^{i\theta_1}\,, \qquad \dots \qquad w_{n-1} = |z|^{1/n}e^{i\theta_{n-1}}\,.$$

Kąt θ_n liczby w_n można bowiem zapisać jako

$$\theta_n = \frac{1}{n}\,\varphi + 2\pi\,\frac{n}{n} = \frac{1}{n}\,\varphi + 2\pi\,,$$

czyli różni się on od kąta θ_0 o 2π i tym samym $w_n = w_0$. Podobnie $w_{n+1} = w_1$, $w_{-1} = w_{n-1}$ etc. Rzeczywiście więc różnych pierwiastków n-tego stopnia z liczby zespolonej z jest tylko (i aż) n. Na płaszczyźnie o osiach Rez, Imz wszystkie one leżą na okręgu o promieniu $|z|^{1/n}$ i dzielą ten okrąg na n równych części. Wystarczy więc znaleźć położenie jednego z nich, by można było wyznaczyć (na rysunku) położenia pozostałych $n-1$. Wynika z tego, że położenia zespolonych pierwiastów n-tego stopnia z $z = 1$ szczególnie łatwo znaleźć: jednym z nich jest bowiem zawsze $w_0 = 1$ i pozostałe leżą na okręgu jednostkowym co $2\pi/n$ (jeśli $n = 2l$ jest liczbą parzystą, pierwiastkiem jest też $w_l = -1$; oczywiście, jeśli n jest liczbą nieparzystą, -1 pierwiastkiem nie jest). Nieco trudniej jest wyznaczyć położenia pierwiastów n-tego stopnia z $z = -1$, ale jeśli $n = 2l+1$ jest liczbą nieparzystą, to $w_l = -1$ i mając ten pierwiastek już łatwo wskazać położenia pozostałych na jednostkowym okręgu.

Problemik: Znaleźć wszystkie różne pierwiastki trzeciego stopnia z $z = 1 + i$.
Rozwiązanie: $|z| = \sqrt{2}$, więc

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\,.$$

Zatem $\theta_k = \pi/12 + 2\pi(k/3)$, czyli

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),\\
w_1 &= 2^{1/6}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right) = 2^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{1/6}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right),\\
w_2 &= 2^{1/6}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

Problemik: Znaleźć wszystkie liczby z spełniające równość

$$z^6 = (z^* + 1)^6\,.$$

Rozwiązanie: Niewątpliwie $z = 0$ nie jest rozwiązaniem. Można więc bezpiecznie podzielić obie strony przez z, co da równość

$$1 = \left(\frac{z^* + 1}{z}\right)^6, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{z^* + 1}{z} = (1)^{1/6}.$$

Najpierw trzeba więc znaleźć wszystkie pierwiastki szóstego stopnia z jedynki. Są nimi $w_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k$ z $\theta_k = 2\pi(k/6)$, $k = 0, 1, \ldots, 5$. Ponieważ $w_0 = 1$, $w_3 = -1$, a wszystkie te pierwiastki powinny być równo rozłożone na jednostkowym okręgu, co $\pi/3$, więc łatwo zobaczyć, że

$$w_{1,5} = \frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad w_{2,4} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Teraz tylko należy rozwiązać równania $z^* + 1 = w_k z$. Jeśli weźmiemy $w_0 = 1$, to daje to $z^* + 1 = z$, czyli

$$z^* - z = -1,$$

Ponieważ $z^* - z$ jest (zawsze) liczbą urojoną, a prawa stona, -1, jest liczbą czysto rzeczywistą, równanie to nie ma rozwiązań. Z kolei, gdy weźmiemy $w_3 = -1$, to daje to $z^* + 1 = -z$, czyli

$$z^* + z \equiv 2\mathrm{Re}z = -1.$$

Zatem $\mathrm{Re}z = -\frac{1}{2}$, a część urojona z może być zupełnie dowolna. Dostajemy więc jako rozwiązania zbiór liczb postaci $z = -\frac{1}{2} + it$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Trzeba jeszcze sprawdzić, co dają pierwiastki $w_{1,5}$ i $w_{2,4}$. Zbadajmy $w_{1,5}$:

$$z^* + 1 = \frac{1}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right) z,$$

co, po podstawieniu $z = x + iy$ jest równoważne układowi dwóch równań na x i y:

$$\begin{aligned} 1 + x &= \frac{1}{2}x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\,y, \\ -y &= \frac{1}{2}y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,x, \end{aligned}$$

lub, po uporządkowaniu,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2}x &= \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\,y, \\ -\frac{3}{2}y &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,x, \end{aligned}$$

Teraz wystarczy drugie pomnożyć przez $\pm 1/\sqrt{3}$ by zobaczyć, że układ równań jest sprzeczny, czyli nie posiada rozwiązań. W analogiczny sposób można sprawdzić, że pierwiastki $w_{2,4}$

również prowadzą do sprzecznego układu równań. Zatem jedynymi rozwiązaniami jest rodzina liczb $z = -\frac{1}{2} + it$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Problemik: Znaleźć iloczyn $\varepsilon_0\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1}$ wszystkich różnych pierwiastków ε_k n-tego stopnia z $z = 1$.
Rozwiązanie: Pierwiastkami n-tego stopnia z $z = 1$ są $\varepsilon_k = e^{i2\pi k/n}$, wobec czego

$$\varepsilon_0\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1} = e^{i2\pi\cdot 0/n} e^{i2\pi\cdot 1/n} \cdots e^{i2\pi\cdot(n-1)/n} = \exp\left(i\, \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \right).$$

Indukcyjnie łatwo udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}\, n(n-1)\,.$$

Zatem

$$\varepsilon_0\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1} = e^{i\pi(n-1)} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}\,.$$

Problemik: Znaleźć wszystkie rozwiązania równania[3]

$$\left(\frac{1 - z^*}{1 + z} \right)^{2023} = 1\,.$$

Rozwiązanie: Oczywiście

$$\frac{1 - z^*}{1 + z} = \varepsilon_k\,,$$

gdzie ε_k o $k = 0, \ldots, 2022$ są pierwiastkami 2023 stopnia z jedynki. Ale trudno rozwiązać aż 2023 równań $1 - z^* = \varepsilon_k(1 + z)$... Jedno z nich jest jednak proste: $\varepsilon_0 = 1$ i to daje $1 - z^* = 1 + z$, czyli $z + z^* = 0$. Rozwiązaniami są więc liczby $z = it$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Pozostałe 2022 pierwiastków, jako że rok mamy nieparzysty, mają na 100% niezerową część urojoną. Zapiszmy je więc w postaci $\varepsilon_k = \cos\theta_k + i \sin\theta_k$, przy czym $\theta_k \neq n\pi$. Każde więc z pozostałych do sprawdzenia 2022 równań ma postać

$$1 - z^* = (\cos\theta_k + i\sin\theta_k)(1 + z)\,,$$

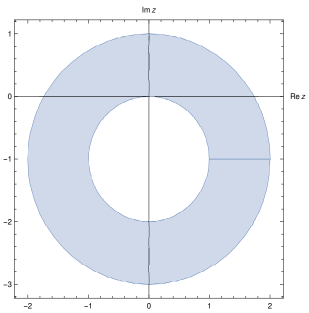
co po podstawieniu $z = x + iy$ jest równoważne układowi dwóch równań

$$\begin{aligned} 1 - x &= (1 + x)\cos\theta_k - y\sin\theta_k\,, \\ y &= (1 + x)\sin\theta_k + y\cos\theta_k\,. \end{aligned}$$

Czy układ ten może mieć rozwiązania? Z drugiego mamy

$$y = (1 + x)\, \frac{\sin\theta_k}{1 - \cos\theta_k}\,,$$

[3] 2023, bo taki mamy właśnie rok.



Rysunek 1: Zbiór liczb z spełniających warunek $1 \leq |z+i| \leq 2$. Pozioma kreska na pierścieniu jest artefaktem Mathematiki - skanuje ona kąty od 0 do 2π i stąd ślad.

(mianownik prawej strony się nie może zerować, bo rozpatrujemy tu tylko pierwiastki z jedności różne od $\varepsilon_0 = 1$) i to do pierwszego:

$$1 - x = (1+x)\cos\theta_k - (1+x)\,\frac{\sin^2\theta_k}{1-\cos\theta_k}$$
$$= (1+x)\,\frac{\cos\theta_k(1-\cos\theta_k) - \sin^2\theta_k}{1-\cos\theta_k} = -(1+x)\,.$$

Stąd więc $1 = -1$, czyli sprzeczność.[4] Innych rozwiązań niż to, które daje ε_0, wyjściowy układ juz nie ma. W latach parzystych odpowiedź też jest taka sama (dlaczego? - proszę samemu sprawdzić).

Problemik: Na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ (tzn. na płaszczyźnie o osiach (Rez, Imz)) wyznaczyć zbiór punktów reprezentujących zespolone liczby z spełniające warunek $1 \leq |z+i| \leq 2$.
Rozwiązanie: Gdy napiszemy $x = \text{Re}z$, $y = \text{Im}z$, to $|z+i| = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$. Zatem liczby tworzące szukany zbiór spełniają warunek

$$1 \leq x^2 + (y+1)^2 \leq 4$$

Jest więc to pierścień (zob. rysunek 1) zawarty pomiędzy dwoma współśrodkowymi okręgami (same te okręgi też należą do zbioru) o środkach w punkcie $z_0 = -i \equiv (0,-1)$ i promieniach $r_1 = 1$ i $r_2 = 2$.

Problemik: Na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ wyznaczyć zbiór punktów reprezentujących zespolone liczby w mające postać $w = (1+it)/(1-it)$, gdzie parametr t przebiega wszystkie liczby rzeczywiste.
Rozwiązanie: Można to zadanie rozwiązać bezpośrednio, tj. pisząc

$$w = \frac{1+it}{1-it} = \frac{(1+it)^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2+2it}{1+t^2} \equiv x + iy\,.$$

[4] Przeprowadzone rozumowanie nie stosuje się do $\theta_0 = 0$ z tego powodu, że wtedy przy wyznaczaniu y dzieliłoby się przez zero (inaczej: drugie równanie nie wyznacza wtedy y bo ma postać $0 = 0$).

Wzory

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

powinny nam teraz nasunąć skojarzenie z podstawieniem $t = \mathrm{tg}(\theta/2)$ wykorzystywanym przy całkowaniu funkcji wymiernych z funkcji trygonometrycznych: nawodzi to na myśl (zamiast "sugeruje", jak teraz by każdy napisał...), by napisać $t = \mathrm{tg}(\theta/2)$, co da

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\theta\,, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2} = \sin\theta\,.$$

Ponieważ, gdy t przebiega całą oś rzeczywistą, $\theta/2$ przebiega zakres $(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi)$, czyli θ przebiega zakres $(-\pi,\ \pi)$ a, ponadto, $x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, staje się jasne, że szukanym zbiorem jest okrąg o środku w $w_0 = 0 \equiv (0,0)$ i jednostkowym promieniu.

Inny sposób rozwiązania tego zadania polega na zauważeniu, że odwzorowanie

$$w = f(z) = \frac{1+iz}{1-iz}\,,$$

jest homografią, a szukany zbiór jest obrazem osi rzeczywistej przy takim właśnie odwzorowaniu. Zgodnie z metodą pokazaną w filmiku dołączonym do wykładu prof. K. Grabowskiej, odwracamy odwzorowanie f pisząc

$$z = -i\,\frac{w-1}{w+1}\,,$$

i następnie, podstawiając $w = x + iy$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} z = -i\,\frac{x-1+iy}{x+1+iy} &= -i\,\frac{[x-1+iy][x+1-iy]}{(1+x)^2+y^2} \\ &= -i\,\frac{x^2-1+y^2+2iy}{(1+x)^2+y^2} = \frac{2y - i(x^2-1+y^2)}{(1+x)^2+y^2}\,. \end{aligned}$$

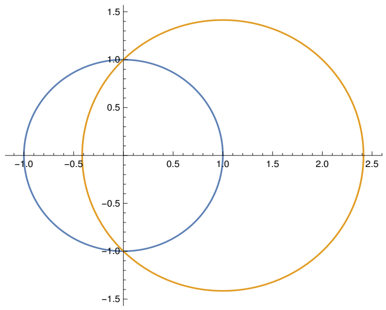
Narzucamy teraz warunek $z = t$, czyli po prostu $\mathrm{Im}z = 0$, co jest równoważne warunkowi $x^2 - 1 + y^2 = 0$.

Problemik: Na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ wyznaczyć zbiór punktów reprezentujących zespolone liczby z spełniające warunek

$$0 < \mathrm{Arg}\frac{z+i}{z-i} < \frac{\pi}{4}\,.$$

Rozwiązanie: Bardziej uczenie, chodzi o przeciwobraz klina $0 < \mathrm{Arg}w < \frac{\pi}{4}$ przy homografii $w = f(z) = (z+i)/(z-i)$. Jeśli napiszemy

$$w = \frac{(z+i)(z^*+i)}{(z-i)(z^*+i)} = \frac{(z+i)(z^*+i)}{|z|^2 + 1 + i(z-z^*)}\,,$$



Rysunek 2: Okręgi $x^2 + y^2 = 1$ i $(x-1)^2 + y^2 = 2$.

to mianownik, jako wielkość czysto rzeczywista i dodatnia (bo to kwadrat modułu liczby $z - i\,!$), nie będzie miał wpływu na argument (czyli fazę) liczby w:

$$\mathrm{Arg}w = \mathrm{Arg}[(z+i)(z^*+i)] = \mathrm{Arg}\big(|z|^2 - 1 + 2i\mathrm{Re}z\big)\,.$$

Warunek $0 < \mathrm{Arg}w < \frac{\pi}{4}$ sprowadza się teraz do tego, by

$$0 < \mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\mathrm{Re}z}{|z|^2 - 1}\right) < \frac{\pi}{4}\,, \qquad \mathrm{i} \qquad 2\,\mathrm{Re}z > 0\,.$$

(Drugi warunek ogranicza w do pierwszej ćwiartki, bo jak pamiętamy liczby w z trzeciej ćwiartki, o fazie między π i $\frac{3}{2}\pi$, mają stosunek $\mathrm{Im}w/\mathrm{Re}w$ też dodatni, tak jak liczby z pierwszej ćwiartki, a trzeba je wykluczyć). Zatem, pisząc $z = x + iy$, mamy następujące warunki: $x > 0$, $x^2 + y^2 - 1 > 0$ (z warunków $2\mathrm{Re}z > 0$ i $2\mathrm{Re}z/(|z|^2 - 1) > 0$) oraz $2x < x^2 + y^2 - 1$ (z warunku $2\mathrm{Re}z/(|z|^2 - 1) < 1$). Innymi słowy, oprócz warunku $x > 0$, który ogranicza zbiór szukanych liczb do prawej półpłaszczyzny, mamy

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 > 1\,,\\ &(x-1)^2 + y^2 > 2\,. \end{aligned}$$

Pierwszy warunek jest jednak słabszy niż drugi, bo jak się można zorientować, na półpłaszczyźnie $x > 0$ okrąg $x^2 + y^2 = 1$ leży całkowicie wewnątrz okręgu $(x-1)^2 + y^2 = 2$: okręgi te mają tylko dwa punkty wspólne $z = \pm i$ na granicy dozwolonego obszaru $x > 0$ - zob. rysunek 2). Zatem szukane liczby z są reprezentowane przez punkty leżące w półpłaszczyźnie $x > 0$ na zewnątrz okręgu $(x-1)^2 + y^2 = 2$.

Problemik: Udowodnić, że

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1\right).$$

Rozwiązanie: Lewa strona wzoru jest wielomianem stopnia $2n+1$ zmiennej x i prawa stona też jest takimże wielomianem. Punkt dla nas. $x = 1$ jest pierwiastkiem wielomianu po lewej stronie i pierwiastkiem wielomianu po prawej też. Drugi punkt dla nas. Dalej:

każdy wielomian $W_{2n+1}(x)$ stopnia $2n+1$ ma, w dziedzinie zespolonej $2n+1$ pierwiastków z_k, $k=0,1,\ldots,2n$, takich, że $W_{2n+1}(z_k)=0$ i można go przedstawić w postaci

$$W_{2n+1}(x) = A(x-z_0)(x-z_1)\cdots(x-x_{2n}),$$

w której A jest współczynnikiem przy najwyższej potędze zmiennej x w wyjściowej postaci wielomianu $W_{2n+1}(x)$. W przypadku wielomianu po lewej stronie dowodzonego wzoru $A=1$, a pierwiastkami są oczywiście wszystkie (zespolone) pierwiastki $2n+1$ stopnia z jedności, czyli $z_k = e^{i\frac{2\pi}{2n+1}k}$, przy czym $z_0=1$. Zatem

$$\begin{aligned} x^{2n+1}-1 &= (x-1)\prod_{k=1}^{2n}\left(x-e^{i\frac{2\pi}{2n+1}k}\right) \\ &= (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left[\left(x-e^{i\frac{2\pi}{2n+1}k}\right)\left(x-e^{i\frac{2\pi}{2n+1}(2n+1-k)}\right)\right]. \end{aligned}$$

W drugiej linii czynniki iloczynu zostały trochę inaczej pogrupowane i teraz w każdym nawiasie kwadratowym pierwiastki $e^{i\frac{2\pi}{2n+1}k}$ i $e^{i\frac{2\pi}{2n+1}(2n+1-k)} = e^{-i\frac{2\pi}{2n+1}k}$ leżą naprzeciw siebie, nad i pod osią rzeczywistą. Wymnażając zatem dwa wyrażenia w każdym z kwadratowych nawiasów otrzymujemy

$$\left(x-e^{i\frac{2\pi}{2n+1}k}\right)\left(x-e^{-i\frac{2\pi}{2n+1}k}\right) = x^2+1-x\left(e^{i\frac{2\pi}{2n+1}k}+e^{-i\frac{2\pi}{2n+1}k}\right) = x^2+1-2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1}.$$

To kończy dowód.

Problemik: Dla jakiej wartości rzeczywistego parametru a wielomian piątego stopnia

$$W_5(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1,$$

ma pierwiastek $x=-1$ o krotności większej niż jeden ?
Rozwiązanie: $x=-1$ jest oczywiście pierwiastkiem $W_5(x)$ niezależnie od wartości a. Problem jednak w tym, kiedy $x=-1$ jest pierwiastkiem wielokrotnym. Ponieważ $x=-1$ jest pierwiastkiem $W_5(x)$, możemy napisać:

$$W_5(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1 = (x+1)\cdot W_4(x).$$

Aby znaleźć $W_4(x)$ dzielimy wielomian $W_5(x)$ przez $x+1$. Nie umiem tego w latexie napisać - pokazałem na tablicy. Dostajemy

$$W_4(x) = x^4 - x^3 + x^2 - (a+1)x + 1.$$

No i teraz żądamy, by $W_4(-1)=0$. Ponieważ $W_4(-1) = 4 + (a+1)$ więc a musi być równe -5. Przy tej wartości a $x=-1$ jest conajmniej pierwiastkiem dwukrotnym. A może jest więcejkrotnym? Żeby to sprawdzić, dzielimy $W_4(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 4x + 1$ (z położonym już $a=-5$) przez $x+1$ i znajdujemy, że

$$W_4(x) = (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)(x+1) = (x+1)\,W_3(x).$$

Ponieważ $W_3(-1) = -1-2-3+1 = -5 \neq 0$, $x = -1$ jest tylko dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W_5(x)$.

Oczywiście ten sam problem można rozwiązać korzystając z tego, że jeśli x_0 jest pierwiastkiem r-krotnym równania $W_n(x) = 0$ ($n \geq r$, oczywiście), to nie tylko $W_n(x_0) = 0$, ale także $W_n'(x_0) = 0$, $W_n''(x_0) = 0, \dots, W_n^{(r-1)}(x_0) = 0$, tzn. w x_0 zerują się wszystkie pochodne $W_n(x)$ aż do $r-1$ włącznie. Żeby nie komplikować, niech $r = 2$, czyli x_0 jest pierwiastkiem podwójnym. Wtedy $W_n(x)$ da się przedstawić w postaci $W_n(x) = (x-x_0)^2 W_{n-2}(x)$ i

$$W_n'(x) = 2(x-x_0)\,W_{n-2}(x) + (x-x_0)^2 W_{n-2}'(x)\,,$$

skąd już widać, że $W_n'(x_0) = 0$. Jak się to Obliczy $W_5'(x)$, to zażądanie, by $W_5'(x_0) = 0$ da od razu $a = -5$.

Równania trzeciego stopnia. Przepis kuchenny. Równanie takie mające postać ogólną $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ (stałe a_2, a_1 i a_0 mogą być zespolone; pierwiastków szukamy też w dziedzinie zespolonej) sprowadzamy do postaci

$$w^3 + p\,w + q = 0\,,$$

podstawieniem $x = w - \frac{1}{3}a_2$. Przy tym $p = a_1 - \frac{1}{3}a_2^2$, $q = a_0 - \frac{1}{3}a_1 a_2 + \frac{2}{27}a_2^3$. Jeśli akurat $p = 0$, to już mamy rozwiązanie: $w = (-q)^{1/3}$ - są to trzy (zespolone) pierwiastki trzeciego stopnia z q. jeśli $p \neq 0$, to kolejne podstawienie $w = y - p/3y$ sprowadza wypisane wyżej równanie do równania trój-kwadratowego

$$(y^3)^2 + q\,y^3 - \frac{p^3}{27} = 0\,.$$

Znajdujemy zatem dwa zespolone pierwiastki ζ i ζ' równania $\zeta^2 + q\zeta - p^3/27 = 0$. Jeśli nie są one akurat takie same (jeden pierwiastek podwójny) to mamy, wyciągając z każdego z nich trzy pierwiastki trzeciego stopnia, jakby sześć rozwiązań: y_1, y_2 i y_3 oraz y_1', y_2' i y_3'. Naprawdę są jednak tylko trzy różne pierwiastki równania $w^3 + pw + q = 0$ (tego, o które nam tu chodzi). Niech bowiem $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon^2 = \varepsilon^*$ będą trzema pierwiastkami trzeciego stopnia z 1. Mamy wtedy[5]

$$\begin{array}{lll} y_1\,, & y_2 = \varepsilon\, y_1\,, & y_3 = \varepsilon^2\, y_1 \\ y_1'\,, & y_2' = \varepsilon\, y_1'\,, & y_3' = \varepsilon^2\, y_1'\,. \end{array}$$

[5]To, czy ktoś to widzi od razu jest sprawdzianem tego, czy przyswoił już sobie w należytym stopniu pierwiastkowanie liczb zespolonych... Ale żeby nie było: jeśli $\zeta = re^{i\varphi}$, to $y_k = r^{1/3}e^{i(\varphi+2\pi k)/3}$ (y_0, y_1 i y_2 to pierwiastki trzeciego stopnia z ζ), czyli

$$\left(e^{i2\pi k/3}\right) r^{1/3} e^{i\varphi/3} \equiv \varepsilon_k\, y_1\,,$$

bo pierwszy pierwiastek trzeciego stopnia z ζ nazwaliśmy y_1, a nie y_0. Poza tym, trzy pierwiastki trzeciego stopnia z -1 można zapisać jako -1, $-\varepsilon$ i $-\varepsilon^2$.

Oczywiści mamy stąd jakby sześć rozwiązań równania $w^3 + p\,w + q = 0$:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= y_1 - \frac{p}{3y_1}\,, \qquad & w_2 &= y_2 - \frac{p}{3y_2}\,, \qquad & w_3 &= y_3 - \frac{p}{3y_3}\,,\\
w'_1 &= y'_1 - \frac{p}{3y'_1}\,, \qquad & w'_2 &= y'_2 - \frac{p}{3y'_2}\,, \qquad & w'_3 &= y'_3 - \frac{p}{3y'_3}\,.
\end{aligned}
$$

Ze wzoru Viete'a wiemy jednak, że $\zeta'\zeta = -p^3/27$, czyli $(y_i\,y'_i)^3 = -p^3/27$, $i = 1, 2, 3$. Można więc wybrać y_1 i y'_i tak, by $y_1\,y'_1 = -p/3$ (bo $-p/3$ jest jednym z pierwiastków trzeciego stopnia prawej strony). Mamy wtedy

$$
\begin{aligned}
y'_1 &= (\zeta')^{1/3} = -\frac{p}{3y_1}\,,\\
y'_2 &= \varepsilon\,y'_1 = -\varepsilon\,\frac{p}{3y_1} = -\frac{p}{3\varepsilon^2 y_1} \equiv -\frac{p}{3y_3}\,,\\
y'_3 &= \varepsilon^2 y'_1 = -\varepsilon^2\frac{p}{3y_1} = -\frac{p}{3\varepsilon y_1} \equiv -\frac{p}{3y_2}\,.
\end{aligned}
$$

Kiedy więc tworzymy rozwiązania w'_1, w'_2, w'_3, równania $w^3 + p\,w + q = 0$, to otrzymujemy,

$$
\begin{aligned}
w'_1 &= y'_1 - \frac{p}{3y'_1} = -\frac{p}{3y_1} - \frac{p}{3(-p/3y_1)} = w_1\,,\\
w'_2 &= y'_2 - \frac{p}{3y'_2} = -\frac{p}{3y_3} - \frac{p}{3(-p/3y_3)} = w_3\,,\\
w'_3 &= y'_3 - \frac{p}{3y'_3} = -\frac{p}{3y_2} - \frac{p}{3(-p/3y_2)} = w_2\,,
\end{aligned}
$$

Są zatem tylko trzy różne rozwiązania równania $w^3 + p\,w + q = 0$, które zwykle zapisuje się w postaci (sa to właśnie wzory Tartagli, które temuż podwędził Cardano)

$$
w_1 = y_1 + y'_1\,, \qquad w_2 = \varepsilon\,y_1 + \varepsilon^2 y'_1\,, \qquad w_3 = \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon\,y'_1\,,
$$

przy czym y_1 i y'_1 są tak wybrane (jako pierwiastki trzeciego stopnia z liczb ζ i ζ', które są dwoma rozwiązaniami równania $\zeta^2 + q\zeta - p^3/27 = 0$), że $y'_1 y_1 = -p/3$.

Jeśli współczynniki a_2, a_1 i a_0 wyjściowego równania są rzeczywiste, czyli rzeczywiste są także p i q, to wzory w postaci Cardano prowadzą natychmiast do wniosku, że gdy $\Delta = q^2 + 4p^3/27 = 0$, czyli gdy $\zeta = \zeta'$ i rozwiązanie ζ jest rzeczywiste, wyjściowe równanie ma jeden pierwiastek podwójny i jeden pojedyńczy (wszystkie, oczywiście, rzeczywiste). No bo rzeczywiście: wtedy $y'_1 = y_1$ (liczba rzeczywista) i $w_1 = 2y_1$, $w_2 = \varepsilon y_1 + \varepsilon^* y'_1 = y_1(\varepsilon + \varepsilon^*) = w_3$. (Oczywiście to samo wynika z napisania $w_i = y_i - p/3y_i$, $i = 1, 2, 3$, gdzie teraz y_1 jest liczbą rzeczywistą, $y_2 = \varepsilon y_1$ i $y_3 = \varepsilon^* y_1$ oraz wzoru Viete'a $y_1 = -p/3y_1$.) Jest też jasne, że jeśli wyjściowe równanie ma pierwiastek potrójny (nawet zespolony), to $\zeta = \zeta' = 0$ i stąd $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

Z kolei, gdy $\Delta < 0$, to $\zeta' = \zeta^* = r\,e^{-i\varphi/3}$ i $y'_1 = y^*_1$, więc $w_1 = y_1 + y'_1$ jest liczbą rzeczywistą, ale także $w_2 = y_1\varepsilon + y^*_1\varepsilon^*$ i $w_3 = \varepsilon^* y_1 + \varepsilon y^*_1$ są, jak widać, rzeczywiste. Zatem, gdy $\Delta < 0$ wyjściowe równanie ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Gdy zaś $\Delta > 0$, pierwiastki y_1 i y_1' są rzeczywiste i różne i prowadzą do rzeczywistego $w_1 = y_1 + y_1'$ i wzajemnie sprzężonych w_2 i w_3: $w_3 = \varepsilon^* y_1 + \varepsilon y_1' = w_2^* = (\varepsilon y_1 + \varepsilon^* y_1')^*$.

Problemik: Znaleźć pierwiastki równania

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0\,.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy $x = w + 1$ co daje równanie $w^3 + 3w + 2 = 0$, czyli $p = 3$, $q = 2$. Rozwiązujemy równanie kwadratowe $\zeta^2 + 2\zeta - 1 = (\zeta + 1)^2 - 2 = 0$. Znajdujemy $\zeta = -1 - \sqrt{2}$, $\zeta' = -1 + \sqrt{2}$. Mamy zatem

$$y_1 = -(1 + \sqrt{2}\,)^{1/3}\,, \qquad y_1' = (-1 + \sqrt{2}\,)^{1/3}\,,$$

tak wybrane, by spełniały warunek $y_1 y_1' = -p/3 = -1$. Możemy więc napisać rozwiązania wyjściowego równania

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - (1 + \sqrt{2}\,)^{1/3} + (-1 + \sqrt{2}\,)^{1/3}\,, \\ x_2 &= 1 - \varepsilon\,(1 + \sqrt{2}\,)^{1/3} + \varepsilon^2(-1 + \sqrt{2}\,)^{1/3}\,, \\ x_3 &= 1 - \varepsilon^2(1 + \sqrt{2}\,)^{1/3} + \varepsilon\,(-1 + \sqrt{2}\,)^{1/3}\,. \end{aligned}$$

Problemik: Znaleźć pierwiastki równania

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 2 = 0\,.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy $x = w - 2$ co daje równanie $w^3 - 6w + 2 = 0$, czyli $p = -6$, $q = 2$. Rozwiązujemy równanie kwadratowe $\zeta^2 + 2\zeta + 8 = (\zeta + 1)^2 + 7 = 0$. Znajdujemy $\zeta = -1 - i\sqrt{7}$, $\zeta' = -1 + i\sqrt{7}$. Mamy zatem $\zeta = 2\sqrt{2}\,e^{i\varphi}$, $\zeta' = 2\sqrt{2}\,e^{i\varphi'}$, gdzie $\varphi = \pi + \text{arctg}\sqrt{7}$, $\varphi' = \pi - \text{arctg}\sqrt{7}$, (żeby kąt φ był w trzeciej ćwiartce, a φ' w drugiej); zatem $\varphi' = -\varphi$ (modulo 2π, tj. $\varphi' = -\varphi + 2\pi$) i stąd[6] $y_1 = \sqrt{2}\,e^{i\varphi/3}$, $y_1' = \sqrt{2}\,e^{-i\varphi/3}$ i oczywiście, tak jak trzeba, $y_1\,y_1' = 2 = -p/3$. Z podanych wzorów mamy więc

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 - 2 = -2 + y_1 + y_1' = -2 + 2\sqrt{2}\cos(\varphi/3)\,, \\ x_2 &= w_2 - 2 = -2 + \varepsilon\,y_1 + \varepsilon^2 y_1' = -2 + \sqrt{2}\left(e^{i(\varphi+2\pi)/3} + e^{i(-\varphi+4\pi)/3}\right) \\ &\qquad = -2 + \sqrt{2}\left(e^{i(\varphi+2\pi)/3} + e^{i(-\varphi-2\pi+6\pi)/3}\right) = -2 + 2\sqrt{2}\cos((\varphi + 2\pi)/3)\,, \\ x_3 &= w_3 - 2 = -2 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon\,y_1' = -2 + \sqrt{2}\left(e^{i(\varphi+4\pi)/3} + e^{i(-\varphi+2\pi)/3}\right) \\ &\qquad = -2 + \sqrt{2}\left(e^{i(\varphi+4\pi)/3} + e^{i(-\varphi+4\pi-6\pi)/3}\right) = -2 + 2\sqrt{2}\cos((\varphi + 4\pi)/3)\,. \end{aligned}$$

[6] Bo pierwiastki trzeciego stopnia z $\zeta' = 2\sqrt{2}\,e^{i\varphi'}$ to

$$\sqrt{2}\,e^{i(\varphi'+2\pi k')/3} = \sqrt{2}\,e^{i(-\varphi+2\pi+2\pi k')/3}\,,$$

i teraz widać, że $k' = -1$ (albo $k' = 2$) da y_1^* jako jeden z pierwiastków trzeciego stopnia z ζ'.

Przestrzenie wektorowe

Zadanie 0
Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 2x+3y+\ \ z&=\ \ 2\,,\\ 3x+2y-\ \ z&=\ \ 3\,,\\ x+2y+2z&=-1\,. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: W zadaniu tym nie tyle chodzi o wynik, co o praktyczną metodę rozwiązywania układów równań liniowych, ponieważ wiele z dalszych zadań wymaga sprawnego radzenia sobie z takimi problemami (w zadaniach tych istotne jest co innego, a rozwiązywanie równań jest tylko środkiem do celu; chodzi więc o to, by nam "piłka nie przeszkadzała w grze"). Systematyczny algorytm rozwiązywania takich równań, zwany *eliminacją Gaussa*, polega na dodaniu takiej wielokrotności pierwszego równania do następnych, by wyeliminować z każdego z nich zmienną x (jeśli akurat zmienna x nie występuje w pierwszym równaniu, to eliminujemy z pozostałych y itd.):

$$\begin{aligned} 2x+3y+\ \ z&=\ \ 2\,,\\ y+\ \ z&=\ \ 0\,,\\ y+3z&=-4\,. \end{aligned}$$

Równania drugie i trzecie są więc teraz układem dwu równań na dwie niewiadome, czyli cały problem zredukował się o jedną niewiadomą i o jedno równanie. Nie ruszając już więcej pierwszego równania, dodajemy taką wielokrotność drugiego do następnych (tzn. tu do trzeciego, bo więcej równań już niema), by wyeliminować z nich drugą niewiadomą, tj. y (gdyby y akurat nie występował w drugim równaniu, to z itd.):

$$\begin{aligned} 2x+3y+\ \ z&=\ \ 2\,,\\ y+\ \ z&=\ \ 0\,,\\ z&=-2\,. \end{aligned}$$

I teraz już możemy już jechać zurück, od dołu, do góry: $z=-2$, $y-2=0$ więc $y=2$ i wreszcie, $2x+6-2=2$, czyli $x=-1$. "Sapienti sat" (po naszemu "mądrej głowie dość dwie słowie"), czyli jeden przykład powinien wystarczyć, by zorientować się w metodzie.

Przypomnienie
Przestrzeń wektorowa (p.w.) V nad ciałem $\mathbb{K}$ (którym w tym skrypcie będzie zawsze albo ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, albo zespolonych $\mathbb{C}$) jest to zbiór elementów $\mathbf{v}\in V$, w którym określone są dwa działania: przemienne dodawanie elementów $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1$ oraz mnożenie elementów przez liczby z ciała $\lambda\mathbf{v}$ ($\lambda\in\mathbb{K}$). W zbiorze tym musi być też "pępek świata", czyli wektor zerowy $\mathbf{0}$ taki, że $\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}$ (dla dowolnego $\mathbf{v}\in V$). Ponadto $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (nietłuste zero, to min. Z.Z., pardon, to element zerowy ciała $\mathbb{K}$).

Wobec ogólności i abstrakcyjności powyższej definicji, wektorami mogą być obiekty bardzo różne: uporządkowane n-ki liczb z jakiegoś ciała, np. z $\mathbb{R}$ - wtedy taką p.w. nazywam tu $\mathbb{R}^n$ (choć matematycy oznaczają ją chyba $V\mathbb{R}^n$), takie "szkolne" strzałki (każdy, kto przeszedł przez szkolną fizykę wie, o co chodzi), macierze ustalonego wymiaru $m \times n$, wielomiany stopnia nie większego niż n (lub dowolnego - wtedy ich przestrzeń jest dość duża, ale jeszcze nie tak duża, żeby sobie tego nie móc wyobrazić), a nawet funkcje, np. odwzorowujące $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ (wtedy ta przestrzeń wektorowa jest naprawdę duuuuża[7]). Takie obiekty, należące do V będą w tym skrypcie nazywane "żywymi" wektorami (i oznaczane tłustymi literami), aby je odróżnić od składowych wektorów (czyli zbiorów liczb), które są używane do reprezentowania wektorów i na nieszczęście wyglądają jak wektory z $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$, ale które wektorami jednak nie są (bo ten sam wektor może mieć różne składowe, zależnie od tego w jakiej bazie są to jego składowe). Niezrozumiałe pojęcia tu użyte staną się jasne w dalszym toku przyswajania sobie algebry.

Przypomnienie
Kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ z p.w. V nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy wektor $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots$, w którym λ_1, λ_2, ... są liczbami z ciała $\mathbb{K}$.

Przypomnienie
Mówimy, że układ (czyli taki mały podzbiorek) k wektorów $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ należących do danej p.w. V jest *liniowo niezależny*, jeśli jedynym rozwiązaniem równania

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}\,,$$

(tłuste zero to zero przestrzeni wektorowej, czyli wektor zerowy!) w którym λ_1, λ_2, ... są liczbami z ciała $\mathbb{K}$, jest rozwiązanie $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$. Jeśli zaś istnieje jakieś inne rozwiązanie tego równania z niezerowymi współczynnikami λ_i, to układ tych k wektorów jest liniowo zależny. Oznacza to, że jeden (lub kilka) z nich da się (dadzą się) przedstawić jako kombinacja (kombinacje) liniowe pozostałych.

Zadanie 1
Zbadać czy wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$, gdzie

$$i) \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix},$$

[7] Ale okazuje się, że jeśli np. narzucić na funkcje warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^2(x) < \infty\,,$$

- czyli rozpatrywać p.w. zwaną $L_2(\mathbb{R})$ - p. funkcji "całkowalnych z kwadratem" (jakby to bez sensu nie brzmiało) - to taka przestrzeń jest już "tylko" tak duża, jak przestrzeń wielomianów dowolnego stopnia.

oraz

$$ii) \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Odpowiedź: Z jawnej postaci tych wektorów łatwo widać, że: $i)$ tak, bo $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, ale $ii)$ nie.

Zadanie 2
Czy wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1+2i \\ i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 7-i \\ 3+i \end{bmatrix},$$

są liniowo zależne? Zbadać sprawę nad ciałem $\mathbb{R}$ i nad ciałem $\mathbb{C}$.
Rozwiązanie: Pytamy, czy równanie

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}\,,$$

ma rozwiązanie z $x_i \in \mathbb{R}$, gdy badamy sprawę nad ciałem $\mathbb{R}$ oraz z $x_i \in \mathbb{C}$ gdy nad $\mathbb{C}$. Rozwiążmy więc układ:

$$\begin{aligned} &x_1(1+2i) + x_2(7-i) = 0\,, \\ &x_1\,i + x_2(3+i) = 0\,, \end{aligned}$$

Z drugiego $x_1 = (-1+3i)x_2$ i to do pierwszego, co da: $[(1+2i)(-1+3i) + 7 - i]x_2 = 0$. To istotnie jest zero, niezależnie od wartości x_2. Rozwiązaniami są więc dowolne x_2 i $x_1 = (-1+3i)x_2$. Widać jednak, że jeśli $x_2 \in \mathbb{R}$, to x_1 jest zespolone. Zatem nad $\mathbb{R}$ wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są liniowo niezależne, ale nad $\mathbb{C}$ zależne.

Zadanie 3
Zbadać liniową niezależność nad ciałem $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$ wektorów

$$i) \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

oraz

$$ii) \qquad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: W przypadku $i)$ widać gołym okiem, że są liniowo zależne nad $\mathbb{R}$ bo równanie $\lambda_1\,\mathbf{e}_1 + \lambda_2\,\mathbf{e}_2 + \lambda_3\,\mathbf{e}_3 + \lambda_4\,\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$ ma rozwiązanie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda$, $\lambda_3 = -2\lambda$ z dowolną rzeczywistą liczbą λ, a skoro są liniowo zależne nad $\mathbb{R}$, to i nad $\mathbb{C}$ też, bo $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

W przypadku ii) rozwiązujemy równanie $\xi_1\mathbf{f}_1 + \xi_2\mathbf{f}_2 + \xi_3\mathbf{f}_3 = \mathbf{0}$, czyli układ

$$\begin{aligned} \xi_2 + i\xi_3 &= 0\,, \\ \xi_1 + i\xi_2 + \xi_3 &= 0\,, \\ 2\xi_1 - i\xi_2 + \xi_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dodając pierwsze pomnożone przez i do trzeciego dostajemy $\xi_1 = 0$. Uwzględniając to, z drugiego dodanego do trzeciego znajdujemy $2\xi_3 = 0$ czyli $\xi_3 = 0$ i wtedy (z pierwszego) $\xi_2 = 0$ też. Zatem wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ są liniowo niezależne nad obydwoma ciałami, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Uwaga 1: Stwierdzona wyżej liniowa zależność $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ i $\mathbf{e}_4$ oznacza, że np. $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_4$, tj., że $\mathbf{e}_3$ jest kombinacją liniową pozostałych. W zasadzie zamiast badać istnienie niezerowych rozwiązań równania $\lambda_1\,\mathbf{e}_1 + \lambda_2\,\mathbf{e}_2 + \lambda_3\,\mathbf{e}_3 + \lambda_4\,\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$ moglibyśmy postawić problem, czy wektor $\mathbf{e}_3$ jest liniowo zależny od pozostałych. To jest jednak mniej ogólne: mogłoby się np. okazać, że sam wektor $\mathbf{e}_3$ nie daje się przedstawić jako kombinacja liniowa $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_4$, ale te trzy wektory są liniowo zależne. Np. gdyby badać problem liniowej zależności wektorów

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

to okazałoby się (co w przypadku bardziej skomplikowanych wektorów nie musiałoby być od razu tak łatwo widoczne), że $\mathbf{v}_3$ nie jest kombinacją liniową $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_4$, niemniej te trzy wektory: $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne i tym samym cztery wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne. Badając ich liniową zależność przez pytanie o istnienie niezerowych rozwiązań równania $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \lambda_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ dostalibyśmy, że niezerowym rozwiązaniem jest $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_4 = \lambda$ i $\lambda_3 = 0$, czyli $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Jest jasne, że to nie pozwala wyrazić $\mathbf{v}_3$ przez pozostałe (bo $\lambda_3 = 0$).

Uwaga 2: Często badanie ile w danym zbiorze wektorów należących do $\mathbb{R}^n$ jest wektorów liniowo niezależnych przeprowadza się metodą tzw. redukcji kolumnowej. Pokażemy to tu na przykładzie wektorów z poprzedniego zadania. Mianowicie sprawdzimy tą metodą ile jest wektorów liniowo niezależnych w zbiorze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$. Badając ich liniową niezależność, pytalibyśmy o to, czy można znaleźć niezerowe współczynniki λ_i tak by

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Można się do tego zabrać tak: wyobrażmy sobie, że $\lambda_1 = \lambda_1' - \lambda_4$, a $\lambda_2 = \lambda_2' - \lambda_3 - \lambda_4$. Wtedy powyższa równość przybierze postać

$$\lambda_1' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2' \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Teraz już gołym okiem widać, że współczynnik λ_4 może być równy zeru, bo i tak mnoży wektor zerowy (wektor $\mathbf{v}_4$ okazał się kombinacją liniową pozostałych trzech wektorów), a pozostałe współczynniki, λ_1', λ_2' i λ_3, żeby dać zerowy wektor po prawej stronie, muszą być równe zeru. Tym samym $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ już tworzą układ liniowo niezależnych wektorów. Całą tak zawile tu opisaną procedurę przeprowadza się zwykle "mechanicznie" pakując wszystkie cztery żywe wektory w $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ w jedną macierz (tzn. stawia się je obok siebie na "sztorc"):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

i na tej macierzy robi operacje zwane "redukcją kolumnową", tzn. odejmuje się od jednych kolumn kombinacje liniowe innych kolumn (wolno także wszystkie liczby w jakiejś kolumnie pomnożyć przez jakąś niezerową liczbę) tak długo, aż dostanie się kilka kolumn mających same zera i kilka mających po jednej jedynce i samych zerach i to tak, że w macierzy na każdym poziomie jest już tylko jedna jedynka. Jak się chwilę zstanowić to procedurę tę można robić systematycznie tak jak eliminatkę Gaussa (tylko tu na kolumnach).[8] Należy jednak zrobić zastrzeżenie, że taka metoda (w tej wersji) działa, dzieki specyficznej postaci żywych wektorów z $\mathbb{R}^n$ (lub z $\mathbb{C}^n$).

Zadanie 4
Zbadać liniową zależność wektorów.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Rozwiązujemy równanie $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$, czyli układ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2ix_2 + x_3 &= 0\,, \\ ix_1 - x_2 + 2x_3 &= 0\,, \\ -ix_1 + x_2 + 3x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dodanie drugiego do trzeciego daje $x_3 = 0$. Wtedy pierwsze sprowadza się do $x_1 + ix_2 = 0$, a drugie do $ix_1 - x_2 = 0$, czyli do pierwszego pomnożonego przez i. Zatem szukanym rozwiązaniem jest $x_2 = ix_1$, $x_3 = 0$ i dowolne x_1. Ponieważ albo x_1 albo x_2 jest zespolone (albo nawet obie te liczby) to wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{w}_3$ są liniowo zależne nad $\mathbb{C}$, ale nie nad $\mathbb{R}$. Gdybyśmy to zadanie rozwiązywali metodą redukcji kolumnowej, to w przypadku traktowania tych wektorów jak należących do p.w. nad ciałem $\mathbb{R}$ dopuszczalibyśmy dodawanie do kolumn kombinacji innych kolumn z rzeczywistymi współczynnikami

[8] Procedurę tę w tym skrypcie stosuję wyjątkowo bo nie do niej się treść algebry sprowadza. Niestety na skutek jej nadużywania w zadaniach (przez innych prowadzących ćwiczenia) studenci mają często wrażenie, że cała ta algebra sprowadza się do takich fiku-miku na macierzach.

(i dopuszczali mnożenie wszystkich liczb w danej kolumnie przez tę samą niezerową liczbę rzeczywistą), a przy zadeklarowaniu, że p.w. jest nad ciałem $\mathbb{C}$, wolno by było mnożyć kolumny także przez liczby zspolone i brać kombinacje liniowe z zespolonymi współczynnikami.

Zadanie 4′
Niech V będzie przestrzenią wektorową (oczywiście nad ciałem $\mathbb{R}$) wielomianów stopnia nie wyższego niż 3. Zbadać liniową zależność wektorów-wielomianów

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= x^3 + x^2 - x - 1\,,\\
\mathbf{w}_2 &= - 3x + 4\,,\\
\mathbf{w}_3 &= -x^3 + x^2 - 2x + 1\,,\\
\mathbf{w}_4 &= - x^2 + 2\,,
\end{aligned}$$

Rozwiązanie: Pytamy, czy układ

$$\lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \lambda_3\mathbf{w}_3 + \lambda_4\mathbf{w}_4 = \mathbf{0}\,,$$

w którym $\mathbf{0}$ jest wielomianem zerowym, tj. funkcją $f(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$, ma rozwiązanie różne od $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ (nie chodzi tu więc w żadnym razie o znalezienie x-a, dla którego wartość jakiegoś wielomianu jest równa zeru!!!). Wymaga to rozwiązania układu

$$\begin{aligned}
\lambda_1 - \lambda_3 &= 0\,,\\
\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 &= 0\,,\\
-\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0\,,\\
-\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie: $\lambda_1 = \xi$, $\lambda_2 = -\xi$, $\lambda_3 = \xi$, $\lambda_4 = 2\xi$, gdzie ξ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Układ tych czterech wielomianów jest wiec liniowo zależny, gdyż

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3 + 2\mathbf{w}_4\,.$$

Zadanie 5
Dowieść, że jeśli wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ oraz $\mathbf{e}_3$ są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) to takimiż są i wektory

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,,\\
\mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,,\\
\mathbf{f}_3 &= \phantom{\mathbf{e}_1 +} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie: Jak zwykle pytamy, czy z faktu, że $\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 = \mathbf{0}$ wynika, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Wiemy także, jako że wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ są liniowo niezależne, iż równanie $\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ ma tylko rozwiązanie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Piszemy więc:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 &= \lambda_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \lambda_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \lambda_3(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)\,\mathbf{e}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,\mathbf{e}_2 + (\lambda_1 + \lambda_3)\,\mathbf{e}_3\,.\end{aligned}$$

Zatem na mocy założenia musimy mieć $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ i $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. Drugie z pierwszym daje $\lambda_3 = 0$, wtedy trzecie daje $\lambda_1 = 0$ i na koniec z drugiego wynika wtedy że i $\lambda_2 = 0$. Zatem układ trzech wektorów $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 6
Dowieść, że wektory

$$\mathbf{f}_1 = \sin x\,, \qquad \mathbf{f}_2 = \sin^3 x\,, \qquad \mathbf{f}_3 = \sin 3x\,,$$

należące do przestrzeni wektorowej $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są liniowo zależne.
Rozwiązanie: To proste

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x(1 - 2\sin^2 x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x\,.\end{aligned}$$

Czyli $\mathbf{f}_3 = 3\mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2$, co dowodzi, że $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ są liniowo zależne.

Zadanie 7
Dowieść, że następujące zbiory wektorów-funkcji (tj. wektorów z bardzo duuuużej przestrzeni wektorowej $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nad $\mathbb{R}$) są liniowo niezależne (czy odpowiedź mogła by być inna, gdyby funkcje te traktować jak odwzorowania odcinka (a, b) w $\mathbb{R}$?)

a) $\sin x, \quad \cos x$,
b) $1, \quad \sin x, \quad \cos x$,
c) $\sin x, \quad \sin 2x, \quad \ldots, \quad \sin nx$,
d) $1, \quad \cos x, \quad \cos 2x\,, \quad \ldots, \quad \cos nx$
e) $1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \ldots, \quad \cos nx, \quad \sin nx$.

Rozwiązanie: W przypadku *a*) jest jasne, że $\lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ może *dla wszystkich* $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ zachodzić tylko dla $\lambda = \xi = 0$: jeśli $x = k\pi$ i $x = l\pi + \frac{1}{2}\pi$ (z jakimiś całkowitymi k i l) należą do (a, b) to jest to trywialne, jesli nie, to można zróżniczkować[9] i ma się $\lambda \cos x - \xi \sin x = 0$ oraz $\lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ i znów jedynym rozwiązaniem obu dla wszystkich x-ów jest $\lambda = \xi = 0$. To samo w przypadku *b*): $f(x) \equiv \eta 1 + \lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ dla wszystkich $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ też wymaga $\eta = \lambda = \xi = 0$ (aby to zobaczyć, można zróżniczkować $f(x)$ dwakroć, co da $-\lambda \sin x - \xi \cos x = 0$, i po dodaniu $f''(x) = 0$ do $f(x) = 0$ wyjdzie, że $\eta = 0$; dalej problem jest już taki sam, jak w punkcie a). W

[9] No bo jeśli funkcja $f(x) = \lambda \sin x + \xi \cos x$ ma być tożsamościowo równa zeru (w przedziale (a, b)), to jej pochodna też taka musi być.

przypadku c) możemy posłużyć się indukcją. Zakładamy, że n pierwszych wektorów twory układ liniowo niezależny (jeśli $n = 1$, jest to oczywiste) i sprawdzamy, czy z tego wynika, że po dołączeniu doń $n+1$-szego wektora, układ wektorów nadal będzie liniowo niezależny, to znaczy, że równanie

$$f(x) \equiv \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \sin 2x + \ldots + \lambda_n \sin nx + \lambda_{n+1} \sin(n+1)x \equiv 0\,,$$

(symbol $\equiv$ przypomina, że ma to być 0 dla wszystkich x) nadal będzie miało tylko rozwiązanie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$. Skoro równość ta ma zachodzić dla wszystkich x, to znaczy że i

$$f''(x) = -\lambda_1 \sin x - 2^2\lambda_2 \sin 2x + \ldots - n^2\lambda_n \sin nx - (n+1)^2\lambda_{n+1} \sin(n+1)x \equiv 0\,.$$

Mnożymy $f(x)$ przez $(n+1)^2$ i dodajemy do tego tu wyżej, co da

$$[(n+1)^2 - 1]\lambda_1 \sin x + [(n+1)^2 - 4]\lambda_2 \sin 2x + \ldots + [(n+1)^2 - n^2]\lambda_n \sin nx \equiv 0\,.$$

To zaś na mocy indukcyjnego założenia o liniowej niezależności wektorów $\sin x, \ldots, \sin nx$ oznacza, ze $[(n+1)^2 - 1]\lambda_1 = [(n+1)^2 - 4]\lambda_2 = \ldots = [(n+1)^2 - n^2]\lambda_n = 0$. Stąd zeru muszą być równe wszystkie λ_i o $i = 1, \ldots, n$ z wyjątkiem ewentualnie k-tej, o takim k, że $(n+1)^2 - k^2 = 0$. Ale to się nie może zdarzyć, bo w indukcji rozpatrujemy tylko $n+1 > k$. Zatem $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$ i z tożsamościowego znikanie $f(x)$ wynika, iż także $\lambda_{n+1} = 0$. W przypadku d) także posługujemy się indukcją. Najpierw, podobnie jak w punkcie b) pokazujemy, że wektory 1 i $\cos x$ są liniowo niezależne, a następnie zakładamy, że teza (liniowa niezależność) jest prawdziwa dla n i musimy pokazać, że

$$g(x) \equiv \eta + \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \ldots + \lambda_n \cos nx + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x \equiv 0\,,$$

pociąga za sobą $\eta = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$. Mnożymy więc $g(x)$ przez $(n+1)^2$ i dodajemy do tego dwakroć zróżniczkowane $g(x) = 0$. Jak wyżej wynika stąd, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$ i zostaje nam w $g(x) = 0$ tylko $\eta + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x = 0$, co znów (choćby na mocy tego, że teza jest prawdziwa dla $n = 1$, bo czymże się różni x od $(n+1)x$? - tylko dziedziną...) wymaga by $\eta = \lambda_{n+1} = 0$. Wreszcie w przypadku e) o prawdziwość tezy dla $n = 1$ wnosimy analogicznie jak w punkcie b), a następnie zakładamy, że $\eta + \lambda_1 \cos x + \xi_1 \sin x + \lambda_n \cos nx + \xi_n \sin nx = 0$ tylko jeśli $\eta = \lambda_1 = \xi_1 = \ldots = \lambda_n = \xi_n = 0$ i robimy dla $n+1$ sztuczkę z drugą pochodną, co zostawia nam $\eta + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x + \xi_{n+1} \sin(n+1)x = 0$. To też wymaga, by $\eta = \lambda_{n+1} = \xi_{n+1} = 0$.

Przypomnienie:

Bazą uporządkowaną przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ jest każdy uporządkowany (czytaj: ponumerowany zgodnie z jakimś porządkiem) *maksymalny* układ liniowo niezależnych wektorów z V. Liczba wektorów takiego układu jest *wymiarem przestrzeni* V (oznaczanym $\dim V$); dowodzi się, że wymiar V nie zależy od wyboru bazy, tzn. że liczba wektorów bazy (w przypadku przestrzeni o skończonym wymiarze) jest zawsze taka sama. Konstruktywnym stwierdzeniem, umożliwiającym sprawdzanie, czy dany układ wektorów z jakiejś p.w. V stanowi jej bazę (tzn., czy jest to maksymalny układ liniowo niezależnych wektorów), jest to, że każdy wektor z V daje się przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów tworzących bazę i kombinacja ta jest jednoznaczna (tzn. jest tylko jedna taka).

Aby stwierdzić, że dany układ wektorów jest bazą, trzeba mieć albo dostęp do żywych wektorów (tj. umieć na nich działać bezpośrednio, czyli wiedzieć, czym jest "fizycznie" p.w., do której one należą), albo (tak jak w Zadaniu 8' niżej) mieć wektory podane jako kombinacje liniowe innych kilku, o których już skądeś się wie, że tworzą bazę one bazę. Np. w Zadaniu 5 nie możemy pytać o to, czy wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$ tworzą bazę, bo nic nie wiemy o p.w., do której one należą; ponieważ o wektorach $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ nie powiedziano tam, że tworzą bazę (powiedziane jest tylko, że są liniowo niezależne) to możemy tylko sprawdzić, czy $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$ są liniowo niezależne też, ale nie to, czy tworzą one bazę.

Ponieważ każdy wektor z przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ można zapisać jako kombinację liniową n wiektorów $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ mających na i-tym "pięterku" jedykę, a poza tym same zera, wektory te tworzą bazę (obdarzoną ulubionym przez matematyków przymiotnikiem "kanoniczna"). Stąd też jest jasne, że $\dim \mathbb{R}^n = n$. W analogiczny sposób każdy wielomian stopnia $\leq r$ można stworzyć jako kombinację liniową $r+1$ wielomianów kanonicznych $\mathbf{e}_k(x) = x^k$, gdzie $0 \leq k \leq r$. Zatem wymiar takiej przestrzeni wektorowej $W_{(r)}$ jest równy $\dim W_{(r)} = r + 1$.

Zadanie 8

Dowieść, że (żywe) wektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tworzą bazę przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$.

Uwaga: jeśli w wektorach, tj. w tych kwadratowych nawiasikach, mają być tylko liczby rzeczywiste - bo tak sobie *definiujemy* tę przestrzeń - to musi to być przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbb{R}$; gdybyśmy bowiem dopuścili mnożenie wektorów przez liczby zespolone, to w nawiasikach wystąpiłyby z konieczności także liczby zespolone wbrew naszemu określeniu tej przestrzeni. W drugą zaś stronę rzecz jest możliwa: możemy sobie arbitralnie określić przestrzeń wektorową w taki sposób, że w nawiasikach (prostokątnych) mogą wystąpić także liczby zespolone, ale dopuszczać tylko kombinacje liniowe o współczynnikach rzeczywistych. W takim przypadku stosują się uwagi o bazie i wymiarze takiej przestrzeni umieszczone na końcu tego zadania.

Rozwiązanie: Trzeba pokazać, że dowolny żywy wektor $\mathbf{w}$ można przedstawić jako kombinację liniową tych trzech, tj. w postaci $x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 + x_3\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{w}$. Niech $\mathbf{w} = [a, b, c]$. Trzeba pokazać, że układ równań

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= a\,, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b\,, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= c\,, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= a + b - c\,, \\ 4x_1 \phantom{{}+ 4x_2} + 2x_3 &= -a + b + c \\ 2x_1 + 4x_2 \phantom{{}+ 2x_3} &= a - b + c\,, \end{aligned}$$

ma rozwiązanie.[10] Mnożąc pierwsze równanie przez -2 i dodając je do trzeciego otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= a + b - c\,, \\ 4x_1 + 2x_3 &= -a + b + c\,, \\ 2x_1 - 8x_3 &= -a - 3b + 3c\,. \end{aligned}$$

Teraz trzecie razy -2 i dodać do drugiego. Otrzymujemy $18x_3 = a + 7b - 5c$. Czyli mamy x_3. W podobny sposób można znaleźć $18x_1 = -5a + b + 7c$ oraz $18x_2 = 7a - 5b + c$ (symetria równań!). Łatwo sprawdzić, że to dobry wynik. Skoro jest (jednoznaczne) rozwiązanie dla dowolnego wektora $\mathbf{w}$, to wektory ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) tworzą bazę.

Uwaga: Wyjaśnijmy sobie na najprostszym przykładzie jeszcze jedną sprawę: dwa wektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

rozpinają całą przestrzeń wektorową V nad ciałem $\mathbb{R}$ składającą się z wektorów postaci

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{o} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,,$$

bo dowolny taki wektor można przedstawić jako $\mathbf{w} = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2$, tj. jako kombinację liniową $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ z rzeczywistymi współczynnikami. Przestrzeń ta jest zatem dwuwymiarowa, bo jej baza składa się z dwu wektorów. Te same dwa wektory $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ nie rozpinają jednak całej przestrzeni wektorowej W, też nad ciałem $\mathbb{R}$, składającej się z wektorów postaci

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{o} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,,$$

bo np. wektora

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix},$$

nie można dostać z kombinacji linowej $x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2$ o *rzeczywistych* współczynnikach x_1 i x_2. Do tego trzeba wziąć większą bazę, np.:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}.$$

Czyli taka przestrzeń wektorowa (nad ciałem $\mathbb{R}$) jest czterowymiarowa. Oczywiście, jeśli przestrzeń wektorowa jest nad ciałem $\mathbb{C}$ to te cztery powyższe wektory są parami do siebie proporcjonalne ($\mathbf{e}_2 = i\,\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_4 = i\,\mathbf{e}_3$), czyli liniowo zależne. Wtedy baza ma dwa wektory i ta przestrzeń wektorowa (nad ciałem $\mathbb{C}$) jest tylko dwuwymiarowa.

[10] Oczywiście można też do tego układu zastosować systematycznie eliminację Gaussa z Zadania 0.

Zadanie 8′
Wiadomo, że trzy wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$ stanowią bazę (uporządkowaną) przestrzeni wektorowej V. Czy bazę stanowią też trzy wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ zdefiniowane jako kombinacje

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3\,,\\
\mathbf{e}_2 &= 4\,\mathbf{f}_1 + 5\,\mathbf{f}_2 + 6\,\mathbf{f}_3\,,\\
\mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3\,,
\end{aligned}$$

? A czy bazą są też wektory

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3\,,\\
\mathbf{w}_2 &= 4\,\mathbf{f}_1 + 5\,\mathbf{f}_2 + 6\,\mathbf{f}_3\,,\\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2 + 5\mathbf{f}_3\,.
\end{aligned}$$

?
Rozwiązanie: W tym zadaniu nie mamy dostępu do żywych wektorów z przestrzeni V (nawet nie wiemy, czym one są, strzałkami, wielomianami, czy czymś innym), więc nie możemy sprawdzić *bezpośrednio*, czy każdy wektor da się zapisać jako kombinacja liniowa $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$). Ale wiemy, że bazą są wektory $\mathbf{f}_i$, czyli wiemy, że każdy $\mathbf{v}$ z V można przedstawić w postaci

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}_1\, v^1_{(f)} + \mathbf{f}_2\, v^2_{(f)} + \mathbf{f}_3\, v^3_{(f)} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{f}_i\, v^i_{(f)} \equiv \mathbf{f}_i\, v^i_{(f)}$$

Wprowadziliśmy tu specjalne oznaczenie współczynników *rozkładu wektora* $\mathbf{v}$ *na wektory bazy* $\mathbf{f}_i$ (tak się to nazywa): współczynnik przy $\mathbf{f}_i$ nazywamy $v^i_{(f)}$ pisząc numer i wektora bazy (widać po co baza ma być uporządkowana!) *u góry* i zaopatrując współczynnik w subskrypt (fuj, jaki anglicyzm!) (f), żeby pamiętać, że to jest i-ta *składowa* (znów standardowa nazwa) wektora $\mathbf{v}$ w bazie wektorów $\mathbf{f}_i$. Notacja ta - choć niespotykana gdzie indziej - jest bardzo wygodna i będzie używana w całym tym skrypcie. Ostatnia postać tego wzoru wykorzystuje powszechnie dziś używaną konwencję sumacyjną wujka Einsteina, polegającą na *niepisaniu* znaku sumy: jeśli wskaźnik (tu wskaźnik i) powtarza się na dwóch różnych poziomach, domyślnie musi być zsumowany.

Wracając do meritum: spróbujmy najpierw odwrócić związki definiujące wektory $\mathbf{e}_i$, tj. wyrazić przez wektory $\mathbf{e}_i$ wektory bazy. Można to zrobić znów eliminatką Gaussa: związki definiujące wektory $\mathbf{e}_i$ traktujemy jak układ zwykłych równań liniowych i odejmujemy od drugiego i od trzeciego odpowiednio 4 razy i 1 razy pierwsze; dwa te równania przybierają wówczas postać

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_2 + 2\,\mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_2 - 4\,\mathbf{e}_1\,,\\
-2\,\mathbf{f}_2 \qquad &= \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\,,
\end{aligned}$$

Stąd od już razu $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_3$, dalej: $4\,\mathbf{f}_3 = 2\,\mathbf{e}_2 - 8\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{f}_2$, czyli

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{4}(-9\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\,,$$

i wreszcie $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3$, czyli

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{4}(11\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\,,$$

Skoro się udało odwrócić te związki, to możemy w rozkładzie $\mathbf{v}$ na wektory bazy $\mathbf{f}_i$ wyrazić te wektory przez wektory $\mathbf{e}_i$ i napisać:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \left(\frac{11}{4}\,\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_2 + \frac{1}{4}\,\mathbf{e}_3\right)v^1_{(f)} + \left(\frac{1}{2}\,\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_3\right)v^2_{(f)} + \left(-\frac{9}{4}\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_2 + \frac{1}{4}\,\mathbf{e}_3\right)v^3_{(f)} \\ &= \mathbf{e}_1\left(\frac{11}{4}\,v^1_{(f)} + \frac{1}{2}\,v^2_{(f)} - \frac{9}{4}\,v^3_{(f)}\right) + \mathbf{e}_2\left(-\frac{1}{2}\,v^1_{(f)} + \frac{1}{2}\,v^3_{(f)}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{1}{4}\,v^1_{(f)} - \frac{1}{2}\,v^2_{(f)} + \frac{1}{4}\,v^3_{(f)}\right).\end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że każdy wektor $\mathbf{v}$ z przestrzeni V można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\mathbf{e}_i$; współczynnikami takiej kombinacji liniowej są liczby w nawiasach, które w naszej notacji oznaczymy $v^i_{(e)}$. Wykonany rachunek pokazuje też od razu, że wektory $\mathbf{e}_i$ są liniowo niezależne: skoro $\mathbf{f}_i$ są, to wektor zerowy $\mathbf{0}$ przestrzeni V ma w bazie $\mathbf{f}_i$ składowe $0^i_{(f)} = 0$ (z definicji liniowej niezależności wektorów $\mathbf{f}_i$). Zatem zerowe są też współczynniki $0^i_{(e)} = 0$. Tym samym pokazaliśmy, że wektory $\mathbf{e}_i$ są bazą przestrzeni V.

W przypadku wektorów $\mathbf{w}_i$ wykonując te same co poprzednio operacje na definiujących je związkach otrzymamy

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_2 + 2\,\mathbf{f}_3 &= \mathbf{w}_2 - 4\mathbf{w}_1\,,\\ 2\,\mathbf{f}_2 + 4\,\mathbf{f}_3 &= \mathbf{w}_3 - \ \ \mathbf{w}_1\,.\end{aligned}$$

Ponieważ lewe strony tych równości są do siebie nawzajem proporcjonalne, widzimy, że $2\mathbf{w}_2 - 8\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3 - \ \mathbf{w}_1$, czyli $7\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$. Trzy wektory $\mathbf{w}_i$ są więc liniowo zależne i nie mogą być bazą.

Przypomnienie

Podprzestrzenią wektorową V (czasem mówi się "podprzestrzenią liniową" albo "powłoką liniową") przestrzeni wektorowej U nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywa się podzbiór wektorów należących do U zamknięty ze względu na działania, które można wykonywać na wektorach. Oznacza to, że suma wektorów podzbioru V jest też wektorem z tego podzbioru, podobnie jak należy doń każdy wektor z tego podzbioru pomnożony przez liczbę z $\mathbb{K}$. Oczywiście z warunków tych wynika, że do każdej podprzestrzeni wektorowej przestrzeni U należy wektor zerowy, $\mathbf{0}$, przestrzeni U. Podprzestrzeń można zadać (zdefiniować) podając np. zbiór (niekoniecznie liniowo niezależnych) rozpinających ją wektorów (tzn. mówiąc, że V tworzą wszystkie możliwe kombinacje liniowe podanych wektorów) - wtedy jest to automatycznie podprzestrzeń wektorowa - lub np. w sposób *uwikłany*, podając jakieś warunki, które muszą spełniać wektory należące do V - w tym przypadku może się okazać, że zbiór wektorów wyznaczanych przez podane warunki nie jest podprzestrzenią wektorową (tylko takim sobie zbiorem).

Przykład
Sprawdzić, czy zbiór A wektorów

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

spełniających warunek $x + y = 2$ tworzy w $\mathbb{R}^3$ podprzestrzeń wektorową.
Rozwiązanie: Nie tworzy. Gdyby tworzył, to suma wektorów

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2 - x_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2 - x_2 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

z których każdy sam z siebie należy do zbioru A (bo suma liczb z pierwszego i drugiego[11] "pięterka" w każdym z tych wektorów jest równa 2) do zbioru A nie należy, bowiem suma liczb z pierwszego i drugiego pięterka wektora

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_1 \\ 4 - x_1 - x_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix},$$

nie jest już równa 2, tylko 4. Podobnie widać, że jeśli $\mathbf{v}$ należy do A, to $\lambda\mathbf{v}$ już nie należy. Do $\mathbf{A}$ nie należy również wektor zerowy $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 9
Znaleźć wymiar i jakąś bazę podprzestrzeni wektorowej $E \subset \mathbb{R}^4$ rozpinanej przez wektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix},$$

Rozwiązanie: Ponieważ $\mathbb{R}^4$ ma wymiar 4, zatem przynajmniej jeden z tych wektorów musi być liniowo zależny od pozostałych. Odrzućmy ostatni (bo ma brzydkie liczby). Aby zobaczyć, czy pierwsze cztery są liniowo zależne spróbujmy (trochę na "chybił-trafił") zapisać czwarty jako kombinację liniową trzech pierwszych, tj. jako $\mathbf{v}_4 = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$. To daje układ równań

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -1\,, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1\,, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -1\,, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

[11] Świadomie nie chcemy tu użyć słowa "składowej" - czy jest jasne, dlaczego?

Weźmy trzy pierwsze na razie. Odjąć od trzeciego pierwsze. To da $x_2 = 4x_3$. Wstawiamy to do dwu pierwszych i mamy układ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 15x_3 &= -1\,, \\ x_1 + 11x_3 &= \ \ 1\,. \end{aligned}$$

To łatwo rozwiązać (drugie razy dwa i odjąć od pierwszego). Stąd mamy jako rozwiązanie układu trzech pierwszych równań

$$x_1 = -\frac{26}{7}\,, \qquad x_2 = \frac{12}{7}\,, \qquad x_3 = \frac{3}{7}\,.$$

Teraz możemy sprawdzić ostatnie

$$-\frac{26}{7} + 2 \cdot \frac{12}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = 1\,.$$

(Cztery równania na trzy zmienne - trzeba mieć szczęście żeby tak się udało!!) To dowodzi, że cztery pierwsze wektory są liniowo zależne bo

$$-\frac{26}{7}\,\mathbf{v}_1 + \frac{12}{7}\,\mathbf{v}_2 + \frac{3}{7}\,\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}\,.$$

Zarazem z jednoznaczności tego rozwiązania wynika, że jak byśmy wzięli którekolwiek dwa wektory spośród $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ to się nie uda, tzn. $\mathbf{v}_4$ nie jest kombinacją liniową tylko dwu z nich. Zatem wymiar podprzestrzeni E jest równy conajmniej 3. Skoro jednak się okazało, że z czterech wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ tylko trzy są liniowo niezależne, to trzeba wrócić i zapytać, czy nie jest w takim razie możliwe dołączenie $\mathbf{v}_5$, tzn. trzeba sprawdzić czy układ wektorów $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$, nie jest przypadkiem liniowo niezależny.[12] Jeśli jest liniowo zależny, to $\mathbf{v}_5$ powinien dać się zapisać jako $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_3\,\mathbf{v}_3 + x_4\,\mathbf{v}_4$. Sprawdźmy to:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 - x_4 &= \ \ 2\,, \\ x_1 - \ \ x_3 + x_4 &= \ \ 3\,, \\ 2x_1 - \ \ x_3 - x_4 &= \ \ 7\,, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 &= -2\,. \end{aligned}$$

Najpierw rozwiązujemy pierwsze trzy: od pierwszego trzecie da $4x_3 = -5$, czyli $x_3 = -\frac{5}{4}$. To do drugiego i trzeciego:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= \frac{7}{4}\,, \\ 2x_1 - x_4 &= \frac{23}{4}\,. \end{aligned}$$

Dodanie stronami da $x_1 = \frac{10}{4}$ i wtedy z pierwszego wyżej $x_4 = \frac{7}{2} - \frac{10}{4} = -\frac{3}{4}$. Łatwo sprawdzić, że to jest dobre rozwiązanie trzech pierwszych równań. Sprawdzamy teraz

[12] Zamiast $\mathbf{v}_2$ bierzemy tu $\mathbf{v}_4$, bo $\mathbf{v}_2$ ma brzydsze liczby. Jest to dopuszczalne, bo jak wynika z wykonanego rachunku $\mathbf{v}_2$ można (dzięki temu, że $x_2 \neq 0$) wyrazić przez $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$.

ostatnie, czwarte: $x_1 + 3x_3 + x_4 = \frac{10}{4} - 3 \cdot \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{8}{4} = -2$. Czyli to czwarte też jest wtedy spełnione! Zatem ostatecznie $\mathbf{v}_5$ jest kombinacją liniową $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$, i $\mathbf{v}_4$ czyli jest od nich liniowo zależny. Ponieważ już wiemy, że $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo niezależne, więc mogą one tworzyć bazę podprzestrzeni E, której wymiar jest zatem równy 3.

Zadanie 10

Jak w zadaniu 9 tylko z wektorami

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Rozwiązanie: Jak i poprzednio (nawet nad ciałem $\mathbb{R}$, bo wszystkie liczby w kolumienkach są czysto rzeczywiste) pięć wektorów nie może być liniowo niezależnych. Teraz jednak postąpimy bardziej regulaminowo i zbadamy warunek

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 + \lambda_4 \mathbf{v}_4 + \lambda_5 \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}\,.$$

Mamy zatem układ równań:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\,, \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 &= 0\,, \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 &= 0\,, \\ -\lambda_1 \qquad + \lambda_3 + 4\lambda_4 + 3\lambda_5 &= 0\,. \end{aligned}$$

Drugie odjęte od trzeciego daje $\lambda_4 + \lambda_5 = 0$; pomijając trzecie piszemy więc pozostałe równania (eliminując z nich λ_5):

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\,, \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\,, \\ -\lambda_1 \qquad + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Teraz ostatnie minus przedostatnie da $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Po wykorzystaniu tego pierwsze i trzecie stają się tożsame z drugim. Zatem zostaje do spełnienia tylko $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$; mamy więc jedno równanie na trzy niewiadome! Widać, że rozwiązanie można napisać w postaci

$$\lambda_1 = \xi\,, \qquad \lambda_2 = -\xi\,, \qquad \lambda_3 = \xi - \eta\,, \qquad \lambda_4 = \eta\,, \qquad \lambda_5 = -\eta\,.$$

ξ i η są tu zupełnie dowolnymi liczbami. Mamy zatem dla dowolnych wartości ξ i η związek

$$\xi\,\mathbf{v}_1 - \xi\,\mathbf{v}_2 + (\xi - \eta)\,\mathbf{v}_3 + \eta\,\mathbf{v}_4 - \eta\,\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}\,.$$

Możemy tu np. położyć $\xi = 0$ i $\eta = 1$ albo $\xi = 1$ i $\eta = 0$, co da związki

$$\mathbf{v}_5 = -\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4\,, \qquad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\,,$$

pokazujące, że np. $\mathbf{v}_1$ oraz $\mathbf{v}_5$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowych $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$. Te trzy wektory mogą więc stanowić bazę całej podprzestrzeni rozpiętej przez $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$.

Przypomnienie
Jeśli V i W są dwiema podprzestrzeniami tej samej przestrzeni wektorowej U, to sumą algebraiczną $V+W$ nazywa się zbiór wszystkich wektorów postaci $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ takich, że $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$. Suma taka jest nazywana sumą prostą podprzestrzeni V i W (i oznaczana $V \oplus W$), jeśli jedynym elementem wspólnym podprzestrzeni V i W jest wektor zerowy $\mathbf{0}$ (jeśli V i W są podprzestrzeniami, to obie, i V i W, muszą ten wektor w sobie zawierać). Między wymiarami V, W i $V+W$ zachodzi związek $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$, w którym $V \cap W$ jest podprzestrzenią wektorową tworzoną przez wszystkie wektory należące i do V i do W (prawda, że zbiór takich wektorów jest podprzestrzenią w U?)

Zadanie 11
Pokazać, że podprzestrzeń liniowa $E \subset \mathbb{R}^4$ złożona z wektorów postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{r} 3z - 4t = 0 \\ x - y + z + \ \ t = 0 \end{array},$$

jest rozpinana przez dwa wektory.
Rozwiązanie: Warunki są dwa na cztery liczby na kolejnych pięterkach wektora. Weźmy x i z jako niezależne. Wtedy $t = \frac{3}{4}z$ oraz (po wstawieniu tego do drugiego warunku) $x - y + \frac{7}{4}z = 0$, czyli $y = x + \frac{7}{4}z$. Zatem każdy wektor z E musi mieć postać

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 12
Znaleźć sumę (algebraiczną) i przecięcie dwu podprzestrzeni w $\mathbb{R}^3$ rozpinanych przez dwa zbiory wektorów:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rozwiązanie: Najpierw znajdziemy ich sumę. Jeśli wszystkie trzy wektory V (lub W) są liniowo niezależne, to siłą rzeczy rozpinają one całą przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^3$ i $V = \mathbb{R}^3$ ($W = \mathbb{R}^3$) i wtedy w oczywisty sposób $V+W = \mathbb{R}^3$. Sprawdźmy więc liniową niezależność wektorów z V. Układ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ \ x_3 &= 0\,, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0\,, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

ma jak łatwo sprawdzić tylko rozwiązanie $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, zatem rzeczywiście $V = \mathbb{R}^3$ i $V + W = \mathbb{R}^3$. Jeśli zaś chodzi o W, to gołym okiem widać, że $\mathbf{w}_3 = -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, więc podprzestrzeń W jest tylko dwuwymiarowa i jest rozpinana np. przez $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$. Ponieważ $V = \mathbb{R}^3$, przecięcie $V \cap W$, tj. podprzestrzeń utworzona przez takie wektory, które należą zarazem do V i do W jest po prostu samą podprzestrzenią W (bo $W \subset V = \mathbb{R}^3$). Widać, że związek $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$ jest tu spełniony.

Zadanie 13

Znaleźć wymiar i podać jakąś bazę podprzestrzeni $E \subset \mathbb{R}^4$ rozpiętej przez wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć ogólną postać wektora z E, a także zadać tę samą podprzestrzeń w sposób uwikłany (tj. podać równanie lub równania, jakie muszą spełniać liczby na kolejnych "pieterkach" wektora, by należał on do E).

Rozwiązanie: Znów zobaczmy, czy się da przedstawić $\mathbf{w}_4$ w postaci $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3$. Aby się dało musi być spełniony układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\quad &= 1\,, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3\,, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3\,, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7\,. \end{aligned}$$

Rozwiążmy trzy pierwsze, a potem sprawdzimy ostatnie. Drugie minus pierwsze daje $x_3 = 1 - \frac{1}{2}x_1$. To do trzeciego i mamy razem z pierwszym układ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1\,, \\ \frac{5}{2}x_1 + 3x_2 &= 2\,. \end{aligned}$$

Stąd już łatwo i mamy jako rozwiązanie trzech pierwszych

$$x_1 = 2\,, \qquad x_2 = -1\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

(Łatwo sprawdzić, że to rozwiązuje trzy pierwsze równania). Teraz sprawdzamy czwarte:

$$2 \cdot (4) - 1 \cdot (1) + 0 \cdot (3) = 7\,.$$

Hurra! Znów się udało! Czyli $\mathbf{w}_4$ jest liniowo zależny od $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$: $\mathbf{w}_4 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$. Co więcej znów rozwiązanie jest jednoznaczne,[13] więc wszystkie trzy, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$, są już liniowo niezależne. Zatem wymiar $\dim E = 3$, a jej bazą mogą być te trzy wektory.

Oczywiście dowolny wektor należący do E ma postać

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Na użytek zadania 15 wygodnie będzie przedstawić ten wektor tak, że trzy jego pierwsze składowe będą dowolne, a czwarta będzie się wyrażała przez trzy pierwsze. Zadamy tym samym tę podprzestrzeń w sposób uwikłany. W tym celu zastępujemy w drugim, trzecim i czwartym wierszu $x_1 + x_2$ przez a, tak by znikło z nich x_1

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a - x_2 + 2x_3 \\ 3a + x_3 \\ 4a - 3x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

W następnym kroku zastępujemy $3a + x_3$ przez c a w drugim i czwartym wierszu zastępujemy x_3 przez $c - 3a$. W ten sposób

$$\begin{bmatrix} a \\ -4a + 2c - x_2 \\ c \\ -5a + 3c - 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Wreszcie, w drugim wierszu zastępujemy $-4a + 2c - x_2$ przez b, a w czwartym zamiast x_2 dajemy $-4a + 2c - b$. W ten sposób ogólna postać wektora należącego do E jest taka:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 7a + 3b - 3c \end{bmatrix}.$$

Podprzestrzeń E można więc zadać w sposób uwikłany mówiąc, że należą do niej wszystkie wektory $[a, b, c, d]$ spełniające warunek $7a + 3b - 3c - d = 0$.

[13] Oczywiście patrząc czujnie na wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ i $\mathbf{w}_4$ można by było od razu zobaczyć, że $\mathbf{w}_4 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$; nie wiedzielibyśmy wtedy jednak jeszcze, czy jest to jednoznaczny sposób wyrażenia $\mathbf{w}_4$ przez $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$ czyli tego, że te trzy wektory są liniowo niezależne.

Zadanie 14

Znaleźć wymiar i bazę podprzestrzeni (dobrze najpierw uzasadnić, że to naprawdę jest podprzestrzeń!) $F \subset \mathbb{R}^4$ rozpiętej przez wszystkie wektory postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{r} 2y - 2z - t = 0 \\ x - 4y + 4z + 2t = 0 \end{array}.$$

Rozwiązanie: dwa razy pierwszy warunek plus drugi da $x = 0$. Z pierwszego zaś mamy, że $t = 2y - 2z$. Wektory rozpinające E są więc postaci

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 2y-2z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \equiv y\,\mathbf{f}_1 + z\,\mathbf{f}_2\,.$$

Wektory $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ są ewidentnie liniowo niezależne. Zatem $\dim F = 2$ i jej bazą mogą być $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ (ale może też być nią jakieś dwie inne liniowo niezależne kombinacje tych wektorów, np. $\mathbf{w}_1 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ i $\mathbf{w}_2 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$).

Zadanie 15

Znaleźć wymiary i podać jakieś bazy sumy algebraicznej oraz przecięcia podprzestrzeni E z zadania 13 i podprzestrzeni F z zadania 14. Czy suma algebraiczna $E + F$ jest sumą prostą?

Rozwiązanie: Conajmniej jeden z pięciu wektorów

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 \equiv \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_5 \equiv \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

rozpinających sumę $E + F$ musi być liniowo zależny od pozostałych. Wyrzućmy pierwszy bo najbardziej skomplikowany. Zobaczmy następnie, czy $\mathbf{w}_2$ się da zapisać jako kombinacja liniowa $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$. Gołym okiem widać, że się nie da. Co więcej, łatwo sprawdzić, że równanie $x\,\mathbf{w}_3 + y\,\mathbf{w}_4 + z\,\mathbf{w}_5 = \mathbf{0}$ ma tylko rozwiązanie $x = y = z = 0$. Zatem $E + F = \mathbb{R}^4$, bo jest rozpinana przez cztery wektory $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$, które można przyjąć za jej bazę.

Teraz przecięcie E i F. Tworzą je wektory należące i do E i do F. Oznacza to, że wektory te muszą się dać jednocześnie przedstawić w dwu postaciach

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 7a + 3(b-c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 2y-2z \end{bmatrix}.$$

Widać, że aby tak było musi być $a = 0$, $b = y$, $c = z$ i do tego jeszcze musi zachodzić równość $7a + 3(b - c) = 2(y - z)$. Ale skoro $a = 0$, $b = y$, $c = z$, to może tak być tylko, jeśli $b = c$. Zatem ogólną postacia wektora należącego do przecięcia podprzestrzeni E i F jest

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Przecięcie E i F jest więc podprzestrzenią jednowymiarową rozpinaną przez jakikolwiek wektor powyższej postaci (np. z $b = 1$). Skoro przecięcie E i F nie składa się z samego tylko wektora zerowego, to suma $E + F$ nie jest sumą prostą. Zgadza się to też ze wzorem $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$: $4 = 3 + 2 - 1$.

Zadanie 15′

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^4$ zadane są (poprzez podanie tzw. rozpinaczy, czyli rozpinających je wektorów) dwie podprzestrzenie

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Podać wymiar oraz jakieś bazy podprzestrzeni $U + V$ oraz $U \cap V$. Obie te podprzestrzenie zadać także w sposób uwikłany, podając równania, jakie muszą spełniać liczby na kolejnych pięterkach wektorów należących do tych podprzestrzeni.

Rozwiązanie: Najpierw sprawdzimy, czy podane cztery wektory są liniowo zależne, czy nie. Gdyby nie były, to oczywiście rozpinałyby całą przestrzeń $\mathbb{R}^4$ i suma $U + V$ podprzestrzeni by była całą tą przestrzenią. Jak zwykle, zamiast działać regulaminowo, wybierzemy bardziej pokrętny sposób i zapytamy, czy ostatni wektor jest kombinacją liniową trzech pierwszych. Sprowadza się to do rozwiązania układu czterech równań

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1\,, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1\,, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -5\,. \end{aligned}$$

Jak zwykle można sprawdzić, czy układ ten ma rozwiązanie próbując najpierw rozwiązać trzy pierwsze równania, a jak się uda, to sprawdzając, czy spełnione jest też i ostatnie. Ale okaże się później, że warto jako pierwszy krok rozwiązać trochę ogólniejszy układ:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= a\,, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= b\,, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= c\,. \end{aligned}$$

Potrzebny nam układ odpowiada położeniu $a = b = c = 1$. No to dzieła! Odejmujemy ostatnie od drugiego i dodajemy dwa razy ostatnie do pierwszego, eliminując z nich x_1:

$$\begin{aligned} -5x_2 + 3x_3 &= a + 2c\,, \\ 4x_2 - 4x_3 &= b - c\,. \end{aligned}$$

To już łatwo rozwiązać względem x_2 i x_3, a potem z dowolnego z trzech równań wyznaczyć x_1. Otrzymujemy w ten sposób:

$$x_1 = -\frac{1}{8}\,(8a + 4b + 4c)\,, \qquad x_2 = -\frac{1}{8}\,(4a + 3b + 5c)\,, \qquad x_3 = -\frac{1}{8}\,(4a + 5b + 3c)\,.$$

jeśli podstawimy tu $a = b = c = 1$ dostaniemy $x_1 = -2$, $x_2 = x_3 = -\frac{3}{2}$. Wstawiamy te liczby do czwartego równania (pierwszego z wypisanych układów) i znajdujemy, że jest ono też spełnione. Zatem z czterech podanych wektorów - nazwijmy je $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_4$ - ostatni jest liniowo zależny od pozostałych: $\mathbf{w}_4 = -2\mathbf{w}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{w}_2 - \frac{3}{2}\mathbf{w}_3$. Zatem podprzestrzeń $U + V$ jest rozpinana przez trzy wektory, np. $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$ (tworza one jedna z możliwych jej baz) i jej wymiar jest równy 3. Z równości $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$ wynika więc od razu, iż podprzestrzeń $U \cap V$ jest jednowymiarowa, tj. jest rozpinana przez jeden wektor, który z definicji należy i do U i do V. Aby go znaleźć możemy znaleziony związek miedzy wektorami $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_4$ napisać w postaci

$$-4\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2 = 3\mathbf{w}_3 + 2\mathbf{w}_4\,.$$

W takiej formie od razu daje nam on to co trzeba: wektor $-4\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2$ należy bowiem do U, a wektor $3\mathbf{w}_3 + 2\mathbf{w}_4$ należy do V. Są one sobie równe, więc dają właśnie wektor należący (i zatem ją rozpinający, i zarazem będący jej bazą) podprzestrzeń $U \cap V$. Jawnie wektor ten ma postać

$$-4\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = 3\mathbf{w}_3 + 2\mathbf{w}_4\,.$$

Na koniec możemy się zająć sprawą zadania podprzestrzeni $U + V$ i $U \cap V$ w sposób uwikłany. Najpierw $U + V$: Każdy wektor do niej należący jest kombinacją liniową $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Teraz widać w jakim celu rozwiązaliśmy wcześniej układ równań z a, b i c po prawej stronie. Znalezione x_1, x_2 i x_3 możemy teraz wstawić do sumy $x_1 + x_2 + x_3$ na dolnym pięterku wypisanego wyżej wektora należącego do $U + V$. Zatem dowolny wektor należący zapisany jak tu wyżej po prawej należy do $U+V$, jeśli $2a+\frac{3}{2}(b+c)+d=0$. Zadać zaś podprzestrzeń $U\cap V$ w sposób uwikłany jest bardzo prosto: wszystkie wektory do niej należące są proporcjonalne do wektora $[5,-7,5,-7]$, zatem mają one pierwsze pięterko a równe trzeciemu c, a drugie b czwartemu d, a na dodatek pierwsze i drugie są ze sobą związane tak, że $7a+5b=0$. Można więc te podprzestrzeń w sposób uwikłany zadać tak:

$$U\cap V=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix},\qquad \begin{array}{r}a-\quad c=0\\ b-\quad d=0\\ 7a+5b=0\end{array}\right\}.$$

Zadanie 16

Pokazać, że podprzestrzeń $E\subset\mathbb{C}^4$ rozpięta przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ postaci

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\i\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\i\\1\\1-i\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}2\\-i\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}3\\0\\4\\1\end{bmatrix},$$

zawiera wektory

$$\mathbf{w}_1=\begin{bmatrix}1\\i\\3\\1\end{bmatrix},\qquad \text{oraz}\qquad \mathbf{w}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\2\\1-i\end{bmatrix},$$

oraz, że wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ rozpinają tę samą podprzestrzeń E.

Rozwiązanie: Najpierw trzeba pokazać, że równania $x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+x_3\,\mathbf{v}_3+x_4\,\mathbf{v}_4=\mathbf{w}_1$ oraz $y_1\,\mathbf{v}_1+y_2\,\mathbf{v}_2+y_3\,\mathbf{v}_3+y_4\,\mathbf{v}_4=\mathbf{w}_2$ mają rozwiązania. Pierwsze daje układ równań

$$\begin{aligned}x_1\qquad\qquad\;\; +2x_3+3x_4 &= 1\,,\\ ix_2-ix_3\qquad\; &= i\,,\\ 2x_1\qquad +x_2+x_3+4x_4 &= 3\,,\\ ix_1+(1-i)x_2\qquad +x_4 &= 1\,.\end{aligned}$$

Z drugiego $x_2-x_3=1$, czyli $x_2=1+x_3$. To do pozostałych trzech, co da układ

$$\begin{aligned}x_1\qquad +2x_3+3x_4 &= 1\,,\\ 2x_1\qquad +2x_3+4x_4 &= 2\,,\\ ix_1+(1-i)x_3+x_4 &= i\,.\end{aligned}$$

Od drugiego odjąć pierwsze: $x_1=1-x_4$. To do pierwszego i trzeciego

$$\begin{aligned}2(x_3+x_4) &= 0\,,\\ (1-i)(x_3+x_4) &= 0\,.\end{aligned}$$

Czyli da się przedstawić $\mathbf{w}_1$, z tym przecież, że nie w sposób jednoznaczny. (O! Wyszło mi zdanie jak z T. Parnickiego!) To zaś oznacza, że same wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne (czyli $\dim E < 4$). Istotnie: widać, że $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zatem by dowieść, że $\mathbf{w}_2 \in E$, wystarczy pokazać, że $\mathbf{w}_2 = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3$. Widać, że $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ po prostu. Ogólniej, można zauważyć, że

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4)\,,\\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \xi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4)\,,\end{aligned}$$

dla dowolnych λ i ξ, ponieważ $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Stąd dla $\lambda = -1$ uzyskujemy związek

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_3\,.$$

Następnie kładąc raz $\lambda = 1$, $\xi = 2$, a drugi raz $\lambda = 1$, $\xi = 1$ dostajemy dwa układy równań

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4\,,\\ \mathbf{w}_2 &= 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4\,,\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4\,,\\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4\,.\end{aligned}$$

Z pierwszego układu, odejmując pierwsze od drugiego otrzymujemy

$$\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}_1\,,$$

gdzie w drugim kroku wykorzystany został otrzymany już wyżej związek $\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_3$. Z drugiego zaś układu, odejmując od pierwszego drugie, dostajemy

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\,.$$

Tak więc możemy wyrazić $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ przez $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_3\,,\\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3\,,\end{aligned}$$

(co łatwo sprawdzić). Zatem każdy wektor postaci $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 \in E$ można napisać jako

$$\alpha(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_3) + \gamma\mathbf{v}_3 = \alpha\mathbf{w}_1 + (\beta - \alpha)\mathbf{w}_2 + (\alpha - \beta + \gamma)\mathbf{w}_3\,.$$

Zatem wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{v}_3$ także rozpinają E. Zauważmy jeszcze na koniec, że nie zastanawialiśmy się tutaj, nad jakim ciałem rozpięta jest przestrzeń wektorowa, do której należą rozpatrywane tu wektory. Ponieważ liczby występujące w wektorach $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są zespolone, a priori odpowiedź na postawione pytania mogłaby zależeć od tego, czy ciałem tym jest $\mathbb{C}$, czy tylko $\mathbb{R}$ (por. uwagi w Zadaniach 2 i 8). Wyszło nam jednak, że wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są kombinacjami liniowymi o współczynnikach czysto rzeczywistych wektorów $\mathbf{v}_i$, a to oznacza, że odpowiedź nie zależy od tego, czy ciałem jest $\mathbb{C}$ czy $\mathbb{R}$.

Uwaga. Jak dotąd liniową (nie)zależność zbioru wektorów sprawdzaliśmy badając bezpośrednio warunek zerowania się ich kombinacji liniowej. Później nauczymy się robić to badając rząd odpowiedniej macierzy utworzonej ze składowych tych wektorów w jakiejś (dowolnej) bazie i wykorzystywać do tego wyznaczniki macierzy.

Zadanie 17
W pewnej bazie pewnej trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V (o której charakterze nic nie musimy w zasadzie wiedzieć; widać jednak, że $\dim V = 3$) wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ mają składowe

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pokazać, że $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ są także bazą tej przestrzeni i podać w tej nowej bazie składowe wektora $\mathbf{w}$, który w pierwotnej bazie ma składowe $(6, 9, 14)$.
Uwaga: Użyliśmy wyżej symbolu := aby podkreślić, że w zasadzie nie należy utożsamiać wektora z jego składowymi: wektor pozostaje sobą niezależnie od naszego wyboru bazy; składowe zaś od tego wyboru jak najbardziej zależą! W tych notatkach składowe wektorów będziemy zawsze pisać w nawiasach okrągłych aby podkreślić, że nie należy ich mylić z wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^n$, które zawsze pedantycznie piszemy w nawiasach prostokątnych. Np. jeden i ten sam wektor $\mathbf{w}$ z $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ma w kanonicznej bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

składowe $(1, 2, 3)$, bo $\mathbf{w} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2 + 3 \cdot \mathbf{e}_3$, a w bazie $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

składowe $(0, 2, 1)$ bo, jak łatwo zobaczyć, $\mathbf{w} = 0 \cdot \mathbf{f}_1 + 2 \cdot \mathbf{f}_2 + 1 \cdot \mathbf{f}_3$. Zauważmy jednak, że w zadaniu, w odróżnieniu od tego przykładu (w którym wektory są kolumnami liczbowymi, na których umiemy bezpośrednio wykonywać działania), nie mamy dostępu do "żywych" wektorów: nie wiemy, czym są $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (mogą one być strzałkami w przestrzeni, wielomianami, albo żyrafami, jeśli komuś się uda nadać zbiorowi żyraf strukturę przestrzeni wektorowej) i jedyne czym dysponujemy, to informacja, że $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ są wektorami liniowo niezależnymi oraz składowymi wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{w}$ w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Rozwiązanie: Niech wyjściową bazą będą wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (nic o nich nie wiemy - poza tym, że skoro tworzą bazę, to są liniowo niezależne - ale jakieś oznaczenia ich możemy sobie wprowadzić). Wykorzystując podane w tej bazie składowe wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ możemy napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3 . \end{aligned}$$

Odejmijmy pierwsze od drugiego:

$$\mathbf{e}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \ .$$

To do dwu pozostałych:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) , \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) . \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &= 2\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 , \\ \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 &= 3\,\mathbf{v}_1 - 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 . \end{aligned}$$

Od drugiego pierwsze oraz od dwa razy pierwszego drugie. Razem więc mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 , \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 , \\ \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 . \end{aligned}$$

Udało się jednoznacznie wyrazić trzy liniowo niezależne (z założenia) wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$, co oznacza, że te drugie też są liniowo niezależne, czyli też mogą być bazą przestrzeni.[14] Możemy teraz przerobić wektor $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= 6\,\mathbf{e}_1 + 9\,\mathbf{e}_2 + 14\,\mathbf{e}_3 \\ &= 6\,(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + 9\,(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + 14\,(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + 3\,\mathbf{v}_3 , \end{aligned}$$

[14] W dalszym toku ćwiczeń zobaczymy, że liniową niezależność wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$, można sprawdzić badając rząd macierzy utworzonej z postawionych obok siebie ich składowych (w dowolnej bazie), co z kolei można sprowadzić do sprawdzenia, czy wyznacznik takiej macierzy jest niezerowy. Tu jednak dzięki przyjętemu sposobowi sprawdzania mamy od razu wynik przydatny dalej w tym zadaniu.

czyli składowe $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ to $(1,2,3)$. Zapiszmy uzyskany wyżej związek za pomocą macierzy:

$$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Mnożenie "paluchowe" podrazumywajetsia. Stojąca tu macierz jest tzw. *macierzą zmiany bazy* lub *macierzą przejścia*; dokładniej, jest to macierz przejścia z bazy $\mathbf{e}_i$, $i=1,2,3$ do bazy $\mathbf{v}_i$, $i=1,2,3$. Macierz taką będziemy oznaczać $R_{v\leftarrow e}$, aby podkreślić, że pozwala one ze składowych wektora w bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ otrzymać jego składowe w bazie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

Stosując wprowadzoną już (w Zadaniu 8′) konwencję sumacyjną wujka A.E. można powyższy wzór z macierzą zapisać jako $\mathbf{e}_k=\mathbf{v}_j[R_{v\leftarrow e}]^j{}_k$. Przypomnijmy, że konwencja polega na *niepisaniu* w prawej stronie sumy po wartościach wskaźnika j od 1 do 3. Jawnie wzór ten mówi, że np. $\mathbf{e}_1=\mathbf{v}_1\,[R_{v\leftarrow e}]^1{}_1+\mathbf{v}_2\,[R_{v\leftarrow e}]^2{}_1+\mathbf{v}_3\,[R_{v\leftarrow e}]^3{}_1$, gdzie $[R_{v\leftarrow e}]^1{}_1=1$, $[R_{v\leftarrow e}]^2{}_1=1$, $[R_{v\leftarrow e}]^3{}_1=-1$, etc.

Jeśli teraz napiszemy wektor $\mathbf{w}$ w postaci $\mathbf{w}=\mathbf{e}_i w^i_{(e)}$ (indeksik e u $w^i_{(e)}$ ma przypominać że $w^i_{(e)}=(6,9,14)$ to są składowe tego wektora w bazie $\mathbf{e}_i$), to będziemy mieć:[15]

$$\mathbf{w}=\mathbf{e}_i\,w^i_{(e)}=\mathbf{v}_k\,[R_{v\leftarrow e}]^k{}_i\,w^i_{(e)}\equiv\mathbf{v}_k\,w^i_{(v)}\,.$$

gdzie $(R_{v\leftarrow e})^k{}_i$ jest macierzą zmiany bazy,[16] a związek $w^i_{(v)}=[R_{v\leftarrow e}]^k{}_i w^i_{(e)}$ jawnie wygląda tak:

$$\begin{pmatrix}w^1_{(v)}\\ w^2_{(v)}\\ w^3_{(v)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 9\\ 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Takie właśnie składowe $w^i_{(v)}$ otrzymaliśmy już wcześniej (w istocie rzeczy w ten sam sposób, tylko bez tego sztafażu, który jednakowoż na dłuższą metę jest niezwykle wygodny).

Jak już wszystko "rozebraliśmy" w szczegółach, to możemy teraz macierz $R_{v\leftarrow e}$ otrzymać prostszym sposobem. Rozłóżmy najpierw całkiem ogólny wektor $\mathbf{w}=a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2+c\mathbf{e}_3$

[15] Wykorzystujemy tu to, że skończone sumy są przemienne, tzn.

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\mathbf{v}_k[R_{(v\leftarrow e)}]^k{}_j\right)w^j_{(e)}=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{v}_k\left(\sum_{j=1}^{3}[R_{(v\leftarrow e)}]^k{}_j w^j_{(e)}\right).$$

Na tym też opiera się cała konwencja sumacyjna Einsteina.

[16] Matematycy z Katedry Metod Matematycznych Fizyki zwykli macierz $R_{v\leftarrow e}$ oznaczać Id (w ich notacji jest to $[\mathrm{Id}]^v{}_e$), co jest dobrze uzasadnione, jako że (jak to się stanie dalej jasne) jest to w istocie rzeczy macierz odwzorowania identycznościowego - tj. liniowego odwzorowania Id: $V\to V$, które każdemu wektorowi $\mathbf{v}\in V$ przypisuje ten sam wektor $\mathbf{v}\in V$, tylko zapisana "z dwu stron" (co to znaczy wyjaśni się dalej) w dwu różnych bazach; ponieważ fizycy muszą się jednak różnić od matematyków (niechby i mniejszą logiką stosowanych oznaczeń!), w tym skrypcie macierz zmiany bazy w przestrzeni wektorowej oznaczam R, a macierz zmiany bazy w przestrzeni kowektorów (pojawi się dalej) P.

na wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$. Sprowadza się to do rozwiązania układu równań:[17]

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Rozwiązujemy (stosując np. eliminatkę Gaussa) i znajdujemy: $\alpha = a+b-c$, $\beta = a-2b+c$, $\gamma = -a + b$. Liczby te są składowymi wektora $\mathbf{w}$ w bazie wektorów $\mathbf{v}_i$. Powinno się je otrzymywać z działania macierzy $R_{v\leftarrow e}$ na składowe wektora $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{e}_i$:

$$R_{v\leftarrow e} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ a-2b+c \\ -a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

W drugim kroku po zapisaliśmy wynik działania (nieznanej jeszcze!) macierzy $R_{v\leftarrow e}$ na składowe (a, b, c) w postaci konkretnej macierzy działającej na (a, b, c). Ponieważ składowe te są dowolne (za a, b i c można podstawić dowolne liczby), to co się otrzymuje musi być właśnie macierzą $R_{v\leftarrow e}$!

Zadanie 18
Jak w zadaniu 17 tylko teraz

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a wektor $\mathbf{w}$ w pierwotnej bazie ma składowe $(6, 2, -7)$.
Rozwiązanie: Znów piszemy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_2 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 - 5\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Trzecie dodać do pierwszego, a potem dwa razy trzecie do drugiego

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_2 + 2\,\mathbf{v}_3 &= 5\,\mathbf{e}_1 - 3\,\mathbf{e}_3\,, \end{aligned}$$

[17] Po prostu składowe wektora $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{e}_i$ ale potraktowane tu jakby były wektorami z $\mathbb{R}^3$, muszą być kombinacjami liniowymi składowych wektorów $\mathbf{v}_i$ (w bazie $\mathbf{e}_i$) też potraktowanych jak wektory z $\mathbb{R}^3$. Trzeba jednak pamiętać, że to nie są wektory tylko składowe. I jak tu nie dostać algebraicznego kręćka?! Ale rzeczywiście: równość

$$\begin{aligned} a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3 &= \alpha\,\mathbf{v}_1 + \beta\,\mathbf{v}_2 + \gamma\,\mathbf{v}_3 \\ &= \alpha\,(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \beta\,(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3) + \gamma\,(\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3)\,, \end{aligned}$$

sprowadza się do równości $a = \alpha+\beta+\gamma$, $b = \alpha+\beta+2\gamma$, $c = \alpha+2\beta+3\gamma$, które są właśnie tymi podanymi w tekście.

Teraz pierwsze razy 3, drugie razy 2 i odjąć, oraz pierwsze razy 5, a drugie razy 3 i odjąć:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= -3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,,\\ \mathbf{e}_3 &= -5\,\mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,.\end{aligned}$$

Do tego jeszcze

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{e}_3\\ &= (-3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_3 + (-5\,\mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)\\ &= -8\,\mathbf{v}_1 + 5\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,.\end{aligned}$$

Razem więc

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= -3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,,\\ \mathbf{e}_2 &= -8\,\mathbf{v}_1 + 5\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,,\\ \mathbf{e}_3 &= -5\,\mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,.\end{aligned}$$

Czyli macierz $R_{v\leftarrow e}$ zmiany bazy ma postać

$$R_{v\leftarrow e} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

a składowe $w^i_{(v)}$ wektora $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v}_i$ $i = 1, 2, 3$ to

$$\begin{pmatrix} w^1_{(v)}\\ w^2_{(v)}\\ w^3_{(v)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6\\ 2\\ -7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Oczywiście mając wyjściowe wzory wyrażające wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ w postaci kombinacji liniowych bazowych wektorów $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$, mamy od razu "za darmo" macierz przejścia $R_{e\leftarrow v}$ (jej kolumny tworzą postawione obok siebie kolumienki składowych wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ w bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$):

$$R_{e\leftarrow v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & -5 & 1\end{pmatrix}.$$

Macierze $R_{e\leftarrow v}$ i $R_{v\leftarrow e}$ muszą być ze sobą oczywiście jakoś związane. Związek ten jest oczywisty: skoro macierz $R_{v\leftarrow e}$ robi ze składowych $w^i_{(e)}$ w bazie $\mathbf{e}_i$ dowolnego wektora $\mathbf{w}$ jego składowe $w^i_{(v)}$ w bazie $\mathbf{e}_j$, a macierz $R_{e\leftarrow v}$ zamienia na powrót składowe $w^i_{(v)}$ w składowe $w^i_{(e)}$, to powinniśmy mieć

$$w^i_{(e)} = [R_{e\leftarrow v}]^i{}_j w^j_{(v)} = [R_{e\leftarrow v}]^i{}_j [R_{v\leftarrow e}]^j{}_k w^k_{(e)}\,.$$

tj.[18] $[R_{e\leftarrow v}]^i{}_j [R_{v\leftarrow e}]^j{}_k = \delta^i{}_k$. Macierzowo:

$$R_{e\leftarrow v}\cdot R_{v\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Zachęcam do sprawdzenia, że istotnie iloczyn daje macierz jednostkową!). Oczywiście mamy także

$$R_{v\leftarrow e}\cdot R_{e\leftarrow v} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tak więc $[R_{v\leftarrow e}]^{-1} = R_{e\leftarrow v}$, a $[R_{e\leftarrow v}]^{-1} = R_{v\leftarrow e}$.

Uwaga: W związku z powyższym zadaniem zauważmy, że znaleźliśmy sposób odwracania macierzy kwadratowych.[19] Inny bardziej "teoretyczny" sposób zostanie podany dalej. Niemniej sposób tu znaleziony (oraz podana przy okazji jeszcze inna "mechaniczna" metoda) pozostanie i tak naogół najużyteczniejszym z praktycznego punktu widzenia.

Zadanie 19

Znaleźć macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Zacznijmy od drugiej macierzy (wymiaru 3×3) wykorzystując to, co ustaliliśmy wyżej: interpretujemy sobie tę macierz jako macierz zmiany bazy $R_{e\leftarrow v}$, co pozwala napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1\,, \\ \mathbf{v}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\ \mathbf{v}_3 &= -3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Układ ten traktujemy jak układ równań na $\mathbf{e}_i$ i rozwiązujemy względem $\mathbf{e}_i$, co tu akurat jest proste:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1\,, \\ \mathbf{e}_2 &= -2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\,, \\ \mathbf{e}_3 &= 7\,\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,. \end{aligned}$$

[18] Definicja symbolu $\delta^i{}_k$ czyli tzw. delta Kroneckera: $\delta^i{}_k = 1$ gdy $i = k$ i $\delta^i{}_k = 0$ gdy $i \neq k$. Kronecker to ten, co mówił, że dobry Pan Bóg stworzył liczby naturalne, a inne to już ludzie.

[19] Tzw. nieosobliwych macierzy kwadratowych. Nie każda macierz kwadratowa daje się odwrócić (macierze niekwadratowe naogół nie mają odwrotnych, choć może się zdarzyć, że iloczyn macierzy A wymiaru $n\times r$, czyli mającej n wierszy i $r \neq n$ kolumn, i macierzy $r\times n$ da macierz jednostkową wymiaru $n\times n$). Ale macierze zmiany bazy - nieodmiennie kwadratwe - z samej swojej istoty są zawsze odwracalne, czyli należą do pospolitego gatunku macierzy nieosobliwych.

Stąd odczytujemy, że

$$R_{v\leftarrow e} = [R_{e\leftarrow v}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Sprawdzamy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tak jak być powinno.

W przypadku trzeciej macierzy postępujemy analogicznie:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\,, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4\,, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4\,, \\ \mathbf{v}_4 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\,. \end{aligned}$$

Biorąc sumę i różnicę pierwszego i trzeciego równania oraz sumę i różnicę drugiego i czwartego (jak kto woli, można też równania dobrać w pary inaczej) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 &= 2\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 &= 2\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_4\,, \\ \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 &= 2\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 &= 2\,\mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_4\,. \end{aligned}$$

Robiąc to samo raz jeszcze znajdujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{4}\,(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4)\,, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{4}\,(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4)\,, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{4}\,(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4)\,, \\ \mathbf{e}_4 &= \frac{1}{4}\,(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4)\,, \end{aligned}$$

Mamy więc (mnożenie macierzy przez liczbę to oczywiście mnożenie przez tę liczbę *każdego* elementu owej macierzy):

$$R_{e\leftarrow v} \cdot R_{v\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(z dokładnością do czynnika 1/4 macierz odwrotna jest tu równa macierzy wyjściowej).

Wreszcie, w przypadku pierwszej macierzy 2×2 można by robić tak jak wyżej, ale prościej (i na przyszłośc bardziej przydatnie) jest zapamiętać regułkę:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Zakładamy tu, że $ad-bc\neq 0$; jeśli $ad-bc=0$, to macierz jest osobliwa i nie ma odwrotnej. (Wyrażenie $ad-bc$ jest to jej *wyznacznik* - będzie o nich dalej).

Zapowiedziany "mechaniczny" sposób otrzymywania macierzy odwrotnej do danej macierzy kwadratowej polega na jednoczesnym wykonywaniu na kolumnach danej macierzy (którą chcemy odwrócić) i kolumnach macierzy jednostkowej identycznych operacji (którymi mogą być dodawanie do jakiejś kolumny dowolnej kombinacji liniowej pozostałych kolumn, mnożeniu kolumny przez liczbę i, wreszcie, przestawianie kolumn).

Zademonstrujemy tę metodę na przykładzie odwracanej wyżej macierzy 4×4. Ustawiamy w tym celu obok siebie tę macierz i macierz jednostkową:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dokonujemy najpierw operacji $C_4\to C_4+C_1$ i $C_3\to C_3-C_2$ (tj. czwartą kolumnę zastępujemy sumą czwartej i pierwszej, a trzecią różnicą trzeciej i drugiej), co prowadzi do:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Następnymi operacjami są: $C_2\to C_2+\frac{1}{2}C_3$, $C_1\to C_1-\frac{1}{2}C_4$; dają one

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Strzałka oznacza wykonanie dwu następnych operacji: $C_4\to C_4-2C_2$ oraz $C_3\to C_3+2C_1$. Kolejne ruchy, to $C_1\to C_1-\frac{1}{4}C_3$ oraz $C_2\to C_2+\frac{1}{4}C_4$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Ostatnie dwie operacje zaznaczone strzałką polegały na przestawieniu miejscami kolumn pierwszej i drugiej oraz na podzieleniu kolumn trzeciej i czwartej przez 4. W rezultacie po prawej stronie otrzymaliśmy macierz odwrotną (tę samą, co poprzednio) do wyjściowej macierzy 4×4.

Alternatywna wersja tej metody polega na jednoczesnym wykonywaniu wymienionych wyżej operacji, ale nie na kolumnach, lecz na wierszach macierzy danej i macierzy jednostkowej.[20] W tej wersji metodę tę łatwo uzasadnić. Równość

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

wyznaczająca macierz X odwrotną do A można bowiem traktować, jak zestaw n układów każdy po n równań na n niewiadomych:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_{1k} + a_{12}x_{2k} + \ldots + a_{1n}x_{nk} & = & 1, \quad 0, \ \ldots \ 0, \\ a_{21}x_{1k} + a_{22}x_{2k} + \ldots + a_{2n}x_{nk} & = & 0, \quad 1, \ \ldots \ 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1k} + a_{n2}x_{2k} + \ldots + a_{nn}x_{nk} & = & 0, \quad 0, \ \ldots \ 1. \end{array}$$

Powyższy zapis należy czytać tak, że gdy w wierszach po lewej stronie $k = 1$, tak iż są to równania na x_{11}, x_{21}, $\ldots$, x_{n1}, prawą ich stroną jest pierwsza kolumna; gdy w wierszach po lewej stronie $k = 2$ (równania na x_{12}, x_{22}, $\ldots$, x_{n2}), prawą stroną jest druga kolumna, itd. Każdy z n tych układów równań rozwiązujemy stosując eliminatkę Gaussa z Zadania 0. Ponieważ jednak lewe strony tych układów są (formalnie) takie same, robimy to jednocześnie dodając do siebie z odpowiednimi współczynnikami równania; jeśli "oderwać się" od x-ów, sprowadza się to do wykonywania na wierszach macierzy A po lewej i na wierszach macierzy jednostkowej po prawej wymienionych wyżej operacji. Gdy po lewej powstanie już macierz jednostkowa, rozwiązaniami na elementy x_{1k}, x_{2k}, $\ldots$, x_{nk} k-tej kolumny macierzy X będą właśnie kolejne elementy k-tej kolumy macierzy wytworzonej po prawej stronie. Metodę zastosowaną w przykładzie polegającą na wykonywaniu operacji na kolumnach można uzasadnić analogicznie, rozpatrując równania wynikające z równości $X \cdot A = I$ lub, wygodniej, z równości[21] $(X \cdot A)^T = I^T$, czyli z $A^T \cdot X^T = I$.

W opisanej metodzie łatwo się pomylić, albo dostać oczopląsu od śledzenia dwu macierzy na raz; wydaje mi się, choć może to być subiektywne wrażenie, że metoda odwracania macierzy polegająca na wyobrażeniu sobie, iż jest ona macierzą zmiany bazy i odwróceniu odpowiedniego *jednego* układu n równań na n wektorów jest jednak bezpieczniejsza.

Jak już jesteśmy przy odwracaniu macierzy, to rozpatrzmy jeszcze takie

[20] Pamiętać przy tym należy o tym, żeby nie mieszać: jeśli decydujemy się na operacje na kolumnach, to nie możemy nagle zacząć ich robić na wierszach.

[21] M^T oznacza tu macierz otrzymaną z macierzy M przez transpozycję, tj. (w przypadku macierzy kwadratowych) odbicie elementów M względem diagonali.

Zadanie 19′

Niech A, B, C, D będą macierzami wymiaru $n \times n$ odwracalnymi, tzn. macierze A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, D^{-1} istnieją i zakładamy, że je znamy (lub umiemy je znaleźć). Napisać macierze odwrotne do macierzy wymiaru $2n \times 2n$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

(0 oznacza tu macierz zerową wymiaru $n \times n$).

Rozwiązanie: Poszukajmy najpierw macierzy odwrotnej do macierzy mającej macierz zerową w prawym górnym rogu. Macierz odwrotną piszemy też w postaci zawierającej cztery bloki $n \times n$; powinna ona być taka, że

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & K \\ L & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot M + 0 \cdot L & A \cdot K + 0 \cdot N \\ C \cdot M + D \cdot L & C \cdot K + D \cdot N \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} A \cdot M & A \cdot K \\ C \cdot M + D \cdot L & C \cdot K + D \cdot N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Widać stąd, że $M = A^{-1}$ oraz, że zero w prawym górnym rogu można dostać kładąc[22] $K = 0$. Wtedy patrząc na prawy dolny blok widzimy, że $N = D^{-1}$. Wreszcie, lewy dolny blok daje wtedy równanie

$$C \cdot A^{-1} = -D \cdot L\,, \qquad \text{czyli} \qquad L = -D^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}\,.$$

Zatem (drugą macierz odwracamy w podobny sposób)

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \cdot B \cdot D^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Aby odwrócić trzecią macierz, piszemy równanie

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & K \\ L & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot M + B \cdot L & A \cdot K + B \cdot N \\ C \cdot M + D \cdot L & C \cdot K + D \cdot N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Daje ono dwa niezależne (macierzowe) układy:

$$\begin{aligned} A \cdot M + B \cdot L &= I\,, \qquad & A \cdot K + B \cdot N &= 0\,, \\ C \cdot M + D \cdot L &= 0\,, \qquad & C \cdot K + D \cdot N &= I\,. \end{aligned}$$

Aby rozwiązać lewy (prawy) układ, mnożymy górne równanie z lewej macierzowo przez B^{-1}, a dolne z lewej przez D^{-1}, co da

$$\begin{aligned} B^{-1} \cdot A \cdot M + L &= B^{-1}\,, \qquad & B^{-1} \cdot A \cdot K + N &= 0\,, \\ D^{-1} \cdot C \cdot M + L &= 0\,, \qquad & D^{-1} \cdot C \cdot K + N &= D^{-1}\,. \end{aligned}$$

[22] Nie jest oczywiste, czy to jest jedyna możliwość; przy zadanej macierzy A może może istnieć jakaś niezerowa macierz K, taka że $A \cdot K = 0$. Niemniej próbujemy, czy się tak uda

Odejmujemy teraz w lewym (prawym) układzie równanie dolne (górne) od górnego (dolnego), co da

$$(B^{-1} \cdot A - D^{-1} \cdot C) \cdot M = B^{-1}, \qquad (D^{-1} \cdot C - B^{-1} \cdot A) \cdot K = D^{-1}.$$

Stąd $M = (B^{-1} \cdot A - D^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot B^{-1}$ oraz $K = (D^{-1} \cdot C - B^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot D^{-1}$. Możemy teraz skorzystać z łatwego do sprawdzenia wzoru, słusznego dla dowolnych kwadratowych, odwracalnych macierzy X i Y

$$(X \cdot Y)^{-1} = Y^{-1} \cdot X^{-1},$$

by napisać

$$\begin{aligned} M &= (B \cdot (B^{-1} \cdot A - D^{-1} \cdot C))^{-1} = (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1}, \\ K &= (D \cdot (D^{-1} \cdot C - B^{-1} \cdot A))^{-1} = (C - D \cdot B^{-1} \cdot A)^{-1}. \end{aligned}$$

W analogiczny sposób możemy wyjściowe dwa układy macierzowe rozwiązać ze względu na macierze L i N, otrzymując ostatcznie

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} & (C - D \cdot B^{-1} \cdot A)^{-1} \\ (B - A \cdot C^{-1} \cdot D)^{-1} & (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 19″
Niech U i V będą dwoma pozbiorami wektorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ zdefiniowanymi warunkami

$$U := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \right\},$$
$$V := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} : x_1 = x_2 = \ldots = x_n \right\}.$$

Pokazać, że U i V są podprzestrzeniami wektorowymi $\mathbb{R}^n$ oraz, że $U + V = U \oplus V = \mathbb{R}^n$. Podać jakieś bazy podprzestrzeni U i V i wyrazić wektory $\mathbf{e}_i$ kanonicznej (zero-jedynkowej) bazy $\mathbb{R}^n$ przez wybrane wektory baz przestrzeni U i V. Podać też jawnie odpowiednie macierze zmiany baz i sprawdzić, że są one wzajemnie odwrotne.
Rozwiązanie: To, że U i V są wektorowymi podprzestrzeniami jest oczywiste: wektor zerowy należy do każdej z nich, pomnożenie wektora z U (V) przez liczbę λ nie wyrzuca go z U (V), gdyż jeśli $x_1+x_2+\ldots+x_n = 0$ ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n$) to także $\lambda x_1+\lambda x_2+\ldots+\lambda x_n = 0$ ($\lambda x_1 = \lambda x_2 = \ldots = \lambda x_n$) i suma wektorów z U (z V) też należy do U (do V): jeśli $x_1+x_2+\ldots+x_n = 0$ i $y_1+y_2+\ldots+y_n = 0$ (jeśli $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ i $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$)

to także $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_n+y_n)=0$ $(x_1+y_1)=(x_2+y_2)=\ldots=(x_n+y_n)$. Jest też jasne, że $U\cap V=\{\mathbf{0}\}$, czyli że $U+V=U\oplus V$. Jako bazę U można wziąć wektory

$$\mathbf{f}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\cdot\\-1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{f}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\cdot\\-1\end{bmatrix},\qquad \ldots,\qquad \mathbf{f}_{n-1}=\begin{bmatrix}0\\\cdot\\0\\1\\-1\end{bmatrix},$$

(każdy wektor U jest jednoznaczną kombinacją liniową wektorów $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_{n-1}$), a bazą V może być wektor

$$\mathbf{f}_n=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\cdot\\1\end{bmatrix}.$$

Zatem $\dim U=n-1$, $\dim V=1$, a ponieważ $\dim(U\cap V)=0$, $\dim(U+V)=\dim(U\oplus V)=n$. Stąd już wynika, że $U+V=U\oplus V=\mathbb{R}^n$. Można też podać jawny wzór wyrażający dowolny (żywy) wektor $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ z $\mathbb{R}^n$ przez wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_{n-1}$ rozpinające U i wektor $\mathbf{f}_n$ rozpinający V. W tym celu należy rozwiązać równanie wektorowe

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\cdot\\a_n\end{bmatrix}=\lambda_1\mathbf{f}_1+\lambda_2\mathbf{f}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{f}_n\,,$$

czyli układ zwykłych równań

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_1 \qquad\qquad\qquad\qquad & +\lambda_n & =a_1\,,\\
\lambda_2 \qquad\qquad\qquad & +\lambda_n & =a_2\,,\\
\multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\\
\lambda_{n-1} & +\lambda_n & =a_{n-1}\,,\\
-\lambda_1-\lambda_2 \qquad\qquad -\lambda_{n-1} & +\lambda_n & =a_n\,.
\end{array}$$

Aby rozwiązać ten układ, dodajemy do ostatniego równania wszystkie poprzednie, co daje $\lambda_n=(a_1+\ldots+a_n)/n$. Pozostałe niewiadome λ_k o $1\le k<n$ są więc równe $\lambda_k=a_k-(a_1+\ldots+a_n)/n$. Każdy wektor z $\mathbb{R}^n$ daje się więc przedstawić jako jednoznaczna kombinacja liniowa wektorów $\mathbf{f}_1$, ..., $\mathbf{f}_{n-1}$ rozpinających U i wektora $\mathbf{f}_n$ rozpinającego V. Znalezione rozwiązanie pozwala też bez trudu wyrazić wektory $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ zero-jedynkowej

kanonicznej bazy p.w. $\mathbb{R}^n$ przez wektory $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-1}$ i $\mathbf{f}_n$: żywy wektor $\mathbf{e}_k$ ma liczby niezerową tylko liczbę $a_k = 1$. Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k &= \frac{1}{n}\left(-\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 \ldots - \mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{f}_n\right) + \mathbf{f}_k\,, \qquad 1 \le k < n\,, \\ \mathbf{e}_n &= \frac{1}{n}\left(-\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 \ldots - \mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{f}_n\right). \end{aligned}$$

i wzajemnie odwrotnymi (sprawdzić!) macierzami zmiany bazy są

$$R_{(f\leftarrow e)} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \ldots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \ldots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \ldots & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \qquad R_{(e\leftarrow f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 20
Sprawdzić, że wielomiany

$$\mathbf{w}_1 = x + 1\,, \qquad \mathbf{w}_2 = x - 1\,, \qquad \mathbf{w}_3 = x^2 + x\,,$$

tworzą bazę przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia nie większego niż dwa i znaleźć składowe w tej bazie wielomianu $\mathbf{v} = 2x^2 + 3x + 1$.
Rozwiązanie: Trzeba sprawdzić, że $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ są liniowo niezależne, czyli, że równość

$$\lambda_1\,\mathbf{w}_1 + \lambda_2\,\mathbf{w}_2 + \lambda_3\,\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}\,,$$

dla wszystkich wartości x zachodzi tylko gdy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. To widać (tu znów możemy operować na "żywych" wektorach): zachodzenie dla dowolnego x równości

$$\lambda_1\,(x+1) + \lambda_2\,(x-1) + \lambda_3\,(x^2+x) = (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,x + \lambda_3\,x^2 = 0\,,$$

wymaga by $\lambda_3 = 0$, oraz by $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ i $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. A to rzeczywiście zachodzi tylko dla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Czyli są liniowo niezależne. W ogólności nie wynika z tego jeszcze, tworzą bazę. Ponieważ jednak jest oczywiste, że wymiar rozpatrywanej przestrzeni jest równy 3 (bo 3 wielomiany 1, x oraz x^2 są bazą, jako że każdy wielomian stopnia niewyższego niż 3 jest w oczywisty sposób ich kombinacją liniową), to każde 3 liniowo niezależne wielomiany, w szczególności $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, tworzą bazę. Chcemy teraz napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = 2x^2 + 3x + 1 \;&=\; \mathbf{w}_1\,v^1_{(w)} + \mathbf{w}_2\,v^2_{(w)} + \mathbf{w}_3\,v^3_{(w)} \\ &=\; (x+1)\,v^1_{(w)} + (x-1)\,v^2_{(w)} + (x^2+x)\,v^3_{(w)}\,. \end{aligned}$$

Czyli $v^3_{(w)} = 2$ oraz $v^1_{(w)} + v^2_{(w)} + v^3_{(w)} = 3$ i $v^1_{(w)} - v^2_{(w)} = 1$. Stąd $v^1_{(w)} = 1$, $v^2_{(w)} = 0$. Istotnie:

$$1 \cdot (x+1) + 2 \cdot (x^2 + x) = 2x^2 + 3x + 1\,.$$

Zadanie 21

W pewnej bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ mają składowe $(1,2,1)$, $(2,3,3)$ oraz $(3,8,2)$, zaś wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ mają w tejże samej bazie składowe $(3,5,8)$, $(5,14,13)$ i $(1,9,2)$. Sprawdzić, że trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ lub trzy wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ także tworzą dwie inne bazy tej samej przestrzeni i znaleźć macierz przejścia z jednej z nich do drugiej.

Rozwiązanie: Tu z kolei nie wiemy, czym są w istocie te wektory i operujemy wyłącznie na składowych. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \ \ \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \ \mathbf{e}_3\,, \\
\mathbf{v}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3\,, \\
\mathbf{v}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 8\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3\,,
\end{aligned}$$

Drugie od 2×pierwszego: $2\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, czyli $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. To do pierwszego i trzeciego:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \ \ \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\,, \\
\mathbf{v}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 8\,\mathbf{e}_2 + 2\,(\mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\,,
\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}
3\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2\,, \\
4\,\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 10\,\mathbf{e}_2\,,
\end{aligned}$$

Teraz 3× pierwsze od drugiego i mamy $\mathbf{e}_2 = -5\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zatem

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= 3\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - 3(-5\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)\,, \\
\mathbf{e}_3 &= -5\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\,.
\end{aligned}$$

Tak więc trzy liniowo niezależne wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ udało się wyrazić przez trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= 18\,\mathbf{v}_1 - 4\,\mathbf{v}_2 - 3\,\mathbf{v}_3\,, \\
\mathbf{e}_2 &= -5\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,, \\
\mathbf{e}_3 &= -7\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,,
\end{aligned}$$

więc $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ też mogą być (są) bazą. W podobny sposób można wyrazić $\mathbf{e}_i$ także przez $\mathbf{w}_j$, ale już nie będziemy tu tego robić (w zasadzie trzeba by, aby dowieść, że $\mathbf{w}_j$ też są bazą). Mamy teraz związki (w konwencji sumacyjnej):

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_l\,[R_{v\leftarrow e}]^l{}_j\,, \qquad \mathbf{w}_i = \mathbf{e}_j\,[R_{e\leftarrow w}]^j{}_i\,.$$

$R_{v\leftarrow e}$ jest macierzą przejścia z bazy $\mathbf{e}_j$ do bazy $\mathbf{v}_l$, którą odczytujemy ze wzorów wyrażających wektory $\mathbf{e}_j$ przez wektory $\mathbf{v}_l$, a macierz $R_{e\leftarrow w}$ jest macierzą przejścia z bazy $\mathbf{w}_i$

do bazy $\mathbf{e}_j$, odwrotną do macierzy $R_{w\leftarrow e}$ przejścia z bazy $\mathbf{e}_j$ do bazy $\mathbf{w}_i$ (której tu nie wyliczyliśmy). Łącząc te wzory otrzymujemy

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_l \left[R_{v\leftarrow e}\right]^l{}_j \left[R_{e\leftarrow w}\right]^j{}_i \ .$$

Zatem jeśli $\mathbf{u} = \mathbf{w}_i\, u^i_{(w)}$, to $\mathbf{u} = \mathbf{v}_l\, u^l_{(v)}$, gdzie $u^l_{(v)} = \left[R_{v\leftarrow e}\right]^l{}_j \left[R_{e\leftarrow w}\right]^j{}_i\, u^i_{(w)}$, przy czym

$$R_{v\leftarrow e}\cdot R_{e\leftarrow w} = \begin{pmatrix} 18 & -5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 14 & 9 \\ 8 & 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Macierz ta jest oczywiście macierzą zmiany bazy $R_{v\leftarrow w}$.

Zadanie 22
Znaleźć składowe należącego do przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wektora

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

w bazie

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie znaleźć macierze przejścia z bazy $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$ do bazy "kanonicznej"

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i z powrotem. Znaleźć składowe wektora $\mathbf{v}$ w bazie kanonicznej.
Rozwiązanie: Tu znów wiemy, czym są "żywe" wektory. Trzeba rozwiązać układ $\mathbf{v} = x\,\mathbf{f}_1 + y\,\mathbf{f}_2 + z\,\mathbf{f}_3 + t\,\mathbf{f}_4$:

$$\begin{aligned} x + t &= 5\,, \\ -x + y &= 1\,, \\ -y + z &= 1\,, \\ -z + t &= 1\,. \end{aligned}$$

To się łatwo rozwiązuje bo z trzech ostatnich $t = 1 + z = 1 + 1 + y = 2 + 1 + x = 3 + x$. Czyli $2x + 3 = 5$ i $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$. Składowymi $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$ są liczby $(1, 2, 3, 4)$.

Teraz zmiana bazy. Zachodzi oczywisty związek $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j (R_{e\leftarrow f})^j{}_i$, czyli jawnie

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aby mieć to samo w drugą stronę trzeba albo odwrócić stojącą tu macierz (co umiemy już robić mechanicznie, ale to dobre dla wprawnych w robieniu "fiku-miku" na kolumnach lub wierszach - w tym ostatnim powinni być dobrzy poeci!), albo po prostu rozwiązać cztery równania (na szczęście są one proste). Pierwsze z nich, $\mathbf{e}_1 = x_1\,\mathbf{f}_1 + y_1\,\mathbf{f}_2 + z_1\,\mathbf{f}_3 + t_1\,\mathbf{f}_4$, daje układ

$$\begin{aligned} x_1 + t_1 &= 1\,, \\ -x_1 + y_1 &= 0\,, \\ -y_1 + z_1 &= 0\,, \\ -z_1 + t_1 &= 0\,, \end{aligned}$$

którego jednoznacznym rozwiązaniem są $x_1 = y_1 = z_1 = t_1 = \frac{1}{2}$ (widać gołym okiem, że to jest ok.). Drugie, $\mathbf{e}_2 = x_2\,\mathbf{f}_1 + y_2\,\mathbf{f}_2 + z_2\,\mathbf{f}_3 + t_2\,\mathbf{f}_4$, daje układ

$$\begin{aligned} x_2 + t_2 &= 0\,, \\ -x_2 + y_2 &= 1\,, \\ -y_2 + z_2 &= 0\,, \\ -z_2 + t_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

o rozwiązaniu $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = z_2 = t_2 = \frac{1}{2}$ (też widać, że to ok.). Trzecie $\mathbf{e}_3 = x_3\,\mathbf{f}_1 + y_3\,\mathbf{f}_2 + z_3\,\mathbf{f}_3 + t_3\,\mathbf{f}_4$, prowadzi do

$$\begin{aligned} x_3 + t_3 &= 0\,, \\ -x_3 + y_3 &= 0\,, \\ -y_3 + z_3 &= 1\,, \\ -z_3 + t_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

i ma rozwiązanie $x_3 = y_3 = -\frac{1}{2}$, $z_3 = t_3 = \frac{1}{2}$. Wreszcie, czwarte $\mathbf{e}_4 = x_4\,\mathbf{f}_1 + y_4\,\mathbf{f}_2 + z_4\,\mathbf{f}_3 + t_4\,\mathbf{f}_4$, czyli

$$\begin{aligned} x_4 + t_4 &= 0\,, \\ -x_4 + y_4 &= 0\,, \\ -y_4 + z_4 &= 0\,, \\ -z_4 + t_4 &= 1\,, \end{aligned}$$

daje $x_4 = y_4 = z_4 - \frac{1}{2}$, $t_4 = \frac{1}{2}$. Możemy więc napisać związek $\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_k \left[R_{f\leftarrow e}\right]^k{}_j$ jawnie:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)\, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy, że to jest istotnie macierz odwrotna

$$R_{f\leftarrow e} \cdot R_{e\leftarrow f} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Czyli jest ok. Teraz składowe $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{e}_i$. Mamy $\mathbf{v} = \mathbf{f}_i\, v^i_{(f)} = \mathbf{e}_j [R_{e\leftarrow f}]^j{}_i v^i_{(f)}$, czyli $v^j_{(e)} = [R_{e\leftarrow f}]^j{}_i\, v^i_{(f)}$. Jawnie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

co powinno było od początku być oczywiste.

Przypomnienie.
Odwzorowanie F z p. wektorowej V w inną (lub tę samą) p. wektorową W (oczywiście w ogólności przestrzenie V i W mogą mieć inne wymiary), $F : V \to W$ jest *liniowe* jeśli

$$F(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_1 F(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 F(\mathbf{v}_2)\,.$$

Zadanie działania takiego odwzorowania na (wszystkie) wektory bazy $\mathbf{e}_i$ p. V wyznacza jednoznacznie jego działanie na dowolny wektor $\mathbf{v}$ z tej przestrzeni.

Przykłady
i) Odwzorowanie $F : V \longrightarrow W$ dane wzorem $F(\mathbf{v}) = \mathbf{a}$, gdzie $\mathbf{v} \in V$, a $\mathbf{a}$ jest ustalonym wektorem z W nie jest liniowe; ii) $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{a}$ również nie jest; iii) odwzorowanie $F(\mathbf{v}) = \alpha \mathbf{v}$, gdzie α jest liczbą z ciała jest liniowe; iv) $F(\mathbf{v}) = (\mathbf{a}|\mathbf{v})\mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są ustalonymi wektorami, a $(\cdot|\cdot)$ jakimś iloczynem skalarnym[23] jest liniowe, v) zaś odwzorowanie $F(\mathbf{v}) = (\mathbf{a}|\mathbf{v})\mathbf{v}$ nie jest. Jeszcze inny przykład: niech $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ będzie przestrzenią wektorową funkcji odwzorowujących $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ (to jest przestrzeń wektorowa!). Niech F odwzorowuje V w V w taki sposób, że każdej funkcji $f \in V$ przypisuje funkcję

[23] O iloczynach skalarnych jeszcze nie było więc powiedzmy tu, że jest to maszynka, do której wsadza się dwa wektory i otrzymuje liczbę z ciała, przy czym maszynka ta działa liniowo (jak u Lema: "sepulki - patrz sepulkowanie, sepulkowanie - patrz sepulki", - przecież właśnie usiłujemy ustalić, co to znaczy "liniowe"...) względem każdego z tych wektorów.

$g \in V$ zdefiniowaną wzorem $g(x) = f(x+1) - f(x)$; w innym zapisie (zgodnym z bardzo właściwym widzeniem funkcji jako maszynek z dziurkami - dwiema, jeśli to są funkcje z $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - do pierwszej z których wrzuca się liczbę z $\mathbb{R}$ i otrzymuje z drugiej dziurki inną liczbę z $\mathbb{R}$) wygląda to tak: $F[f(\cdot)] = g(\cdot) \equiv f(\,\cdot + 1) - f(\cdot)$; kropka oznacza właśnie dziurkę do której wsadza się liczbę. Odwzorowanie F też jest liniowe.

Zwykle obraz wektora $\mathbf{v}$ przy liniowym odwzorowaniu F nazywa się wynikiem działania F na $\mathbf{v}$. Poza tym zamiast $F(\mathbf{v})$ pisze się zwykle $F \cdot \mathbf{v}$.

Zadanie 23
Czy odwzorowanie $V = \mathbb{R}^3$ w $W = \mathbb{R}^2$ zadane wzorem

$$H\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x+2)^2 - x - z - 4 \\ 4x + 2y + 6z \end{bmatrix}$$

jest odwzorowaniem liniowym? Jeśli jest, znaleźć jego macierz w kanonicznych zero-jedynkowych bazach $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$.
Rozwiązanie: Pytamy, czy

$$H\left(\lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) \equiv H\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 2)^2 - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) - 4 \\ 4(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + 6(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \end{bmatrix}$$

jest tym samym, co

$$\lambda_1 H\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + \lambda_2 H\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \lambda_1 \begin{bmatrix} (x_1+2)^2 - x_1 - z_2 - 4 \\ 4x + 2y + 6z \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} (x_2+2)^2 - x_2 - z_2 - 4 \\ 4x_2 + 2y_2 + 6z_2 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście nie jest, bo tu np. nie wystąpi wyraz $\lambda_1 \lambda_2 x_1 x_2$. To zamyka sprawę.

Zadanie 24
Wzór

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 3x_3 \end{bmatrix},$$

zadaje odwzorowanie liniowe przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ w nią samą: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie kanonicznej (zero-jedynkowej) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, oraz w bazie tworzonej przez trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,,\\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3\,,\\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3\,.\end{aligned}$$

Sprawdzić działanie otrzymanych macierzy na wektorze $\mathbf{w}$, który w bazie kanonicznej ma składowe $(3, 2, 1)$.

Rozwiązanie: W tym zadaniu mamy do czynienia z "żywymi" wektorami (kwadratowe nawiasy!), tj. mamy jawny przepis na znalezienie obrazu dowolnego wektora bez odniesienia do jakichkolwiek baz. Podanie macierzy jest więc tu sztuką dla sztuki. Ponieważ F odwzorowuje $\mathbb{R}^3$ w tę samą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ naturalne (ale nie obowiązkowe!) będzie znalezienie najpierw jego macierzy w tej samej kanonicznej zerojedynkowej bazie $\mathbf{e}_i$ "z obu stron" (co to znaczy, wyjaśni sie w dalszych zadaniach). Aby ten wybór był jasny będziemy tę macierz oznaczać $F_{(e)(e)}$. W celu znalezienia tej macierzy $F_{(e)(e)}$ odwzorowania liniowego F w jakiejś bazie (tu: w bazie kanonicznej) obliczamy (i to jest przepis ogólny!) F na wektorach tejże bazy i otrzymane wektory-obrazy rozkładamy znów w bazie (wektorowej przestrzeni, w którą F odwzorowuje):

$$\begin{aligned}F(\mathbf{e}_1) \equiv F\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,,\\ F(\mathbf{e}_2) \equiv F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} = 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,,\\ F(\mathbf{e}_3) \equiv F\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} = 3\,\mathbf{e}_3\,.\end{aligned}$$

Następnie otrzymane trójki liczb: $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$ oraz $(0, 0, 3)$ będące współczynnikami rozkładów wektorów $F(\mathbf{e}_i)$ na wektory bazy tej drugiej przestrzeni (która tu jest tą samą przestrzenią $\mathbb{R}^3$), tj. na wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$, stawiamy po kolei "na sztorc". Otrzymujemy w ten sposób macierz $F(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_j\,F^j(\mathbf{e}_i) \equiv \mathbf{e}_j\,[F_{(e)(e)}]^j{}_i$. Jawnie:

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Jeśli teraz chcemy znaleźć wartość F na wektorze $\mathbf{w}$ ("wartość" tzn. wektor będący obrazem $\mathbf{w}$ przy odwzorowaniu F) o składowych $(3, 2, 1)$ w bazie $\mathbf{e}_i$ (tj. wartość F na wektorze $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$), to działamy na te składowe macierzą $F_{(e)(e)}$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix},$$

czyli, w zapisie wskaźnikowym: $F(\mathbf{w}) = \mathbf{e}_i\, F^i(\mathbf{w}) = \mathbf{e}_i\, [F_{(e)(e)}]^i{}_j\, w^j_{(e)}$, tj. $F(\mathbf{w}) = 3\,\mathbf{e}_1 + 7\,\mathbf{e}_2 + 5\,\mathbf{e}_3$. Ponieważ tu mamy podany przepis, jak odwzorowanie F działa na żywe wektory, można ten sam wynik dostać bezpośrednio:

$$F\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3+2\cdot 2 \\ 2+3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = 3\,\mathbf{e}_1 + 7\,\mathbf{e}_2 + 5\,\mathbf{e}_3\,.$$

Teraz znajdziemy macierz odwzorowania F w tej drugiej bazie. Ponieważ znamy $\mathbf{v}_i$ jako kombinacje liniowe $\mathbf{e}_i$, mamy też od razu macierz przejścia $R_{e\leftarrow v}$:

$$R_{e\leftarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

a odwrotną do niej macierz $R_{v\leftarrow e}$ również nietrudno znaleźć (patrz zadania 18 i 19):

$$R_{v\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Działając na składowe wektorów w bazie $\mathbf{v}_i$ macierz $F_{(v)(v)}$ powinna dawać składowe obrazów tych wektorów w bazie $\mathbf{v}_i$. Zgodnie z logiką musi więc ona być dana iloczynem macierzy $R_{v\leftarrow e}\cdot F_{(e)(e)}\cdot R_{e\leftarrow v}$:

$$F_{(v)(v)} = R_{v\leftarrow e}\cdot F_{(e)(e)}\cdot R_{e\leftarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= R_{v\leftarrow e}\cdot F_{(e)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

"Po drodze" powstała macierz $F_{(e)(v)}$ (ta z jedenastką w prawym dolnym rogu; jest to właśnie macierz odwzorowania zapisana w różnych bazach "po obu stronach", co jest naturalne, gdy F odwzorowuje przestrzeń wektorową V w przestrzeń wektorową W inną niż V, ale co, gdy F odwzorowuje V w nią samą, jest pewną ekstrawagancją), którą skądinąd łatwo można dostać bezpośrednio działając odwzorowaniem F według podanego przepisu na "żywe" wektory $\mathbf{v}_i$ i rozkładając ich obrazy w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_i$:

$$F(\mathbf{v}_1) \equiv F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + 4\,\mathbf{e}_3\,,$$

$$F(\mathbf{v}_2) \equiv F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + 7\,\mathbf{e}_3\,,$$

$$F(\mathbf{v}_3) \equiv F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + 5\,\mathbf{e}_2 + 11\,\mathbf{e}_3\,.$$

Bezpośrednie znalezienie w ten sposób macierzy $F_{(v)(v)}$ wymaga dalszego rozłożenia wektorów po prawej stronie na wektory bazy $\mathbf{v}_i$. Zamiast tego łatwiej patrząc na już otrzymaną macierz $F_{(v)(v)}$ (tj. biorąc liczby z jej kolumn i tworząc z nimi kombinacje liniowe wektorów bazy $\mathbf{v}_i$) sprawdzić, że jest ona z tym, co by wyszło z tej procedury:

$$\begin{aligned}
0\,\mathbf{v}_1 - \,\mathbf{v}_2 + 2\,\mathbf{v}_3 &= 0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix},\\
-3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + 2\,\mathbf{v}_3 &= -3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\7\end{bmatrix},\\
-5\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + 4\,\mathbf{v}_3 &= -5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\5\\11\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Możemy też sprawdzić działanie otrzymanych macierzy $F_{(e)(v)}$ oraz $F_{(v)(v)}$ na składowe $w^i_{(v)}$ w bazie $\mathbf{v}_i$ wektora $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Składowe te, $w^1_{(v)}$, $w^2_{(v)}$ i $w^3_{(v)}$ w naszej notacji, należałoby dostać rozwiązując układ równań

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} w^1_{(v)} + \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} w^2_{(v)} + \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} w^3_{(v)} = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix},$$

(po prawej stoi żywy wektor $\mathbf{w}$), ale prościej jest wykorzystać znalezioną już macierz $R_{v\leftarrow e}$:

$$\begin{pmatrix}w^1_{(v)}\\w^2_{(v)}\\w^3_{(v)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w^1_{(e)}\\w^2_{(e)}\\w^3_{(e)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

(Można sprawdzić, że jest to rozwiązanie podanego układu równań). Możemy teraz sprawdzić działanie macierzy $F_{(e)(v)}$ na $w^i_{(v)}$:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\3&3&5\\4&7&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix},$$

czyli, że $F(\mathbf{w}) = 3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$, oraz $F_{(v)(v)}$ na $w^i_{(v)}$:

$$\begin{pmatrix}0&-3&-5\\-1&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-6\\4\end{pmatrix},$$

czyli $F(\mathbf{w}) = 5\mathbf{v}_1 - 6\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$, co oczywiście jest tym samym żywym wektorem:

$$5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}.$$

Uwaga: Tak jak składowe wektora $\mathbf{v}$ piszemy w tym skrypcie jako $v^i_{(e)}$ lub $v^i_{(f)}$, aby pamiętać, w jakiej bazie są to składowe, tak też i macierz odwzorowania liniowego opatrujemy[24] symbolami mówiącymi w jakich bazach jest ona dana. Zauważmy przy tym, że wprowadzona tu notacja jest niezwykle sugestywna: symbole przypominające, co jest w jakiej bazie oraz symbole na macierzach przejścia układają się w logiczne ciągi, nie pozostawiając miejsca na wątpliwości, przez jaką macierz, z której strony trzeba pomnożyć, by przejść z jednej bazy do drugiej.

Zadanie 25
W przestrzeni wszystkich odwzorowań $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ (matematycy oznaczają ją $\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ale jak ją zwał tak ją zwał..., w każdym razie jest to taka wieeeelka przestrzeń) podprzestrzeń wektorowa V jest rozpięta przez funkcje $f_1(x) = \sin x$ i $f_2(x) = \cos x$ (czyli to jest jakaś tam maciupeńka podprzestrzeń w tej wielkiej przestrzeni). Czy odwzorowanie wektorów tej podprzestrzeni zadane wzorem $F^\alpha[f(x)] \to f(x+\alpha)$ jest odwzorowaniem liniowym? Jeśli jest, to czy można podać jego macierz $F^\alpha_{(f)(f)}$ w bazie wektorów $f_i(x)$, $i = 1, 2$?
Rozwiązanie: Odwzorowanie F^α jest liniowe, bo

$$\begin{aligned} F^\alpha[\lambda_s \sin x + \lambda_c \cos x] &= \lambda_s \sin(x+\alpha) + \lambda_c \cos(x+\alpha) \\ &= \lambda_s F^\alpha[\sin x] + \lambda_c F^\alpha[\cos x]\,. \end{aligned}$$

Macierz $F^\alpha_{(f)(f)}$ w bazie wektorów $f_i(x)$, $i = 1, 2$ można podać tylko pod warunkiem, że F odwzorowuje podprzestrzeń V w nią samą (nie wyprowadza wektorów poza tę podprzestrzeń). Aby sprawdzić, czy tak jest, znajdujemy działanie F^α na wektory bazowe i patrzymy, czy wynik (obraz wektora $f_i(x)$) da się znów rozłożyć na te wektory. Okazuje się, że się da:

$$\begin{aligned} F^\alpha(\mathbf{f}_1) &\equiv F^\alpha[\sin x] = \sin(x+\alpha) = \cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x\,, \\ F^\alpha(\mathbf{f}_2) &\equiv F^\alpha[\cos x] = \cos(x+\alpha) = \cos\alpha \cos x - \sin\alpha \sin x\,. \end{aligned}$$

Zatem, stawiając współczynniki "na sztorc" (i pamiętając, że baza jest uporządkowana, najpierw $\sin x$ potem $\cos x$),

$$F^\alpha_{(f)(f)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Zadanie 25′
Odwzorowanie $F : V \to V$ trójwymiarowej przestrzeni V, której bazę stanowią wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$, w tę samą przestrzeń V jest zadane wzorem

$$F(\mathbf{v}) = \mathbf{a}\, S(\mathbf{v}|\mathbf{a})\,,$$

w którym $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$, a $S(\cdot|\cdot)$ jest iloczynem skalarnym (o którym ogólniej będzie dalej), tj. funkcją "połykającą" dwa wektory i dającą w zamian liczbę z ciała, którym jest tu $\mathbb{R}$.;

[24] Przynajmniej dopóki jesteśmy w algebraicznym "przedszkolu".

funkcja ta, jako że jest biliniowa, tzn. liniowa w każdym ze swoich argumentów jest na użytek tego zadania zdefiniowana “szkolnym” wzorem

$$S(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}\,.$$

(Symbol δ_{ij}, czyli delta Kroneckera, już w tym skrypcie był). Napisać macierz $F_{(e)(e)}$ odwzorowania F w bazie $\mathbf{e}_i$.

Rozwiązanie: Zgodnie z przepisem z Zadania 25 znajdujemy działanie F na wektory bazy $\mathbf{e}_i$:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{e}_1) &= (\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3)\,S(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3\,,\\
F(\mathbf{e}_2) &= (\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3)\,S(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}\,,\\
F(\mathbf{e}_3) &= (\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3)\,S(\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3) = -2\,\mathbf{e}_1 + 4\,\mathbf{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Dalej zgodnie z tymże przepisem, współczynniki rozkładu w bazie $\mathbf{e}_i$ otrzymanych wektorów (obrazów wektorów bazowych) stawiamy na “sztorc”:

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 25″

Napisać macierz odwzorowania liniowego F: $\mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathbb{M}_{2\times 2}$ (tj. odwzorowującego przestrzeń wektorową $\mathbb{M}_{2\times 2}$ macierzy M wymiaru 2×2 o rzeczywistych elementach w nią samą) zadanego wzorem $F(M) = X\cdot M$, w którym

$$X = \begin{bmatrix} a & b\\ c & d \end{bmatrix}.$$

w “kanonicznej” bazie[25] tworzonej przez cztery zero-jedynkowe macierze

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad .$$

Rozwiązanie: Postępujemy standardowo:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{m}_1) &= \begin{bmatrix} a & b\\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0\\ c & 0 \end{bmatrix} = a\,\mathbf{m}_1 + c\,\mathbf{m}_3\,,\\
F(\mathbf{m}_2) &= \begin{bmatrix} a & b\\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a\\ 0 & c \end{bmatrix} = a\,\mathbf{m}_2 + c\,\mathbf{m}_4\,,\\
F(\mathbf{m}_3) &= \begin{bmatrix} a & b\\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0\\ d & 0 \end{bmatrix} = b\,\mathbf{m}_1 + d\,\mathbf{m}_3\,,\\
F(\mathbf{m}_4) &= \begin{bmatrix} a & b\\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b\\ 0 & d \end{bmatrix} = b\,\mathbf{m}_2 + d\,\mathbf{m}_4\,.
\end{aligned}$$

[25] Piszemy macierze w kwadratowych nawiasach, gdyż są one tu “żywymi” wektorami z przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Stawiając na "sztorc" współczynniki rozkładu obrazów wektorów bazowych m_i na wektory bazowe znajdujemy

$$F_{(m)(m)} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Zadanie 25‴

Niech V_n będzie przestrzenią wektorową wielomianów stopnia $\leq n$ i niech odwzorowanie F będzie operacją wzięcia pochodnej wielomianu: $F[W(x)] = W'(x)$. Traktując tu F jak odwzorowanie V_n w V_n podać jego macierz $F_{(e)(e)}$ w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_k = x^k$ uporządkowanej następująco: $(\mathbf{e}_n,\ \mathbf{e}_{n-1}, \dots, \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_0)$ oraz macierz $F_{(f)(f)}$ tego samego odwzorowania w (uporządkowanej) bazie

$$\mathbf{f}_0 = 1\,, \qquad \mathbf{f}_1 = x - 1\,, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2!}(x-1)^2 \qquad \dots \qquad \mathbf{f}_n = \frac{1}{n!}(x-1)^n\,.$$

Rozwiązanie: Jak łatwo sprawdzić,

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Istotnie: w rozpatrywanej bazie ogólny wielomian $W(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ ma składowe $(a_n,\, a_{n-1}, \dots, a_1,\, a_0)$, a $F[W]$ ma składowe $(0,\, na_n,\, (n-1)a_{n-1}, \dots, a_1)$, które oczywiście dostaje się działając podaną tu macierzą na składowe $(a_n,\, a_{n-1}\,, \dots, a_1,\, a_0)$. A gdyby wektory bazy uszeregować odwrotnie, tj. $(\mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1},\ \mathbf{e}_n)$, to macierz $F_{(e)(e)}$ miałaby postać

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Działając odwzorowaniem F na wektory bazy $\mathbf{f}_k$ znajdujemy, że $F(\mathbf{f}_k) = \mathbf{f}_{k-1}$ (przy czym $F(\mathbf{f}_0) = \mathbf{0}$, czyli tak jakby $\mathbf{f}_{-1} \equiv \mathbf{0}$). Stąd macierz F w bazie $(\mathbf{f}_0,\ \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-1},\ \mathbf{f}_n)$, ma postać

$$F_{(f)(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy na koniec że de facto F odwzorowuje V_n w V_{n-1} w związku z czym, jeśli potraktować F w ten sposób, to macierz $F_{(f)(f)}$ będzie wymiaru $(n-1)\times n$, tj. będzie miała o jeden (ostatni, zerowy) wiersz mniej (macierz $F_{(e)(e)}$ spłaszczyłaby się zaś o pierwszy zerowy wiersz).

Zadanie 26

Mamy przestrzeń wektorową wielomianów stopnia ≤ 3. Definiujemy odwzorowanie F z tej przestrzeni w przestrzeń wektorową wielomianów stopnia ≤ 2 wzorem

$$F[W(x)] = W'(x) + x^2 W(0) + 12x \int_0^1 dt\, W(t)\,.$$

Sprawdzić, czy odwzorowanie F jest liniowe. Jeśli tak, to znaleźć jego macierz w bazach kanonicznych $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 i $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2, gdzie $\mathbf{e}_n \equiv x^n$.

Rozwiązanie: F jest liniowe bo jeśli $W(x) = \alpha_1 W^{(1)}(x) + \alpha_2 W^{(2)}(x)$ to

$$\begin{aligned} F[W(x)] &= \frac{d}{dx}[\alpha_1 W^{(1)}(x) + \alpha_2 W^{(2)}(x)] + x^2[\alpha_1 W^{(1)}(0) + \alpha_2 W^{(2)}(0)] \\ &\qquad + 12x \int_0^1 dt\, [\alpha_1 W^{(1)}(t) + \alpha_2 W^{(2)}(t)] \\ &= \alpha_1 \frac{d}{dx} W^{(1)}(x) + \alpha_1 x^2 W^{(1)}(0) + \alpha_1\, 12x \int_0^1 dt\, W^{(1)}(t) \\ &\qquad + \alpha_2 \frac{d}{dx} W^{(2)}(x) + \alpha_2 x^2 W^{(2)}(0) + \alpha_2\, 12x \int_0^1 dt\, W^{(2)}(t) \\ &= \alpha_1 F[W^{(1)}(x)] + \alpha_2 F[W^{(2)}(x)]\,. \end{aligned}$$

Teraz możemy znaleźć macierz odwzorowania F w bazach kanonicznych. Dowolny wielomian stopnia ≤ 3 jest postaci:

$$\mathbf{W} = \mathbf{e}_0 W^0_{(e)} + \mathbf{e}_1 W^1_{(e)} + \mathbf{e}_2 W^2_{(e)} + \mathbf{e}_3 W^3_{(e)} \equiv W^0_{(e)} + W^1_{(e)} x + W^2_{(e)} x^2 + W^3_{(e)} x^3\,.$$

gdzie $W^i_{(e)} \in \mathbb{R}$ są składowymi wielomianu $\mathbf{W}$ w bazie $\mathbf{e}_i$. Co F robi z wektorów bazowych?

$$\begin{aligned} F[\mathbf{e}_0] \equiv F[1] &= x^2 + 12x = 12\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\ F[\mathbf{e}_1] \equiv F[x] &= 1 + 6x = \mathbf{e}_0 + 6\,\mathbf{e}_1\,, \\ F[\mathbf{e}_2] \equiv F[x^2] &= 6x = 6\,\mathbf{e}_1\,, \\ F[\mathbf{e}_3] \equiv F[x^3] &= 3x^2 + 3x = 3\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2\,. \end{aligned}$$

Z liniowości F mamy więc (w konwencji sumacyjnej: powtarzające się wskaźniki są wysumowane):

$$F[\mathbf{W}] = F[\mathbf{e}_i]\, W^i_{(e)} = \mathbf{e}_k\, [F_{(e)(e)}]^k{}_i\, W^i_{(e)}\,,$$

gdzie $\mathbf{e}_k[F_{(e)(e)}]^k{}_i = F[\mathbf{e}_i]$. Korzystając ze znalezionego wyżej działania F na wektory bazy $\mathbf{e}_i$ łatwo znajdujemy macierz $[F_{(e)(e)}]^k{}_i$ (k numeruje jej wiersze, a i kolumny) odwzorowania F:

$$[F_{(e)(e)}]^k{}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy jak to działa. Niech $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$. Działanie F na $\mathbf{W}$ możemy łatwo znaleźć bezpośrednio ze wzoru:

$$F[\mathbf{W}] = 6x^2 - 6x + x^2 \cdot 7 + 12x \int_0^1 dt\, (2t^3 - 3t^2 + 7) = 72x + 13x^2 = 72\, \mathbf{e}_1 + 13\, \mathbf{e}_2\,.$$

Składowymi $W^i_{(e)}$ wielomianu-wektora $\mathbf{W}$ w bazie $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ są

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Działając na te składowe macierzą $[F_{(e)(e)}]^k{}_i$ dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \\ 13 \end{pmatrix},$$

czyli istotnie składowe $X^k_{(e)}$ wielomianu $\mathbf{X} = F[\mathbf{W}]$ w bazie $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Przypomnienie.
Obrazem[26] (im$F$) odwzorowania liniowego $F\ : V \to W$ nazywa się zbiór wszystkich wektorów $\mathbf{w} \in W$, dla których istnieje taki wektor $\mathbf{v} \in V$, że $\mathbf{w} = F(\mathbf{v})$. *Jądro* (ker$F$) odwzorowania liniowego F tworzą wszystkie te wektory $\mathbf{v} \in V$, na których F daje zero (tzn. przeprowadza je na wektor zerowy przestrzeni W).[27] Zarówno obraz, jak i jądro F

[26] Nie mylić symbolu "im" z częścią urojoną (oznaczaną "Im") liczby zespolonej!

[27] Jeden z naszych kolegów - *nomina sunt odiosa*, jak mówili w takich przypadkach starożytni Rzymianie - z którym miewałem przyjemność wykładać studentom ten "Początek algebraicznego mocarstwa" (patrz rozdział XVII niezwykle zajmujących *Wykładów z historii matematyki* M. Kordosa) zasłynął usilnym wtłaczaniem w studenckie głowy pojęcia *kojądra*. Ponieważ mimo uprawiania przez ponad 30 lat fizyki teoretycznej spotkałem się tylko z jądrami kobaltu ^{60}Co (byłyżby to owe kojądra?!), które pani C.S. Wu posłużyły do przeprowadzenia przełomowego doświadczenia dowodzącego naruszenia przez oddziaływania słabe parzystości, wysunąłem konstruktywną propozycję wysłania tego kolegi w ramach reedukacji fizycznej natychmiast w kosmos i to z napędem kojądrowym!

są podprzestrzeniami wektorowymi odpowiednio przestrzeni W i przestrzeni V. Zachodzi też związek

$$\dim V = \dim(\ker F) + \dim(\mathrm{im} F)\,.$$

Zadanie 27

Znaleźć jądro (ker) i obraz (im) odwzorowania F trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V w inną (a może tę samą - nie jest to istotne) przestrzeń wektorową W mającą również wymiar 3; w bazach $\mathbf{v}_i \in V$ i $\mathbf{w}_i \in W$ macierz F ma postać

$$F_{(w)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Znajdźmy najpierw jądro. Szukamy zatem wszystkich takich wektorów $\mathbf{u} = \mathbf{v}_i\, u^i_{(v)}$, że $F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Jest to równoważne żądaniu, by

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1_{(v)} \\ u^2_{(v)} \\ u^3_{(v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

czyli, by

$$\begin{aligned} u^1_{(v)} + 2\,u^2_{(v)} + 3\,u^3_{(v)} &= 0\,, \\ 4\,u^1_{(v)} + 5\,u^2_{(v)} + 6\,u^3_{(v)} &= 0\,, \\ 7\,u^1_{(v)} + 8\,u^2_{(v)} + 9\,u^3_{(v)} &= 0\,. \end{aligned}$$

Odejmując od trzeciego trzy razy pierwsze, a od drugiego dwa razy pierwsze dowiadujemy się, że $2\,u^1_{(v)} + u^2_{(v)} = 0$, a stąd, po wstawieniu tego do pierwszego, że $u^3_{(v)} = u^1_{(v)}$. Zatem wszystkie wektory jądra są postaci

$$\lambda\,(\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \equiv \lambda\,\mathbf{j} \in \ker F\,,$$

z dowolnym czynnikiem λ. Zatem $\dim(\ker F) = 1$, co oznacza, że $\dim(\mathrm{im} F) = 2$.

Szukamy następnie obrazu ($\mathrm{im} F$), czyli pytamy, jakie wektory $\mathbf{t} = \mathbf{w}_i\, t^i_{(w)}$ daje się otrzymać z jakiegoś $\mathbf{u} \in V$. Inaczej mówiąc, dla jakich $t^i_{(w)}$ istnieją jakieś $u^i_{(v)}$, z którymi spełniony jest związek

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1_{(v)} \\ u^2_{(v)} \\ u^3_{(v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^1_{(w)} \\ t^2_{(w)} \\ t^1_{(w)} \end{pmatrix},$$

lub, co równoważne, spełniony jest układ równań

$$\begin{aligned} u^1_{(v)} + 2\,u^2_{(v)} + 3\,u^3_{(v)} &= t^1_{(w)}\,, \\ 4\,u^1_{(v)} + 5\,u^2_{(v)} + 6\,u^3_{(v)} &= t^2_{(w)}\,, \\ 7\,u^1_{(v)} + 8\,u^2_{(v)} + 9\,u^3_{(v)} &= t^3_{(w)}\,. \end{aligned}$$

Znów odejmując od trzeciego trzy razy pierwsze, a od drugiego dwa razy pierwsze dostajemy równania:

$$\begin{aligned} 2\,u^1_{(v)} + \quad u^2_{(v)} &= t^2_{(w)} - 2\,t^1_{(w)}\,, \\ 4\,u^1_{(v)} + 2\,u^2_{(v)} &= t^3_{(w)} - 3\,t^1_{(w)}\,. \end{aligned}$$

Widać z nich, że aby istniało jakieś rozwiązanie, składowe wektora $\mathbf{t}$ (w bazie $\mathbf{w}_i$) muszą spełniać związek $2\,t^2_{(w)} - 4\,t^1_{(w)} = t^3_{(w)} - 3\,t^1_{(w)}$, czyli $t^1_{(w)} - 2\,t^2_{(w)} + t^3_{(w)} = 0$. Jeśli jest on spełniony, to możemy rozwiązywać dwa pierwsze równania (drugie przerobione jak wyżej)

$$\begin{aligned} u^1_{(v)} + 2\,u^2_{(v)} + 3\,u^3_{(v)} &= t^1_{(w)}\,, \\ 2\,u^1_{(v)} \;+\; u^2_{(v)} \qquad\qquad &= t^2_{(w)} - 2\,t^1_{(w)}\,. \end{aligned}$$

Widać, że dla dowolnego $u^3_{(v)}$ (i dowolnych $t^1_{(w)}$ i $t^2_{(w)}$) można tak dobrać $u^1_{(v)}$ i $u^2_{(v)}$, by te równania były spełnione. Zatem jeśli składowe $t^i_{(w)}$ (w bazie wektorów $\mathbf{w}_i$) wektora $\mathbf{t} \in W$ spełniają związek

$$t^1_{(w)} - 2\,t^2_{(w)} + t^3_{(w)} = 0\,,$$

to $\mathbf{t}$ jest obrazem jakiegoś wektora z V. Co więcej, wektor, którego $\mathbf{t}$ jest obrazem, nie jest wyznaczony jednoznacznie; wynika to jasno choćby z tego, że można sobie wybrać dowolne $u^3_{(v)}$ i znaleźć rozwiązania na $u^1_{(v)}$ i $u^2_{(v)}$. Jest to oczywiście związane z tym, że jądro odwzorowania, $\mathrm{ker}F$, jest nietrywialne (nietrywialne tzn. zawierające więcej niż tylko wektor zerowy!). Ponieważ składowe wektora $\mathbf{t}$, który może być obrazem jakiegoś $\mathbf{u}$ wiąże tylko jeden warunek, $\mathrm{im}F$ jest podprzestrzenią $3-1=2$ wymiarową; jako jej bazę można wybrać np. liniowo niezależne wektory

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3\,, \qquad \mathbf{h}_2 = \mathbf{w}_2 + 2\,\mathbf{w}_3\,,$$

których składowe (w bazie $\mathbf{w}_i$) spełniają powyższy warunek.

Alternatywnym spojrzeniem na problem wyznaczenia obrazu F jest zauważenie że skoro $F(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_j\,[F_{(w)(v)}]^j{}_i$, to każdy wektor należący do obrazu odwzorowania F ma zawsze postać jakiejś kombinacji liniowej wektorów

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \mathbf{w}_j\,[F_{(w)(v)}]^j{}_1 = \mathbf{w}_1 + 4\,\mathbf{w}_2 + 7\,\mathbf{w}_3\,, \\ \mathbf{n}_2 &= \mathbf{w}_j\,[F_{(w)(v)}]^j{}_2 = 2\,\mathbf{w}_1 + 5\,\mathbf{w}_2 + 8\,\mathbf{w}_3\,, \\ \mathbf{n}_3 &= \mathbf{w}_j\,[F_{(w)(v)}]^j{}_3 = 3\,\mathbf{w}_1 + 6\,\mathbf{w}_2 + 9\,\mathbf{w}_3\,, \end{aligned}$$

i problem wyznaczenia wymiaru obrazu odwzorowania F sprowadza się do wybrania liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{n}_i$ (wiemy przy tym, że trzy wektory $\mathbf{w}_i$ są liniowo niezależne, bo tworzą bazę). To zaś jest równoważne sprawdzeniu, czy kolumny macierzy $F_{(w)(v)}$ potraktowane jak wektory z $\mathbb{R}^3$ są liniowo zależne, czy nie, a jeśli tak, to ile z nich jest liniowo niezależnych (wtedy te liniowo niezależne kolumny przemnożone odpowiednio przez wektory $\mathbf{w}_i$ stanowią dobrą bazę podprzestrzeni $\mathrm{im}F$). Z wykonanych już w tym zadaniu rachunków łatwo zobaczyć, że tylko dwa z wektorów $\mathbf{n}_i$ są liniowo niezależne bo np. $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_1 + 2\mathbf{n}_2$. Zatem jako bazę im$F$ można przyjąć $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$. Łatwo też zobaczyć, że $\mathbf{n}_1 = \mathbf{h}_1 + 4\mathbf{h}_2$ i $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{h}_1 + 5\mathbf{h}_2$, czyli $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ rzeczywiście rozpinają tę samą podprzestrzeń im$F$.

Zadanie 27′

Znaleźć jądro (ker) i obraz (im) odwzorowania F z czterowymiarowej przestrzeni V w nią samą zadanego jej bazie $\mathbf{e}_i$ macierzą

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Nietrudno zobaczyć (gołym okiem!), że macierz $F_{(e)(e)}$ daje zera, gdy działa na kolumienki

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zatem jądro ker$F$ rozpinają dwa liniowo niezależne (widać, że one takie są!) wektory

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\,, \qquad \mathbf{j}_2 = \mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\,.$$

Stąd dim ker$F$ = 2, a więc dim im$F$ = dim$V$− dim ker$F$ = 4 − 2 = 2. Aby znaleźć wektory (już wiemy, że muszą być dwa) rozpinające obraz im$F$ (jeśli weźmiemy dwa takie, to będą one bazą im$F$) wystarczy zauważyć, że kolumienki składowych wektorów będących obrazami F są kombinacjami liniowymi kolumienek $\mathbf{C}_i$ (zarówno kolumienki składowych wektorów jak i kolumienki macierzy możemy przez chwilę potraktować jak wektory z $\mathbb{R}^4$) macierzy $F_{(e)(e)}$

$$\begin{pmatrix} t^1_{(e)} \\ t^2_{(e)} \\ t^3_{(e)} \\ t^4_{(e)} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_1 v^1_{(e)} + \mathbf{C}_2 v^2_{(e)} + \mathbf{C}_3 v^3_{(e)} + \mathbf{C}_4 v^4_{(e)}\,,$$

gdzie $v^i_{(e)}$ są składowymi wektora $\mathbf{v}$, na który działa F. Z kolei z tego, że jądro rozpinają podane wyżej wektory $\mathbf{j}_1$ i $\mathbf{j}_2$ wynika, że jako wektory cztery kolumienki $\mathbf{C}_i$ są liniowo zależne; liniowo niezależne są tylko dwie z nich: np. $\mathbf{C}_2$ i $\mathbf{C}_3$. Zatem wszystkie kolumienki-wektory składowych wektorów będących obrazami F można dostać także jako kombinacje liniowe tylko kolumienek $\mathbf{C}_2$ i $\mathbf{C}_3$ macierzy $F_{(e)(e)}$. Stąd już wynika, że za wektory rozpinające im$F$ można np. przyjąć wektory

$$\mathbf{o}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \qquad \mathbf{o}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\,,$$

tj. kombinacje liniowe wektorów bazy, współczynnikami których to kombinacji są elementy kolumienek $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ macierzy $F_{(e)(e)}$.

Jest pouczające sprawdzenie, że rzeczywiście wektory $\mathbf{o}_1$ i $\mathbf{o}_2$ rozpinają cały obraz F. W tym celu działamy na składowe dowolnego wektora $a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3 + d\,\mathbf{e}_4$ z V macierzą $F_{(e)(e)}$ i pytamy, czy otrzymany w wyniku tego odwzorowania wektor $(a+b+c+d)\mathbf{e}_1 + (a+c+2d)\mathbf{e}_2 + (a+2b+c)\mathbf{e}_3 + (b-d)\mathbf{e}_4$ jest, przy dowolnych a, b, c i d, kombinacją liniową $\mathbf{o}_1$ i $\mathbf{o}_2$, czyli, czy można zawsze tak dobrać współczynniki α i β, by zachodziła równość

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+d)\,\mathbf{e}_1 + (a+c+2d)\,\mathbf{e}_2 + (a+2b+c)\,\mathbf{e}_3 + (b-d)\,\mathbf{e}_4 &= \alpha\,\mathbf{o}_1 + \beta\,\mathbf{o}_2 \\
&\equiv \alpha\,(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \beta\,(\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)\,.
\end{aligned}
$$

Po przyrównaniu współczynników przy tych samych wektorach bazy sprowadza się to do pytania, czy przy dowolnych a, b, c i d istnieją takie α i β, że spełnione są równości

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta &= a+b+c+d\,, \\
\alpha &= a+c+2d\,, \\
\alpha + 2\beta &= a+2b+c\,, \\
\beta &= b-d\,.
\end{aligned}
$$

I rzeczywiście tak jest: równania drugie i trzecie wyznaczają α i β, które spełniają też równania pierwsze i trzecie.

Zadanie 28

Znaleźć jądro (ker) i obraz (im) odwzorowania F z Zadania 26.

Rozwiązanie: Jądro jest to w tym przypadku podprzestrzeń liniowa przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 tworzona przez takie wielomiany $W(x)$, że $F[W(x)] = \mathbf{0}$ (zero $\mathbf{0}$ oczywiście rozumiane jako wektor-wielomian zerowy). Niech $W(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zobaczymy, jakie muszą być współczynniki a_3, a_2, a_1, a_0, żeby $W(x)$ należał do jądra F. Zażądajmy by

$$
F[\mathbf{W}] = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 + a_0x^2 + 12x\left(\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0\right) = \mathbf{0}\,.
$$

Wymaga to, by $a_1 = 0$, $3a_3 + a_0 = 0$ oraz $3a_3 + 6a_2 + 6a_1 + 12a_0 = 0$, czyli by cztery współczynniki a_i spełniały trzy równania. Przyjmijmy a_0 za niezależną wielkość. Wtedy $a_3 = -\frac{1}{3}a_0$ i $a_2 = -\frac{11}{6}a_0$. Zatem jądro odwzorowania F jest w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 podprzestrzenią jednowymiarową rozpiętą przez wektor o składowych

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{11}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},
$$

w bazie $\mathbf{e}_n = x^n$, takiej jak w Zadaniu 26. Możemy teraz skorzystać ze znalezionej tam macierzy $[F_{(e)(e)}]^j{}_i$ odwzorowania F by sprawdzić, że istotnie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\frac{11}{6}\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dla dowolnego λ. Zatem do jądra odwzorowania F należą wektory-wielomiany postaci

$$\lambda(\mathbf{e}_0 - \frac{11}{6}\,\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\,\mathbf{e}_3) = \lambda(1 - \frac{11}{6}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3)\,.$$

Jeśli zaś chodzi o to, jak obraz odwzorowania F ma się do przestrzeni wielomianów, to odpowiedź zależy od trochę akademickiego problemu, co uznamy za przestrzeń wektorową, w którą wielomiany stopnia ≤ 3 odwzorowuje F. Jeśli umówimy się, że jest to przestrzeń wielomianów stopnia ≤ 2, to musimy zbadać, czy każdy wielomian postaci $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ jest F-obrazem jakiegoś wielomianu stopnia ≤ 3. W tym celu musimy zbadać, czy układ równań

$$\begin{aligned} a_1 \qquad\qquad\qquad &= b_0 \\ 4a_0 + 2a_1 + 2a_2 + a_3 &= \frac{1}{3}b_1 \\ a_0 \qquad\qquad + 3a_3 &= b_2\,, \end{aligned}$$

ma rozwiązanie względem a_i, dla zupełnie dowolnych b_i. Z pierwszego a_1 musi być równe b_0, to następnie do drugiego i przenosimy na drugą stronę. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} 4a_0 + 2a_2 + a_3 &= -2b_0 + \frac{1}{3}b_1 \\ 4a_0 \qquad + 12a_3 &= 4b_2\,, \end{aligned}$$

i stąd $2a_2 - 11a_3 = -2b_0 + \frac{1}{3}b_1 - 4b_2$. Wybrawszy dowolnie np. a_3 mamy stąd, dla dowolnych b_0, b_1 i b_2, wyznaczone potrzebne a_2, a z pozostałych równań a_1 i a_0. Jak więc widać rozwiązanie zawsze istnieje, czyli obrazem F, tj. $\mathrm{im}F$, jest cała przestrzeń wielomianów stopnia ≤ 2. To, że rozwiązanie jest niejednoznaczne (tylko $2a_2 - 11a_3$ jest wyznaczone), tzn. ten sam wielomian stopnia ≤ 2 można dostać jako obraz F z różnych wielomianów stopnia ≤ 3 jest oczywistym wnioskiem w tego, że $\mathrm{ker}F$ jest nietrywialne, tzn. nie składa się wyłącznie z wektora (wielomianu) zerowego.

Oczywiście jeśli dla jakiegoś kaprysu zechcemy uznać, że F odwzorowuje wielomiany stopnia ≤ 3 w przestrzeń wektorową wielomianów stopnia $\leq n$ o $n \geq 3$, to oczywiście $\mathrm{im}F$ już nie będzie całą tą przestrzenią, bo np. wielomianu $W = 5x^3$ nie da się nijak za pomocą F z wielomianu stopnia ≤ 3 otrzymać.

Zadanie 29
Niech wektory $\mathbf{f}_0 = 1 + x$, $\mathbf{f}_1 = x + x^2$, $\mathbf{f}_2 = x^2 + x^3$, $\mathbf{f}_3 = x^3$ będą inną bazą przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia ≤ 3 (można sprawdzić, że istotnie są one bazą). Znaleźć tej bazie macierz odwzorowania F z Zadania 26. Wyznaczyć także postać wektorów-wielomianów należących do jądra odwzorowania F.
Uwaga: w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 trzymamy starą, "kanoniczną" bazę $\mathbf{e}_n = x^n$, tj. chcemy by nowa macierz odwzorowania F działając na składowe wielomianu stopnia ≤ 3 w bazie $\mathbf{f}_k$ dawała składowe odpowiedniego wielomianu stopnia ≤ 2 w bazie $\mathbf{e}_n$.
Rozwiązanie: To zadanie możemy wykonać posługując się bezpośrednio procedurą wyznaczania macierzy w danych bazach obu przestrzeni: po prostu działamy po kolei odwzorowaniem F na nowe bazowe wektory-wielomiany $\mathbf{f}_i$ i wynik takiego działania rozpisujemy w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{f}_0) \equiv \; F(1+x) &= 1 + x^2 + 12x\,\frac{3}{2} = \mathbf{e}_0 + 18\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\
F(\mathbf{f}_1) \equiv \; F(x+x^2) &= 1 + 2x + 12x\,\frac{5}{6} = \mathbf{e}_0 + 12\,\mathbf{e}_1 \\
F(\mathbf{f}_2) \equiv F(x^2+x^3) &= 2x + 3x^2 + 12x\,\frac{7}{12} = 9\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 \\
F(\mathbf{f}_3) \equiv \quad F(x^3) &= 3x^2 + 12x\,\frac{1}{4} = 3\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2\,.
\end{aligned}$$

Stąd od razu, stawiając odpowiednie współczynniki na sztorc, dostajemy

$$F_{(e)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

W celach pedagogicznych otrzymamy teraz $F_{(e)(f)}$ innym sposobem. Będziemy potrzebować macierzy przejścia $R_{e\leftarrow f}$ z bazy $\mathbf{f}_k$ do bazy $\mathbf{e}_n$ odwrotnej do macierzy $R_{f\leftarrow e}$ przejścia z bazy $\mathbf{e}_n$ do bazy $\mathbf{f}_k$. Tę pierwszą, tu właśnie potrzebną, $R_{e\leftarrow f}$, znajdziemy łatwo bo mamy

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_0 &= \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1\,, \\
\mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\
\mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \\
\mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Stąd

$$(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

czyli, w zapisie na wskaźniczkach, $\mathbf{f}_k = \mathbf{e}_j\,[R_{e\leftarrow f}]^j{}_k$. Jeśli mamy teraz dany wektor (wielomian) $\mathbf{v}$ w postaci $\mathbf{v} = \mathbf{f}_j\,v^j_{(f)}$ (gdzie $v^j_{(f)}$ są składowymi $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{f}_j$), to[28]

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}_k\,v^k_{(f)} = \mathbf{e}_j\,[R_{e\leftarrow f}]^j{}_k\,v^k_{(f)} \equiv \mathbf{e}_j\,v^j_{(e)}\,,$$

gdzie $v^j_{(e)} = [R_{e\leftarrow f}]^j{}_k\,v^k_{(f)}$. Niech teraz $\mathbf{u} = F[\mathbf{v}]$. Macierz odwzorowania F zapisana "z obu stron" w bazach kanonicznych $\mathbf{e}_n$, zarówno w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 jak i wielomianów stopnia ≤ 2, działa tak, że jeśli $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i\,u^i_{(e)}$, to

$$\mathbf{e}_i\,u^i_{(e)} = F[\mathbf{v}] = F[\mathbf{e}_k]\,v^k_{(e)} = \mathbf{e}_i\,[F_{(e)(e)}]^i{}_k\,v^k_{(e)}\,.$$

Wyrażając tu $v^k_{(e)}$ przez $v^j_{(f)}$ za pomocą macierzy $[R_{e\leftarrow f}]^k{}_j$ dostajemy

$$\mathbf{e}_i\,u^i_{(e)} = \mathbf{e}_i\,[F_{(e)(e)}]^i{}_k\,[R_{e\leftarrow f}]^k{}_j\,v^j_{(f)}\,.$$

Tak więc składowe w bazie $\mathbf{e}_i$ wielomianu $\mathbf{u}$ (otrzymywanego jako obraz wielomianu $\mathbf{v}$ przy odwzorowania liniowym F) ze składowych $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{f}_j$ daje nam macierz

$$[F_{(e)(f)}]^i{}_j = [F_{(e)(e)}]^i{}_k\,[R_{e\leftarrow f}]^k{}_j\,.$$

Jawnie macierzowo:

$$F_{(e)(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście jest to ta sama macierz, którą już otrzymaliśmy na początku.

Sprawdźmy teraz to wszystko na wielomianie $W = 2x^3 - 3x^2 + 7$, który już nam służył za przykład w zadaniu 26. Zapiszmy go najpierw w bazie $\mathbf{f}_i$. W tym celu wyrażamy najpierw wektory $\mathbf{e}_i$ przez $\mathbf{f}_j$. Idąc "od dołu" mamy: $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3$, etc. Łatwo więc znajdujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3\,, \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3\,, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3\,, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_3\,. \end{aligned}$$

Znaleźliśmy zatem macierz $R_{f\leftarrow e}$

$$R_{f\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

[28]Zdaje się, że się powtarzam. Ale to nic: "powtarienija - mat' uczenija", jak mówią tam, gdzie nas będą wywozić (a wtedy znajomość tego pięknego języka się przyda...).

odwrotną do $R_{e\leftarrow f}$. Istotnie,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz rozłożyć wektor $\mathbf{W}$ w bazie $\mathbf{f}_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = 2\,\mathbf{e}_3 - 3\,\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_0 &= 2\,\mathbf{f}_3 - 3\,(\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) + 7\,(\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) \\ &= 7\,\mathbf{f}_0 - 7\,\mathbf{f}_1 + 4\,\mathbf{f}_2 - 2\,\mathbf{f}_3\,. \end{aligned}$$

W bazie $\mathbf{f}_i$ wielomian W ma więc składowe

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Jeśli na te składowe podziałamy macierzą $F_{(e)(f)}$ to dostaniemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \\ 13 \end{pmatrix},$$

czyli to samo, co poprzednio (bo to co wychodzi to mają być składowe $F[\mathbf{W}]$ w tej samej bazie, co poprzednio, czyli w bazie $\mathbf{e}_i$).

Wektory należące do jądra odwzorowania F muszą mieć takie składowe $V^i_{(f)} \equiv a_i$, na których zeruje się macierz $F_{(e)(f)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nietrudno ustalić, przyjmując np. składową $a_0 \equiv \lambda$ jako dowolną, że są to wektory o składowych $a_1 = -\lambda$, $a_2 = -\frac{5}{6}\lambda$, $a_3 = \frac{1}{2}\lambda$, czyli wektory-wielomiany postaci

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 - \frac{5}{6}\,\mathbf{f}_2 + \frac{1}{2}\,\mathbf{f}_3) &= \lambda\,[1 + x - (x + x^2) - \frac{5}{6}(x^2 + x^3) + \frac{1}{2}x^3] \\ &\equiv \lambda\,[1 - \frac{11}{6}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3]\,, \end{aligned}$$

takiej samej, jak ustaliliśmy to w Zadaniu 28. Oczywiście te same składowe $V^0_{(f)} = \lambda$, $V^1_{(f)} = -\lambda$, $V^2_{(f)} = -\frac{5}{6}\,\lambda$ $V^3_{(f)} = \frac{1}{2}\,\lambda$, można było też otrzymać działając macierzą $R_{f\leftarrow e}$ na składowe $V^0_{(e)} = \lambda$, $V^1_{(e)} = 0$, $V^2_{(e)} = -\frac{11}{6}\,\lambda$ $V^3_{(e)} = -\frac{1}{3}\,\lambda$ znalezione w Zadaniu 28.

Zadanie 30
Zapisać macierz odwzorowania F z zadań 26 i 29 w bazie $\mathbf{e}_n = x^n$, $n = 0, 1, 2, 3$ przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia ≤ 3 oraz w bazie $\mathbf{g}_j$, $j = 0, 1, 2$ danej wzorami

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_0 &= \mathbf{e}_0 + 2\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2\,,\\ \mathbf{g}_1 &= \phantom{\mathbf{e}_0 + {}} 3\,\mathbf{e}_1 + 4\,\mathbf{e}_2\,,\\ \mathbf{g}_2 &= \phantom{\mathbf{e}_0 + 3\,\mathbf{e}_1 + {}} 2\,\mathbf{e}_2\,,\end{aligned}$$

(tj. w bazie tworzonej przez wielomiany $\mathbf{g}_0 = 1 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_1 = 3x + 4x^2$ i $\mathbf{g}_2 = 2x^2$) bedącej bazą przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2.
Rozwiązanie: Znów musimy znaleźć macierz przejścia z bazy $\mathbf{e}_n$ do bazy $\mathbf{g}_j$. Z trzeciego związku mamy $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\,\mathbf{g}_2$. Z drugiego wtedy $3\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1 - 2\,\mathbf{g}_2$. W końcu

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{g}_0 - \frac{2}{3}(\mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2) - \frac{3}{2}\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_0 - \frac{2}{3}\mathbf{g}_1 - \frac{1}{6}\mathbf{g}_2\,.$$

Ostatecznie więc mamy

$$(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

czyli $\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_i\,[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j$ oraz

$$(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

czyli $\mathbf{e}_k = \mathbf{g}_j\,[R_{g\leftarrow e}]^j{}_k$. Musi oczywiście być $\mathbf{e}_k = \mathbf{g}_j\,[R_{g\leftarrow e}]^j{}_k = \mathbf{e}_i\,[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j\,[R_{g\leftarrow e}]^j{}_k$, czyli $[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j\,[R_{g\leftarrow e}]^j{}_k = \delta^i{}_k$. Można to jawnie sprawdzić:

$$R_{e\leftarrow g}\cdot R_{g\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

Podobnie powinno być $\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_i\,[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j = \mathbf{g}_k\,[R_{g\leftarrow e}]^k{}_i\,[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j$, tj. $[R_{g\leftarrow e}]^k{}_i\,[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j = \delta^k{}_j$:

$$R_{g\leftarrow e}\cdot R_{e\leftarrow g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Możemy teraz zapisywać sobie związek $\mathbf{u} = F[\mathbf{v}]$ w dowolnych bazach:

$$\mathbf{e}_i\,u^i_{(e)} = \mathbf{e}_i\,[F_{(e)(e)}]^i{}_j\,v^j_{(e)}\,, \qquad \text{czyli} \qquad u^i_{(e)} = [F_{(e)(e)}]^i{}_j\,v^j_{(e)}\,,$$

lub, wyrażając $\mathbf{e}_i$ przez $\mathbf{g}_j$,

$$\mathbf{g}_j\,[R_{g\leftarrow e}]^j{}_i\,[F_{(e)(e)}]^i{}_j\,v^j_{(e)} \equiv \mathbf{g}_j\,[F_{(g)(e)}]^j{}_j\,v^j_{(e)}\,, \qquad \text{czyli} \qquad u^i_{(g)} = [F_{(g)(e)}]^i{}_j\,v^j_{(e)}\,,$$

gdzie $[F_{(g)(e)}]^i{}_j = [R_{g\leftarrow e}]^i{}_k\,[F_{(e)(e)}]^k{}_j$. Jawnie (macierz $F_{(e)(e)}$ jest podana w zadaniach 26 i 28):

$$F_{(g)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Można też mieć macierz odwzorowania F w bazie $\mathbf{f}_k$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 i bazie $\mathbf{g}_j$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2. W tym celu trzeba $v^j_{(e)}$ zapisać jako $v^j_{(e)} = [R_{e\leftarrow f}]^j{}_k v^k_{(f)}$, co da $[F_{(g)(f)}]^j{}_k = [F_{(g)(e)}]^j{}_l\,[R_{e\leftarrow f}]^l{}_k$, czyli jawnie (biorąc macierz $[R_{e\leftarrow f}]^l{}_k$ z poprzedniego zadania)

$$F_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{3} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tę samą macierz $F_{(g)(f)}$ można także otrzymać z macierzy $F_{(e)(f)}$ znalezionej w poprzednim zadaniu: $[F_{(g)(f)}]^j{}_k = [R_{g\leftarrow e}]^j{}_l\,[F_{(e)(f)}]^l{}_k$ czyli

$$F_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{3} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy to wszystko na naszym wielomianie $W = 2x^3 - 3x^2 + 7$, który w bazie $\mathbf{e}_j$ miał składowe $(7, 0, -3, 2)$. Działając na te składowe macierzą $F_{(g)(e)}$ dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -\frac{83}{2} \end{pmatrix},$$

to jest składowe $F[\mathbf{W}]$ w bazie $\mathbf{g}_j$. Zatem

$$F[\mathbf{W}] = 0\cdot\mathbf{g}_0 + 24\cdot\mathbf{g}_1 - \frac{83}{2}\cdot\mathbf{g}_2 = 24\cdot(3x + 4x^2) - \frac{83}{2}\cdot(2x^2) = 72x + 13x^2\,,$$

tak, jak być powinno ($F[\mathbf{W}]$ jest wektorem i nie może zależeć od wyboru baz, które są czymś pomocniczym jedynie). Podobnie, działając macierzą $F_{(g)(f)}$ na znalezione w poprzednim zadaniu składowe $(7, -7, 4, -2)$ naszego wielomianu W w bazie $\mathbf{f}_j$ otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{2} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -\frac{83}{2} \end{pmatrix},$$

czyli te same składowe $F[\mathbf{W}]$ w bazie $\mathbf{g}_j$.

Zadanie 31
Pewne odwzorowanie liniowe G z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$ jest takie, że

$$G\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix},\qquad G\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix},\qquad G\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ tego odwzorowania w bazie kanonicznej

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Znaleźć także wynik działania

$$G\left(\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\right).$$

Rozwiązanie: Dla porządku trzeba najpierw sprawdzić, czy wektory

$$\mathbf{f}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{f}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{f}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},$$

na których zadane jest działanie G, są liniowo niezależne. Jeśli są, to rozpinają całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ i mogą być jej bazą. W takim przypadku zadanie odwzorowania G na tych trzech wektorach wyznacza już działanie G na każdy wektor z przestrzeni będącej dziedziną G, bo każdy wektor z tej dziedziny można zapisać jako kombinację liniową trzech wektorów, na których działanie G jest znane. Gdyby się okazało (ale się nie okaże), że trzy wektory $\mathbf{f}_i$, na których działanie G jest zadane, są liniowo zależne, to trzeba by sprawdzić, czy takie zdefiniowanie G jest niesprzeczne, tzn. czy spełniona jest liniowość; nie dałoby się jednak wtedy znaleźć całej macierzy odwzorowania G w żadnej bazie. Niemniej, nawet jeśli trzy wektory $\mathbf{f}_i$ nie rozpinałyby całej dziedziny G, nie przekreślałoby to z góry możliwości znalezienia wartości G na podanym w zadaniu wektorze: mogłoby się bowiem okazać, że akurat ten wektor jest liniową kombinacją tych, na których G jest zadane. Dopiero, gdyby ten wektor nie był liniowo zależny od tych, na których działanie G jest zadane, druga część zadania nie mogłaby być rozwiązana.

Zatem do dzieła! Równanie $\lambda_1\mathbf{f}_1+\lambda_2\mathbf{f}_2+\lambda_3\mathbf{f}_3=\mathbf{0}$ daje układ równań

$$\begin{aligned}\lambda_1+\ \lambda_2-\lambda_3 &= 0\,,\\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 &= 0\,,\\ \lambda_1-\ \lambda_2 \qquad &= 0\,.\end{aligned}$$

Z trzeciego $\lambda_2 = \lambda_1$ do pierwszego i drugiego, co da układ dwu równań $2\lambda_1 - \lambda_3 = 0$ oraz $3\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, czyli $5\lambda_1 = 0$ etc. Widać, że jedynym rozwiązaniem jest $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, czyli wektory $\mathbf{f}_i$ są liniowo niezależne. To samo możemy sprawdzić gdy chodzi o wektory

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Równanie $\xi_1\mathbf{g}_1 + \xi_2\mathbf{g}_2 + \xi_3\mathbf{g}_3 = \mathbf{0}$ daje układ równań

$$\begin{aligned} 3\xi_1 - \ \xi_2 - \ \xi_3 &= 0\,, \\ 2\xi_1 + \ \xi_2 + \ \xi_3 &= 0\,, \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 - 3\xi_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

który też ma tylko rozwiązanie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, czyli - jak się tego kiedyś dowiemy - odwzorowanie G jest *nieosobliwe* bo przeprowadza $\mathbb{R}^3$ w całe $\mathbb{R}^3$ (ma więc trywialne jądro do którego należy tylko wektor zerowy). Zatem w bazach: $\mathbf{f}_i$ przestrzeni wektorów odwzorowywanych i $\mathbf{g}_j$ przestrzeni wektorów będących wynikiem odwzorowania, macierz G ma postać trywialną

$$G_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że jeśli $G[\mathbf{v}] = \mathbf{w}$ i $\mathbf{v} = \mathbf{f}_i\, v^i_{(f)}$, a $\mathbf{w} = \mathbf{g}_j\, w^j_{(g)}$, to macierz $G_{(g)(f)}$ robi składowe $w^i_{(g)}$ ze składowych $v^i_{(f)}$ według przepisu: $w^j_{(g)} = [G_{(g)(f)}]^j{}_i\, v^i_{(f)}$, czyli tu po prostu $w^j_{(g)} = v^j_{(f)}$.

Jeśli teraz $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_k\, [R_{e\leftarrow f}]^k{}_i$ to $v^k_{(e)} = [R_{e\leftarrow f}]^k{}_i\, v^i_{(f)}$ i odwrotnie, $v^i_{(f)} = [R_{f\leftarrow e}]^i{}_k\, v^k_{(e)}$. W podobny sposób, jeśli $\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_k\, [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i$, to $w^k_{(e)} = [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i\, w^i_{(g)}$ i odwrotnie, $w^i_{(g)} = [R_{g\leftarrow e}]^i{}_k\, w^k_{(e)}$. Jeśli więc znajdziemy macierze $[R_{e\leftarrow g}]$ i $[R_{f\leftarrow e}]$, to będziemy mogli napisać

$$\begin{aligned} w^k_{(e)} = [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i\, w^i_{(g)} &= [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i\, [G_{(g)(f)}]^i{}_j v^j_{(f)} \\ &= [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i\, [G_{(g)(f)}]^i{}_j\, [R_{f\leftarrow e}]^j{}_l\, v^l_{(e)} \equiv [G_{(e)(e)}]^k{}_l\, v^l_{(e)}\,. \end{aligned}$$

Zatem $[G_{(e)(e)}]^k{}_l = [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i\, [G_{(g)(f)}]^i{}_j\, [R_{f\leftarrow e}]^j{}_l$. Aby więc znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ odwzorowania G w bazie kanonicznej trzeba znaleźć macierze $[R_{e\leftarrow g}]$ oraz $[R_{f\leftarrow e}]$. Pierwsza jest banalna, bo mamy dane wektorki $\mathbf{g}_i = F[\mathbf{f}_i]$: np. $\mathbf{g}_1 = 3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3$, etc. Stąd

$$[R_{e\leftarrow g}] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Podobnie banalnie jest dana macierz $[R_{e\leftarrow f}]$:

$$[R_{e\leftarrow f}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ale my potrzebujemy $[R_{f\leftarrow e}]$. Musimy więc rozwiązać układ równań wektorowych

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \\
\mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\,, \\
\mathbf{f}_3 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,.
\end{aligned}$$

Od drugiego odjąć pierwsze: $\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$. Do drugiego dodać trzecie: $3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$. Dalej już łatwo:

$$\begin{aligned}
3\,\mathbf{e}_2 - 6\,\mathbf{e}_3 &= 3\,\mathbf{f}_2 - 3\,\mathbf{f}_1\,, & \qquad \mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\,, \\
3\,\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3\,, & \qquad 6\,\mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3 &= 2\,\mathbf{f}_2 + 2\,\mathbf{f}_3\,.
\end{aligned}$$

Stąd: $5\,\mathbf{e}_3 = 3\,\mathbf{f}_1 - 2\,\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ oraz $5\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\,\mathbf{f}_3$ i teraz $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{5}(5\,\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - 2\,\mathbf{f}_3 - 3\,\mathbf{f}_1 + 2\,\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)$. Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{5}\,(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_3)\,, \\
\mathbf{e}_2 &= \frac{1}{5}\,(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3)\,, \\
\mathbf{e}_3 &= \frac{1}{5}\,(3\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3)\,,
\end{aligned}$$

czyli macierz $R_{f\leftarrow e}$ ma postać

$$[R_{f\leftarrow e}] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aby sprawdzić, czy się nie pomyliliśmy w rachunkach i przećwiczyć mnożenie macierzy sprawdzamy

$$[R_{e\leftarrow f}]\cdot[R_{f\leftarrow e}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

W drugą stronę też można sprawdzić:

$$[R_{f\leftarrow e}]\cdot[R_{e\leftarrow f}] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No to świetnie. Zatem możemy już znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ odwzorowania G w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_i$: $[G_{(e)(e)}]^k{}_l = [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i [G_{(g)(f)}]^i{}_j [R_{f\leftarrow e}]^j{}_l = [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i [R_{f\leftarrow e}]^i{}_l$ ponieważ $[G_{(g)(f)}]^i{}_j = \delta^i{}_j$. Czyli macierzowo

$$G_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wspomniana wyżej nieosobliwość odwzorowania G odbija się w tym, że wyznacznik

$$\det(G_{(e)(e)}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \ ,$$

czyli jest różny od zera. Ten sam wniosek wynikał już z postaci $G_{(g)(f)}$ ($\det(G_{(g)(f)}) = 1$ po prostu), bo - jak kiedyś się dowiemy - $\det(G_{(e)(e)}) = \det(R_{e\leftarrow g} \cdot G_{(g)(f)} \cdot R_{f\leftarrow e}) = \det(R_{e\leftarrow g}) \cdot \det(G_{(g)(f)}) \cdot \det(R_{f\leftarrow e})$, a macierze zmiany bazy są zawsze nieosobliwe, tj. $\det(R_{e\leftarrow g}) \neq 0$ i $\det(R_{f\leftarrow e}) \neq 0$. Jeśli więc macierz odwzorowania liniowego (w dowolnych bazach) jest macierzą kwadratową o niezerowym wyznaczniku, to jądro odwzorowania jest trywialne (można więc w celu sprawdzenia tego obliczać - jak się już umie - wyznacznik macierzy odwzorowania). Jeśli jednak macierz odwzorowania nie jest kwadratowa, to wyznacznik całej tej macierzy nie jest zdefiniowany i w celu sprawdzenie jądra trzeba badać liniową (nie)zależność kolumn macierzy odwzorowania (co - jak się tego dowiemy dalej - też można robić wyznacznikami, ale nie całej macierzy, tylko pewnych jej podmacierzy kwadratowych).

Gdy mamy już $[G_{(e)(e)}]$ w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_1$, $i = 1, 2, 3$, to możemy łatwo znaleźć działanie G na wektor

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

W bazie kanonicznej ma on oczywiste składowe $(2, 0, -1)$ a zatem składowe wektora $G(\mathbf{w})$ w bazie kanonicznej są dane przez

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Innym (szybszym) sposobem znalezienia $G(\mathbf{w})$ jest rozłożenie $\mathbf{w}$ w bazie wektorów $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2, 3$, na których działanie G zostało zadane, tzn. znalezienie współczynników y_i, $i = 1, 2, 3$ we wzorze

$$y_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y_3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Łatwy rachunek daje $y_1 = -\frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{4}{5}$, $y_3 = -\frac{7}{5}$. Zatem korzystając z liniowości odwzorowania G możemy napisać:

$$\begin{aligned} G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) &= -\frac{1}{5}G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \frac{4}{5}G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) - \frac{7}{5}G\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{7}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tak jak poprzednio.

To co zrobiliśmy w ostatnim punkcie podpowiada pewien szybki sposób znajdowania macierzy odwzorowania $G_{(e)(e)}$ (podobny do podanego na końcu Zadania 17 sposobu znajdowania macierzy przejścia z bazy do bazy). Rozłóżmy ogólny wektor z $\mathbb{R}^3$ na trzy liniowo niezależne wektory $\mathbf{f}_i$, na których działanie odwzorowania G jest znane. Dość łatwo znajdujemy, że

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{5}(a+b+3c)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(a+b-2c)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(-3a+2b+c)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Działając zatem na ten ogólny wektor odwzorowaniem G możemy, tak jak wyżej, napisać:

$$G\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}(a+b+3c)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(a+b-2c)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(-3a+2b+c)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Zbierając to do kupy mamy

$$G\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5a+0b+10c \\ 0a+5b+5c \\ 15a+0b-5c \end{bmatrix}.$$

Ekstrahując zurück ogólny wektor możemy prawą stronę przedstawić w postaci

$$G\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Wciągając $1/5$ widzimy, że otrzymaliśmy macierz $G_{(e)(e)}$. Jest tu jednak pewna pojęciowa trudność polegająca na tym, że (zgodnie z przyjętym przez nas sposobem zapisu) liczby w kwadratowych nawiasach oznaczają "żywe" wektory z $\mathbb{R}^n$ (a nie ich składowe), a macierz odwzorowania powinna być macierzą w jakiejś bazie. Tu oczywiście, ponieważ "żywy" wektor z $\mathbb{R}^n$ wygląda dokładnie tak, jak jego składowe w kanonicznej zero-jedynkowej bazie, należałoby najpierw zapisać przedostatnią równość w postaci

$$G\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5a+0b+10c \\ 0a+5b+5c \\ 15a+0b-5c \end{pmatrix}$$

i czytać ją: "działając na wektor, którego składowymi w kanonicznej zero-jedynkowej bazie $\mathbb{R}^3$ są (a,b,c) odwzorowanie G daje taki wektor z $\mathbb{R}^3$, którego składowymi są równe $(5a+0b+10c, 0a+5b+5c, 15a+0b-5c)$." Po czym zrobić to co zrobiliśmy wyżej i uzyskać macierz, która wobec tego jest macierzą $G_{(e)(e)}$ odwzorowania G w kanonicznych zero-jedynkowych bazach (z "obu stron").

Zadanie 32
O odwzorowaniu liniowym H z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$ wiadomo, że

$$H\left(\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\qquad H\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix},\qquad H\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\3\\-8\end{bmatrix}.$$

Znaleźć wynik działania odwzorowania H na wektor

$$\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\end{bmatrix}.$$

Czy da sie znaleźć macierz $H_{(e)(e)}$ tego odwzorowania np. w bazie kanonicznej (zero-jedynkowej)?

Rozwiązanie: Zadanie to ma zilustrować uwagi poczynione na początku rozwiązania poprzedniego zadania. Nietrudno sprawdzić, że trzeci z wektorów, na których znane jest działanie odwzorowania H, jest liniowo zależny od dwu pierwszych:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Trzeba więc najpierw sprawdzić, czy rzeczywiście jest to odwzorowanie liniowe. Na szczęście jest:

$$H\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right)=H\left(\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\right)+3H\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\\-8\end{bmatrix}.$$

Ponieważ znamy działanie H tylko na dwa liniowo niezależne wektory, a przestrzeń jest trójwymiarowa, więc zadanie mogłoby nie dać się rozwiązać. Ale się daje, bo akurat

$$\mathbf{v}\equiv\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Zatem

$$H\left(\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\end{bmatrix}\right)=-H\left(\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\right)+2H\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=-\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\2\\-7\end{bmatrix}.$$

Oczywiście wektor $\mathbf{v}$ możnaby rozłożyć inaczej na trzy wektory, na których działanie H jest zadane. Najogólniej:

$$\mathbf{v}\equiv\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\end{bmatrix}=(\alpha-1)\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}+(3\alpha+2)\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}-\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},$$

(dodaliśmy tu do $\mathbf{v}$ wektor zerowy zapisany jako $\alpha(\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) = \mathbf{0}$). Można sprawdzić, że niezależnie od wartości α, która jest tu dowolna, otrzyma się to samo $G(\mathbf{v})$, co wyżej.

Jako że nie znamy działania H na wystarczajacej liczbie liniowo niezależnych wektorów, powinno być jasne, że nie uda się podać całej macierzy tego odwzorowania (w żadnej bazie). Jeśli do dwu pierwszych (liniowo niezależnych) wektorów $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$, na których zadane jest działanie H dokooptować jakiś trzeci $\mathbf{f}_3$ - dowolny, byle od $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ liniowo niezależny, a do dwu wektorów $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$ będących H-obrazami $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ też dokooptować jakiś trzeci $\mathbf{g}_3$ liniowo niezależny od $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$, to można powiedzieć tyle, że w tak utworzonych bazach $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ oraz $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ macierz odwzorowania H ma postać:

$$H_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}.$$

O jej elementach oznaczonych znakami zapytania nic nie możemy powiedzieć (są one współczynnikami w rozkładzie $H(\mathbf{f}_3)$ na $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ i $\mathbf{g}_3$). Jeśli przejść do innych baz, np. do kanonicznych, to po pomnożeniu $H_{(g)(f)}$ z lewej i z prawej strony przez odpowiednie macierze przejścia, nieznane elementy $H_{(g)(f)}$ "rozpropagują" się po całej macierzy i naogół nie będziemy znać żadnego z jej elementów.

Zadanie 33

Odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ działając na trzy wektory

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

daje

$$F(\mathbf{f}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{g}_1\,, \qquad F(\mathbf{f}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{g}_2\,, \qquad F(\mathbf{f}_3) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{g}_3\,.$$

Znaleźć, jeśli to możliwe postać macierzy $F_{(e)(e)}$ tego odwzorowania w bazach kanonicznych (zero-jedynkowych).

Rozwiązanie: Po pierwsze sprawdzamy, czy trzy wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$ są liniowo niezależne. Są. Mogą więc stanowić bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Następnie sprawdzamy, czy trzy wektory $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ oraz $\mathbf{g}_3$ są liniowo niezależne. Oczywiście nie są: $\mathbf{g}_3 = 3\mathbf{g}_1$. Czy tak może być? tzn. czy odwzorowanie F jest naprawdę liniowe? Z liniowości wynika, że gdyby trzy wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$ były liniowo zależne, to ich obrazy, tj. trzy wektory $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ oraz $\mathbf{g}_3$ też musiałyby być liniowo zależne (zob. uwagi w rozwiązaniu zadania 31). Na szczęście w drugą stronę stwierdzenie nie zachodzi: z liniowej zależności wektorów $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ *nie wynika* liniowa zależność wektorów $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$. Jeśli jądro $\mathrm{ker}F$ odwzorowania F jest nietrywialne (tj. nie składa się wyłącznie z wektora zerowego), to istnieją jakieś wektory $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, takie że $F(\mathbf{j}) = \mathbf{0}$. Wówczas

$$F(\mathbf{f}_1 + \lambda\mathbf{j}) = F(\mathbf{f}_1) + \lambda F(\mathbf{j}) = F(\mathbf{f}_1)\,,$$

ale same wektory $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_1 + \lambda\,\mathbf{j}$ są liniowo niezależne (muszą być, bo gdyby były liniowo zależne, to $\mathbf{f}_1$ by musiał należeć do jądra) i tak też musi być w rozpatrywanym tu przypadku.[29]

Możemy teraz dokooptować jakiś wektor $\mathbf{g}_3'$, który jest liniowo niezależny od $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$ i razem z tymi dwoma będzie tworzyć drugą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Może to być dowolny wektor

$$\mathbf{g}_3' = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

pod warunkiem, że $a + b + c \neq 0$ (jest to warunek liniowej niezależności $\mathbf{g}_3'$ od $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$ znaleziony najprostszą metodą tj. wyznacznikową - będzie dalej). W bazach $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3')$ i $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ macierz odwzorowania F ma postać

$$F_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z kolei macierz $F_{(e)(e)}$ otrzymamy obliczając iloczyn macierzy:

$$F_{(e)(e)} = R_{e\leftarrow g} \cdot F_{(g)(f)} \cdot R_{f\leftarrow e}\,.$$

Musimy więc znaleźć macierze przejścia $R_{e\leftarrow g}$ oraz $R_{f\leftarrow e}$. Tę pierwszą mamy "za darmo", bo

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3') = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 1 & -3 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Występująca tu macierz jest właśnie macierzą $R_{e\leftarrow g}$. Aby zaś znaleźć macierz $R_{f\leftarrow e}$ musimy odwrócić oczywiste związki

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 \phantom{{}+2\,\mathbf{e}_2} + 3\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_1 + 4\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Odejmując od trzeciego pierwsze mamy natychmiast $\mathbf{e}_2$. Wstawiając tak wyznaczone $\mathbf{e}_2$ do pierwszego i drugiego otrzymujemy rwnania na $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_3$, które już łatwo rozwiązać. W ten sposób znajdujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 6\,\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - 3\,\mathbf{f}_3 \\ \mathbf{e}_2 &= -\frac{1}{2}\,\mathbf{f}_1 \phantom{{}-\mathbf{f}_2} + \frac{1}{2}\,\mathbf{f}_3 \\ \mathbf{e}_3 &= -4\,\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\,\mathbf{f}_3\,. \end{aligned}$$

[29]Zauważmy, że jest to typowa sytuacja, gdy F odwzorowuje wektory z p.w. V w wektory z p.w. W o wymiarze mniejszym niż wymiar V (tj., gdy $\dim W < \dim V$).

Mamy więc już wszystkie potrzebne elementy:

$$F_{(e)(e)} = R_{e\leftarrow g} \cdot F_{(g)(f)} \cdot R_{f\leftarrow e} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 1 & -3 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} .$$

Jak widać i jak się należało spodziewać, dowolne elementy wektora $\mathbf{g}_3'$ nie wejdą do końcowej postaci macierzy $F_{(e)(e)}$. Wykonując ostatnie mnożenie macierzy, znajdujemy, że

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Mając $F_{(e)(e)}$ nietrudno znaleźć składowe $j^i_{(e)}$ wektora $\mathbf{z}$ należącego do jądra (in fatti, rozpinającego w tym przypadku całe ker$F$), a tym samym jego jawną postać $\mathbf{j} = \mathbf{e}_i\, j^i_{(e)}$:

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker F .$$

Oczywiście $\mathbf{f}_3 = 3\,\mathbf{f}_1 - 2\,\mathbf{j}$.

Macierz $F_{(e)(e)}$ można też znaleźć prościej, bez konstruowania dodatkowego wektora $\mathbf{g}_3'$, stosując tę samą sztuczkę, co już w kilku poprzednich zadaniach. Rozkładamy mianowicie dowolny wektor $[\alpha, \beta, \gamma]$ na wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = (6\alpha - \frac{1}{2}\beta - 4\gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-\alpha + \gamma) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + (-3\alpha + \frac{1}{2}\beta + 2\gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

co po skorzystaniu z liniowości oraz z tego, że w zerojedynkowej bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wektory mają składowe równe odpowiednim swoim pięterkom (jako żywe wektory) pozwala napisać, że

$$F_{(e)(e)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = (6\alpha - \frac{1}{2}\beta - 4\gamma) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\alpha + \gamma) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3\alpha + \frac{1}{2}\beta + 2\gamma) \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \beta - \gamma \\ \gamma - \alpha \end{pmatrix} ,$$

skąd już łatwo odczytać macierz $F_{(e)(e)}$, która ma oczywiście postać znalezioną wyżej.

Zadanie 34
Odwzorowanie liniowe $F : V \to W$ odwzorowuje wektory o składowych

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix},$$

w bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$ przestrzeni V odpowiednio w wektory o składowych

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

w bazie $\mathbf{g}_i$, $i = 1, 2, 3$ przestrzeni W. Podać macierz tego odwzorowania. Wyznaczyć jego jądro i obraz.
Rozwiązanie: Sprawa jest banalna. Niech $[F_{(g)(e)}]^i{}_j \equiv a_{ij}$ (żeby mniej pisać). Mamy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Mamy więc trzy niezależne układy równań, każdy na dwa elementy odpowiedniego wiersza macierzy $F_{(g)(e)}$. Np. na elementy a_{11} i a_{12} mamy

$$\begin{aligned} 3\,a_{11} + \ a_{12} &= \ 4\,, \\ 7\,a_{11} + 2\,a_{12} &= -3\,, \end{aligned}$$

itp. Rozwiązując je znajdujemy, że

$$F_{(g)(e)} = \begin{pmatrix} -11 & 37 \\ -10 & 35 \\ 7 & -22 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ na dwu liniowo niezależnych wektorach z V, $\mathbf{v}_1 = 3\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ i $\mathbf{v}_2 = 7\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2$ odwzorowanie daje niezerowe wektory (z W), a $\dim V = 2$, więc jądro F jest trywialne (składa się tylko z wektora zerowego). Jeśli zaś chodzi o obraz, to oczywiste jest, że skoro przestrzeń W jest trójwymiarowa, a odwzorowywane są tylko dwa liniowo niezależne wektory, to $\dim(\mathrm{im}F) = 2$ (to samo bardziej formalnie: $\dim(\mathrm{im}F) = \dim V - \dim(\ker F) = 2 - 0 = 2$). Tymi dwoma liniowo niezależnymi wektorami rozpinającymi obraz są np. wektory $\mathbf{o}_1 = 4\,\mathbf{g}_1 + 5\,\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3$ i $\mathbf{o}_2 = -3\,\mathbf{g}_1 + 5\,\mathbf{g}_3$ będące po prostu obrazami wektorów, na których (składowych) jest zadane odwzorowanie (tj. jego macierz). Mogłyby to też być wektory $\mathbf{o}'_1 = -11\,\mathbf{g}_1 - 10\,\mathbf{g}_2 + 7\,\mathbf{g}_3$, $\mathbf{o}'_2 = 37\,\mathbf{g}_1 + 35\,\mathbf{g}_2 - 22\,\mathbf{g}_3$ czyli kombinacje liniowe wektorów bazy $\mathbf{g}_i$ ze współczynnikami będącymi elementami kolumn macierzy $F_{(g)(e)}$ (zobacz zadania 27 i 27′). Oczywiście $\mathbf{o}_1 = 3\mathbf{o}'_1 + \mathbf{o}'_2$, a $\mathbf{o}_2 = 7\mathbf{o}'_1 + 2\mathbf{o}'_2$.

Zadanie 35

Znaleźć w zero-jedynkowych kanonicznych bazach przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ macierz odwzorowania liniowego F zadanego poprzez jego działanie na trzy wektory z $\mathbb{R}^3$:

$$F\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad F\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad F\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Najprostszym sposobem rozwiązania jest oczywiście rozłożenie ogólnego wektora z $\mathbb{R}^3$ na wektory, na których działanie F jest zadane:

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=(-a+b)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+(3a-3b+c)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+(-a+2b-c)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},$$

(ponieważ się to daje zrobić, wektory te są liniowo niezależne) i skorzystanie z liniowości F:

$$F\left(\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right)=(-a+b)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+(3a-3b+c)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+(-a+2b-c)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\-3a+4b-c\end{bmatrix}.$$

Utożsamiając następnie wektory z ich składowymi w bazach kanonicznych możemy stąd natychmiast (tak, jak w zadaniu 17 i na końcu zadania 31) odczytać szukaną macierz

$$F_{(e)(e)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&4&-1\end{pmatrix}.$$

Innym (wyjątkowo często praktykowanym przez studentów na kolokwium) sposobem jest po prostu rozwiązanie (po mniej lub bardziej świadomym utożsamieniu "żywych" wektorów w $\mathbb{R}^n$ z ich składowymi - litościwie nie należy wnikać w stopień tej świadmości...) układów równań:

$$\begin{pmatrix}f_{11}&f_{12}&f_{13}\\f_{21}&f_{22}&f_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}f_{11}&f_{12}&f_{13}\\f_{21}&f_{22}&f_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}f_{11}&f_{12}&f_{13}\\f_{21}&f_{22}&f_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Trochę to żmudne, ale wychodzi.

Rozpatrzmy jeszcze metodę wykorzystywaną w zadaniu 31, tj. przyjmijmy trzy liniowo niezależne wektory $\mathbf{v}_i$, na których działanie F jest zadane, za bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Mamy wtedy

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz ta jest macierzą $R_{e \leftarrow v}$ zmiany bazy. Trzeba ją odwrócić, by znaleźć macierz $R_{v \leftarrow e}$. Postępując standardowo, tj. rozwiązując układ równań na $\mathbf{v}_i$ znajdujemy, że

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stojąca tu macierz to właśnie $R_{v \leftarrow e}$.

Ponieważ F odwzorowuje w przestrzeń o wymiarze równym 2, przeto jest oczywiste (powinno być!), że trzy wektory będące obrazami wektorów $\mathbf{v}_i$ nie mogą być razem bazą. Musimy sobie wybrać dowolne dwa z nich (bo dowolne dwa już są liniowo niezależne). Weźmy zatem za bazę

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad R_{e \leftarrow g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i wtedy

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2 .$$

W związku z tym, że $F(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2$, $F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{g}_1$, a $F(\mathbf{v}_3) = \mathbf{g}_2$, mamy macierz odwzorowania F w bazach $\mathbf{v}_i$ i $\mathbf{g}_j$

$$F_{(g)(v)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz $F_{(e)(e)}$ otrzymamy obkładając powyższą macierzami zmiany baz:

$$\begin{aligned} F_{(e)(e)} = R_{e \leftarrow g} \cdot F_{(g)(v)} \cdot R_{v \leftarrow e} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Oczywiście za bazę $\mathbb{R}^2$ możnaby przyjąć inne dwa z trzech wektorów będących obrazami $\mathbf{v}_i$. Wtedy inną postać by miały macierze $F_{(g)(v)}$ oraz $R_{e \leftarrow g}$ ale końcowa macierz $F_{(e)(e)}$ wyszłaby taka sama.

Zadanie 36
Dane są dwie macierze

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{i} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć iloczyny $F \cdot G$ i $G \cdot F$.
Rozwiązanie: Macierz F jest (może być traktowana jak) macierzą jakiegoś odwzorowania F p.w. V o wymiarze 3 w jakąś p.w. W o wymiarze 1, macierz zaś G - macierzą odwzorowania $G : W \to V$; obie one są dane w jakichś bazach. Aby mnożenia miały sens trzeba przyjąć, że odpowiednie bazy są zgodne. W notacji wprowadzonej w poprzednich zadaniach powinno być tak

$$F \cdot G \equiv F_{(g')(f)} \cdot G_{(f)(g)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14),$$

$$G \cdot F \equiv G_{(f')(g)} \cdot G_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Macierz $F \cdot G$ jest macierzą odwzorowania z przestrzeni wektorowej W w przestrzeń wektorową W i wtedy możemy przyjąć, że bazami tej przestrzeni ("po prawej i po lewej stronie") są jakieś bazy $\mathbf{g}_i$, gdzie $i = 1$ i $\mathbf{g}'_i$ z $i = 1$; mogą one (ale nie muszą) być tożsame; a baza $\mathbf{f}_i$ z $i = 1, 2, 3$ przestrzeni V w której dana jest macierz $G_{(f)(g)}$ musi być (żeby mnożenie macierzy miało sens) tą samą bazą w przestrzeni V, w której jest dana macierz $F_{((g')f)}$.

Z kolei macierz $G \cdot F$ jest macierzą odwzorowania z V w V i żeby mnożenie miało sens nie musimy zakładać, że bazy $\mathbf{f}_i$ z $i = 1, 2, 3$ i $\mathbf{f}'_i$ z $i = 1, 2, 3$ są tą samą bazą, ale musimy założyć, że baza w przestrzeni W w której dane są macierze F i G jest ta sama.

Oczywiście macierze jako takie można sobie mnożyć (jako sztuka dla sztuki) bez przejmowania się bazami.

Zadanie 37
Jeśli jest to możliwe, znaleźć iloczyny $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$ macierzy:

i) $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

ii) $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$

Rozwiązanie: *i)* Ponieważ obie macierze są kwadratowe oba mnożenia są wykonalne

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tu akurat $A \cdot B = B \cdot A$, choć naogół tak nie jest.
Odp. *ii*) Można tylko obliczyć $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 37′
Niech F będzie odwzorowaniem przestrzeni wektorowej $\mathbb{M}_{2\times 2}$ macierzy wymiaru 2×2 (macierze są tu żywymi wektorami) o rzeczywistych elementach w nią samą zadanym wzorem

$$F\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

a G niech będzie odwzorowaniem tejże przestrzeni wektorowej $\mathbb{M}_{2\times 2}$ w przestrzeń wektorową $\mathbb{W}_2$ wielomianów stopnia niewyższego niż drugi według przepisu

$$G\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (c-b)x^2 + (a-c)x + (b-d)\,.$$

Napisać macierze tych odwzorowań, tj. macierze $F_{(m)(m)}$ oraz $G_{(w)(m)}$ w bazach kanonicznych przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$ i $\mathbb{W}_2$ oraz napisać (w tych samych bazach) macierz $(GF)_{(w)(m)}$ złożenia tych dwu odwzorowań i sprawdzić jak ma się ona do macierzy $F_{(m)(m)}$ i $G_{(w)(m)}$.
Rozwiązanie: Macierz $F_{(m)(m)}$ tworzymy według standardowego przepisu odwzorowując po kolei wektory $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}_3$, $\mathbf{m}_4$, bazy kanonicznej, rozkładając to co wyjdzie na te same wektory bazowe:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{m}_1) &= F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\,\mathbf{m}_1 + 0\,\mathbf{m}_2 + 0\,\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4\,, \\
F(\mathbf{m}_2) &= F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0\,\mathbf{m}_1 + 0\,\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 + 0\,\mathbf{m}_4\,, \\
F(\mathbf{m}_3) &= F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\,\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + 0\,\mathbf{m}_3 + 0\,\mathbf{m}_4\,, \\
F(\mathbf{m}_4) &= F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{m}_1 + 0\,\mathbf{m}_2 + 0\,\mathbf{m}_3 + 0\,\mathbf{m}_4\,.
\end{aligned}$$

i stawiając współczynniki tych rozkładów "na sztorc"

$$F_{(m)(m)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Postępując analogicznie znajdujemy macierz $G_{(w)(m)}$:

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{m}_1) &= G\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = x = 0\,\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1 + 0\,\mathbf{w}_2\,, \\
G(\mathbf{m}_2) &= G\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = -x^2 + 1 = \mathbf{w}_0 + 0\,\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\,, \\
G(\mathbf{m}_3) &= G\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = x^2 - x = 0\,\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2\,, \\
G(\mathbf{m}_4) &= G\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1 = -\mathbf{w}_0 + 0\,\mathbf{w}_1 + 0\,\mathbf{w}_2\,.
\end{aligned}$$

i stad

$$G_{(w)(m)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak łatwo się zorientować, złożenie odwzorowań F i G działa na macierze 2×2 według przepisu

$$(GF)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (b-c)x^2 + (d-b)x + (c-a)\,.$$

i powtarzając te same operacje, co wyżej, tj. odwzorowując w ten sposób w wielomiany po kolei wektory bazowe $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}_3$, $\mathbf{m}_4$, otrzymamy macierz

$$(GF)_{(w)(m)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Łatwo też sprawdzić, że zgdnie z tym, czego by należało oczekiwać, $(GF)_{(w)(m)} = G_{(w)(m)} \cdot F_{(m)(m)}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(W odwrotnej kolejności się tych dwóch macierzy, z uwagi na ich wymiary, nie da pomnożyć).

Przypomnienie.
Odwzorowanie liniowe $F:\ V \to \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K}$ jest jakimś ciałem liczbowym, naogół $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, zwie się *kowektorem* albo *(jedno)-formą liniową*.[30] Przy ustalonej przestrzeni wektorowej

[30] Oczywiście, skoro istnieją jedno-formy, to należy domniemywać, że są też i dwu- i więcej-formy; istotnie są (troszkę o nich będzie dalej), i to prowadzi do teorii form różniczkowych, twierdzenia Stokesa, kohomologii i innych cudów matematyki z nimi związanych i niezwykle użytecznych w fizyce...

V można rozpatrywać przestrzeń *wszystkich* odwzorowań liniowych V w $\mathbb{K}$. Ma ona także strukturę przestrzeni wektorowej. Jest ona zwana *przestrzenią dualną* do V i oznaczana V^*. Tak jak w każdej przestrzeni wektorowej, można w niej wprowadzać różne bazy, np. $\hat{\mathbf{f}}^i$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{dim}V^*$. (W przypadku skończeniewymiarowej przestrzeni V - a tylko takie tu będziemy rozpatrywać - $\mathrm{dim}V^* = \mathrm{dim}V$). W tym skrypcie elementy przestrzeni dualnej oznaczamy tłustymi literami z daszkiem. Każdą formę $\hat{\boldsymbol{\omega}} \in V^*$ można zapisać jako kombinację liniową form bazowych

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \omega_i^{(f)} \hat{\mathbf{f}}^i \,.$$

$\omega_i^{(f)}$ są składowymi kowektora (formy) w bazie $\hat{\mathbf{f}}^i$ o czym przypomina symbolik (f) w nawiasiku u góry. Zwróćmy uwagę na to, że numery form bazowych i indeksy ich składowych są w porównaniu z podobnymi indeksami wektorów umiejscowione "na odwyrtkę"!

Oczywiście trzeba znać działanie form bazowych $\hat{\mathbf{f}}^i$ na jakiś zupełny (tak się to nazywa w mechanice kwantowej), tj. rozpinający całą przestrzeń V, zbiór wektorów. Z nieskończenie wielu możliwych baz w przestrzeni V^* wyróżnia się baza dualna do ustalonej (choć też przecież dowolnie wybranej) bazy przestrzeni V. Jeśli wektory $\mathbf{e}_i$ są bazą V, to wektory $\hat{\mathbf{e}}^k$ bazy dualnej są takie, że

$$\hat{\mathbf{e}}^k(\mathbf{e}_i) = \delta^k_{\ i} \,.$$

Jeśli mamy wektor $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i v^i_{(e)} \in V$ oraz formę $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \omega_i^{(e)} \hat{\mathbf{e}}^i \in V^*$, rozpisaną w bazie dualnej, to wynik jej działania na $\mathbf{v}$ jest dany prostym wzorem:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}) = \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_i)\, v^i_{(e)} = \omega_k^{(e)} \hat{\mathbf{e}}^k(\mathbf{e}_i)\, v^i_{(e)} = \omega_k^{(e)} \delta^k_{\ i}\, v^i_{(e)} = \omega_i^{(e)} v^i_{(e)} \,.$$

Zapis ten może się wydawać podobny do iloczynu skalarnego, ale na razie nic tu o iloczynie skalarnym nie mówimy!

Zadanie 38

Niech $\mathrm{dim}V = 3$ i niech bazą V będą trzy wektory $\mathbf{e}_i$. Dana jest też forma (kowektor) $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, o której wiadomo, że na wektory $\mathbf{e}_i$ działa następująco:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_1) = 3 \,, \qquad \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_2) = 2 \,, \qquad \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_3) = 1 \,.$$

Znaleźć działanie $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ na wektor $\mathbf{v} = 4\,\mathbf{e}_1 + 5\,\mathbf{e}_2 + 6\,\mathbf{e}_3$ (czyli wartość formy $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ na wektorze $\mathbf{v}$) oraz podać składowe kowektora $\hat{\omega}$ w bazie dualnej do bazy $\mathbf{e}_i$.

Rozwiązanie: Działanie $\hat{\omega}$ na wektor $\mathbf{v}$ wynika z liniowości formy:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}) = \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_1)\, v^1_{(e)} + \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_2)\, v^2_{(e)} + \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_3)\, v^3_{(e)} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 28 \,.$$

Składowe formy $\hat{\omega}$ w bazie dualnej są dość oczywiste: $\omega^{(e)} = (3, 2, 1)$. Jeśli ktoś nie widzi od razu, to wypisujemy:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_1) = \omega_1^{(e)}\, \hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{e}_1) + \ \omega_2^{(e)}\, \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{e}_1) + \omega_3^{(e)}\, \hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{e}_1) = \omega_1^{(e)} = 3 \,.$$

W drugim kroku wykorzystaliśmy dualność baz $\hat{\mathbf{e}}^i$ oraz $\mathbf{e}_k$. W taki sam sposób z działania na $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ dowiadujemy się, że $\omega_2^{(e)} = 2$ i $\omega_1^{(e)} = 1$.

Zadanie 39
Niech trzy kowektory:

$$\hat{\mathbf{f}}^1 = [1,1,0]\,, \qquad \hat{\mathbf{f}}^2 = [1,0,1]\,, \qquad \hat{\mathbf{f}}^3 = [0,1,1]\,,$$

stanowią bazę przestrzeni V^* dualnej do przestrzeni wektorowej $V = \mathbb{R}^3$. Działanie "żywego" kowektora $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [a,b,c] \in V^*$ na (też "żywy") wektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3\,,$$

jest zdefiniowane naturalnym wzorem

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{v}) = ax + by + cz\,.$$

Podać wynik działania formy $\hat{\boldsymbol{\omega}} = 3\,\hat{\mathbf{f}}^1 + 2\,\hat{\mathbf{f}}^2 + \hat{\mathbf{f}}^3$ na wektor $\mathbf{v}$ o $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$. Znaleźć ponadto składowe formy $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ w bazie $\hat{\mathbf{e}}^k$ dualnej do kanonicznej (zero-jedynkowej) bazy $\mathbf{e}_i$, a także postać bazy $\mathbf{f}_i$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dualnej do bazy $\hat{\mathbf{f}}^i$ przestrzeni kowektorów.
Rozwiązanie: Na podany wektor $\mathbf{v}$ forma $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ działa następująco:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}) &= 3\,\hat{\mathbf{f}}^1\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + 2\,\hat{\mathbf{f}}^2\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + \hat{\mathbf{f}}^3\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\cdot(2+1) + 2\cdot(2-1) + 1\cdot(1-1) = 11\,.\end{aligned}$$

Ponieważ tu mamy dostęp do "żywych" form i "żywych" wektorów, tj. umiemy jawnie wykonywać operacje na samych formach i wektorach (a nie tylko na ich składowych), to składowe formy $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ w bazie $\hat{\mathbf{e}}^k$, która jako dualna do kanonicznej zero-jedynkowej bazy $\mathbf{e}_i$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, musi mieć postać

$$\hat{\mathbf{e}}^1 = [1,0,0]\,, \qquad \hat{\mathbf{e}}^2 = [0,1,0]\,, \qquad \hat{\mathbf{e}}^3 = [0,0,1]\,,$$

też łatwo ustalić:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = 3[1,1,0] + 2[1,0,1] + [0,1,1] = 5[1,0,0] + 4[0,1,0] + 3[0,0,1]\,.$$

Zatem

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = 5\,\hat{\mathbf{e}}^1 + 4\,\hat{\mathbf{e}}^2 + 3\,\hat{\mathbf{e}}^3\,.$$

Ponieważ mamy tu dostep do żywych wektorów i żywych kowektorów znaleźć bazę $\mathbf{f}_i$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dualną do bazy $\hat{\mathbf{f}}^k$ przestrzeni form można bezpośrednio rozwiązując trzy niezależne układy równań. Np. aby znaleźć postać wektora $\mathbf{f}_1$ piszemy

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\,,$$

działamy nań formami $\hat{\mathbf{f}}^k$ według podanego przepisu i żądamy by

$$x_1 + y_1 = 1\,, \qquad x_1 + z_1 = 0\,, \qquad y_1 + z_1 = 0\,,$$

etc. Pouczające i bardziej perspektywiczne jest jednak przeprowadzenie w tym celu bardziej ogólnych rozważania.

Wprowadzając odpowiednią notację zapiszmy zmiany bazy w przestrzeni form w postaciach

$$\left(P^{e\to f}\right)^j{}_i\,\hat{\mathbf{f}}^i = \hat{\mathbf{e}}^j\,, \qquad \left(P^{f\to e}\right)^k{}_l\,\hat{\mathbf{e}}^l = \hat{\mathbf{f}}^k\,.$$

Macierze $P^{e\to f}$ i $P^{f\to e}$ są oczywiście wzajemnie odwrotne, tj. $P^{e\to f}\cdot P^{f\to e} = P^{f\to e}\cdot P^{e\to f} = I$ (I oznacza macierz jednostkową, tu wymiaru 3×3). Stosując wprowadzoną notację mamy

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \omega_i^{(f)}\hat{\mathbf{f}}^i = \omega_i^{(f)}\left(P^{f\to e}\right)^i{}_l\,\hat{\mathbf{e}}^l \equiv \omega_l^{(e)}\hat{\mathbf{e}}^l\,,$$

tj. $\omega_l^{(e)} = \omega_i^{(f)}\left(P^{f\to e}\right)^i_l$. (Widać, że notacja dla form jest podobna do notacji dla wektorów z tym, że wskaźniki są umieszczone na innych poziomach; ponadto teraz składowe formy piszemy z lewej strony form bazowych). Znajdźmy macierz $P^{f\to e}$: z postaci form $\hat{\mathbf{f}}^i$ mamy od razu

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{f}}^1 &= \hat{\mathbf{e}}^1 + \hat{\mathbf{e}}^2 \\
\hat{\mathbf{f}}^2 &= \hat{\mathbf{e}}^1 \phantom{+\hat{\mathbf{e}}^2} + \hat{\mathbf{e}}^3 \\
\hat{\mathbf{f}}^3 &= \phantom{\hat{\mathbf{e}}^1 +{}} \hat{\mathbf{e}}^2 + \hat{\mathbf{e}}^3\,.
\end{aligned}$$

Kładziemy teraz współczynniki z każdego wiersza "*na płask*" i mamy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}^1 \\ \hat{\mathbf{e}}^2 \\ \hat{\mathbf{e}}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}^1 \\ \hat{\mathbf{f}}^2 \\ \hat{\mathbf{f}}^3 \end{pmatrix}.$$

Widniejąca tu macierz jest właśnie macierzą $P^{f\to e}$. Służy ona do przerabiania składowych formy danych w bazie $\hat{\mathbf{f}}^i$ na jej składowe w bazie $\hat{\mathbf{e}}^i$, tak jak wskazuje zwrot strzałki. Np. składowymi formy $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ w bazie $\hat{\mathbf{f}}^i$ były $\omega_i^{(f)} = (3,2,1)$, jej składowymi w bazie $\hat{\mathbf{e}}^i$ są więc

$$(3,2,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (5,4,3)\,,$$

tak jak to już wyżej napisaliśmy "spod dużego palucha".

Możemy też wyrazić bazowe formy $\hat{\mathbf{e}}^i$ przez bazowe formy $\hat{\mathbf{f}}^i$ odwracając wypisane wyżej równania: np. odejmując od pierwszego z nich drugie dostajemy równanie, które w połączeniu z trzecim pozwala wyznaczyć $\hat{\mathbf{e}}^2$ i $\hat{\mathbf{e}}^3$ (a potem $\hat{\mathbf{e}}^1$ już jest łatwo wyznaczyć). Znajdujemy w ten sposób:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}^1 &= \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{f}}^1 + \hat{\mathbf{f}}^2 - \hat{\mathbf{f}}^3\right) \\
\hat{\mathbf{e}}^2 &= \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{f}}^1 - \hat{\mathbf{f}}^2 + \hat{\mathbf{f}}^3\right) \\
\hat{\mathbf{e}}^3 &= \frac{1}{2}\left(-\hat{\mathbf{f}}^1 + \hat{\mathbf{f}}^2 + \hat{\mathbf{f}}^3\right).
\end{aligned}$$

Daje to macierz $P^{e\to f}$:

$$P^{e\to f} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

która jest oczywiście odwrotna do macierzy $P^{f\to e}$, co łatwo sprawdzić.

Powróćmy teraz do naszego zadania. Szukamy takiej bazy $\mathbf{f}_i$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, żeby

$$\hat{\mathbf{f}}^k(\mathbf{f}_i) = \delta^k{}_i\,.$$

Wykorzystując odpowiednie macierze zmian baz oraz liniowość form możemy napisać:

$$\begin{aligned}
\delta^k{}_i = \hat{\mathbf{f}}^k(\mathbf{f}_i) = \left(P^{f\to e}\right)^k{}_l\,\hat{\mathbf{e}}^l(\mathbf{f}_i) &= \left(P^{f\to e}\right)^k{}_l\,\hat{\mathbf{e}}^l(\mathbf{e}_j)\;\left(R_{e\leftarrow f}\right)^j{}_i \\
&= \left(P^{f\to e}\right)^k{}_l\,\delta^l{}_j\;\left(R_{e\leftarrow f}\right)^j{}_i = \left(P^{f\to e}\right)^k{}_j\left(R_{e\leftarrow f}\right)^j{}_i\,.
\end{aligned}$$

W przedostatnim kroku wykorzystana została wzajemna dualność baz $\hat{\mathbf{e}}^k$ i $\mathbf{e}_i$. Dowiadujemy się stąd, że macierz $R_{e\leftarrow f}$, pozwalająca wyrazić poszukiwane wektory $\mathbf{f}_i$ przez wektory bazy kanonicznej $\mathbf{e}_i$, jest macierzą odwrotną do macierzy $P^{f\to e}$:

$$R_{e\leftarrow f} = \left(P^{f\to e}\right)^{-1} = P^{e\to f}\,.$$

Ponieważ macierze $P^{f\to e}$ oraz $P^{e\to f}$ już znaleźliśmy, więc możemy napisać

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

czyli

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_3 \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_2 &= \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_3 \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_3 &= -\frac{1}{2}\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_3 \equiv \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

To, że $\hat{\mathbf{f}}^1 = [1,1,0]$ działając na $\mathbf{f}_1$ daje 1, a na $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$ daje zero, widać gołym okiem.

Uwaga: Kowektory należące do przestrzeni dualnej V^* do przestrzeni wektorowej V pozwalają zadawać w V podprzestrzenie liniowe (wektorowe) przez podanie zbioru (niekoniecznie liniowo niezależnych) kowektorów zerujących się na wszystkich wektorach należących do podprzestrzeni. Łatwo zobaczyć, że tak wyznaczony zbiór wektorów rzeczywiście jest podprzestrzenią liniową.

Zadanie 40
Sprawdzić, że każde odwzorowanie liniowe $F: V \to W$ (gdzie $\dim V = n_V$, a $\dim W = n_W$) można zapisać w postaci

$$F = [F_{(w)(v)}]^j{}_i \, \mathbf{w}_j \otimes \hat{\mathbf{v}}^i$$

(domyślnie suma po i od 1 do n_V, a po j od 1 do n_W), jeśli przyjąć, że działanie tego dziwnego zwierzęcia na dowolny wektor $\mathbf{u} \in V$ jest określone wzorem (w kórym $\hat{\mathbf{v}}^i$ tworzą bazę kowektorów nad V dualną do bazy $\mathbf{v}_i$ przestrzeni V)

$$F(\mathbf{u}) \equiv [F_{(w)(v)}]^j{}_i \, \mathbf{w}_j \, \hat{\mathbf{v}}^i(\mathbf{u})\,.$$

(Zauważmy że po prawej ten bulwersujacy symbol "$\otimes$" już nie występuje: $\hat{\mathbf{v}}^i(\mathbf{u})$ jest liczbą - jak widać musi być to liczba z ciała $\mathbb{K}$, nad którym jest rozpięta przestrzeń wektorowa W, i z którego są elementy macierzy $F_{(w)(v)}$, ale takie drobiazgi fizyka nie zaprzątają).
Rozwiązanie: Właściwie to niema co sprawdzać: jeśli $\mathbf{u} = \mathbf{v}_k \, u^k_{(v)}$, to zgodnie z podaną definicją i liniowością działania kowektorów $\hat{\mathbf{v}}^i$ mamy

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) = [F_{(w)(v)}]^j{}_i \, \mathbf{w}_j \, \hat{\mathbf{v}}^i(\mathbf{v}_k \, u^k_{(v)}) &= \mathbf{w}_j \, [F_{(w)(v)}]^j{}_i \, \hat{\mathbf{v}}^i(\mathbf{v}_k) \, u^k_{(v)} \\ &= [F_{(w)(v)}]^j{}_i \, \mathbf{w}_j \, \delta^i{}_k \, u^k_{(v)} = \mathbf{w}_j [F_{(w)(v)}]^j{}_i u^i_{(v)}\,, \end{aligned}$$

a to nie jest nic innego, jak właśnie wektor z W będący wynikiem działania F na $\mathbf{u} \in V$ (zobacz np. Zadanie 29). W szczególności, jeśli $W = V$ i obie bazy są jedną i tą samą bazą $\mathbf{v}_i$, to odwzorowanie $\mathrm{Id} \equiv I$ (które z wektorem z V nie robi *nic*) można zapisać w wymyślnej formie

$$\mathrm{Id} = \mathbf{v}_i \otimes \hat{\mathbf{v}}^i\,.$$

Z tego wszystkiego wynika, że ogólnie rzecz ujmując, odwzorowanie liniowe $F: V \to W$ jest elementem przestrzeni (też wektorowej, bo iloczyn tensorowy dwu przestrzeni wektorowych jest p. wektorową) $W \otimes V^*$.

Uwaga: W mechanice kwantowej mamy do czynienia z przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$, zwaną przestrzenią Hilberta $\mathcal{H}$ (taka nazwa przysługuje przestrzeniom wektorowym z normą i zupełnym w sensie zbieżności w nich w tej normie wszystkich ciągów Cauchy'ego). Jej wektory za P.A.M. Dirakiem przyjęło się oznaczać $|\psi\rangle$, $|\chi\rangle$ etc. Taki wektor zwie się "ket"-em. Oczywiście zwykle wybiera się jakąś bazę $|\psi_i\rangle$ lub $|\chi_i\rangle$ (naogół ma ona nieskończenie wiele elementów). Formy z przestrzeni $\mathcal{H}^*$ dualnej do przestrzeni Hilberta zapisuje się w postaci "bra" $\langle\psi|$, $\langle\chi|$. Działanie takich form na wektory z $\mathcal{H}$ przyjmuje w tej notacji postać $\langle\chi|\psi\rangle \in \mathbb{C}$. Oczywiście do każdej bazy $|\psi_i\rangle$ przestrzeni $\mathcal{H}$ istnieje w $\mathcal{H}^*$ baza dualna $\langle\psi_i|$, taka że $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$. Podany wyżej wzór Id$= \mathbf{v}_i \otimes \hat{\mathbf{v}}^i$ w tej notacji przybiera postać (suma po i jest domyślna; ponadto w mechanice kwantowej każde odwzorowanie liniowe $\mathcal{H}$ w $\mathcal{H}$ nazywa się *operatorem* i oznacza literką z czapeczką - francuzi zwą to "chapeau de Napoleon" - więc zamiast pisać Id w mechanice kwantowej pisze się $\hat{1}$ - operator jednostkowy)

$$\mathrm{Id} = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\,.$$

Feynman nazywa to[31] "Wielkim prawem mechaniki kwantowej".

Zadanie 41[32]

Niech V będzie przestrzenią wektorową wielomianów (rzeczywistych) stopnia nie wyższego niż 2. Pokazać, że trzy kowektory (czyli odwzorowania liniowe V w $\mathbb{R}$): $\hat{\mathbf{f}}^1 \equiv \hat{F}_\alpha(\cdot)$, $\hat{\mathbf{f}}^2 \equiv \hat{F}_\beta(\cdot)$, $\hat{\mathbf{f}}^3 \equiv \hat{F}_\gamma(\cdot)$, których działanie na wektor-wielomian $\mathbf{W} \equiv W(x)$ należący do p.w. V jest zadane wzorem

$$\hat{F}_{x_0}(\mathbf{W}) = W(x_0)\,,$$

stanowią, jeśli trzy liczby α, β i γ są różne, bazę przestrzeni kowektorów. Znaleźć bazę $\mathbf{f}_i$ przestrzeni wielomianów dualną do bazy $\hat{\mathbf{f}}^i$. Znaleźć w bazie $\hat{\mathbf{f}}^i$ składowe $I_i^{(f)}$ kowektora $\hat{\mathbf{I}}$ (odwzorowania linowego z V w $\mathbb{R}$) działającego na wektor-wielomian $\mathbf{W}$ według przepisu:

$$\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{W}) = \int_0^1 dx\, W(x)\,.$$

Podać jawną postać wielomianów bazowych oraz składowe $I_i^{(f)}$ kowektora $\hat{I}$, gdy $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = +1$.

Rozwiązanie: Wykonamy polecenia w odwrotnej kolejności (dalej stanie się jasne, dlaczego) i najpierw znajdziemy bazę dualną. Albo, żeby nie denerwować matematyków słowem "baza dualna", skoro jeszcze nie udowodniliśmy, że trzy kowektory $\hat{\mathbf{f}}^i$ rzeczywiście są bazą, poszukamy (a nuż się uda?) trzech wielomianów $\mathbf{f}_i$ takich, że $\hat{\mathbf{f}}^i(\mathbf{f}_j) = \delta^i{}_j$. Ponieważ najogólniejszy wielomian z V ma postać $W(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, sprowadza się to do rozwiązania trzech układów trzech równań liniowych. Np. szukając wielomianu $\mathbf{f}_1 = a_2x^2 + a_1x + a_0$ takiego, że $\hat{\mathbf{f}}^1(\mathbf{f}_1) = 1$, $\hat{\mathbf{f}}^2(\mathbf{f}_1) = 0$, $\hat{\mathbf{f}}^3(\mathbf{f}_1) = 0$, rozwiązujemy układ

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{f}}^1(\mathbf{f}_1) &\equiv \hat{F}_\alpha(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 1\,,\\
\hat{\mathbf{f}}^2(\mathbf{f}_1) &\equiv \hat{F}_\beta(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0 = 0\,,\\
\hat{\mathbf{f}}^3(\mathbf{f}_1) &\equiv \hat{F}_\gamma(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_2\gamma^2 + a_1\gamma + a_0 = 0\,,
\end{aligned}$$

[31] R.P. Feynman, R. Leighton, M. Sands *Feynmana Wykłady z fizyki*, t. III, wzór (8.9).

[32] Zadanie to w wersji ogólnej wykorzystuje rzeczy, które są w tym skrypcie wprowadzone dopiero dalej. W wersji z konkretnymi liczbami α, β i γ jest ono jednak wykonalne dostępnymi już środkami, a jego miejsce jest ewidentnie tutaj.

lub, równoważnie, układ

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

względem niewiadomych a_2, a_1, a_0. Możemy tu zastosować Kramersięta: wyznacznik macierzy A układu jest po prostu wyznacznikiem Vandermonda (Zadanie 46) tyle, że ze zmienionym znakiem (bo tu potęgi rosną z prawa na lewo, a macierz ma wymiar 3×3): $\det(A) = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$. Widać, że jednoznaczne rozwiązanie istnieje, jeśli trzy liczby α, β i γ są różne. Ponieważ wektor po prawej stronie ma jedynkę i dwa zera, więc obliczenie trzech pozostałych wyznaczników jest (dzięki Laplace'owi) proste i znajdujemy

$$a_2 = \frac{\beta-\gamma}{\det A}, \qquad a_1 = \frac{-(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)}{\det A}, \qquad a_0 = \frac{\beta\gamma(\beta-\gamma)}{\det A},$$

czyli

$$a_2 = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \qquad a_1 = \frac{-(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \qquad a_0 = \frac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}.$$

Nietrudno zobaczyć (symetria równań jest fizykowi zawsze pomocna!), że współczynniki drugiego wielomianu $\mathbf{f}_2 = b_2x^2 + b_1x + b_0$ bazy dualnej można otrzymać z powyższych wzorów na a_2, a_1 i a_0 przez cykliczne zamiany: $\alpha\to\beta$, $\beta\to\gamma$, $\gamma\to\alpha$, a współczynnki trzeciego wielomianu $\mathbf{f}_2 = c_2x^2 + c_1x + c_0$ tej bazy przez zamiany $\alpha\to\gamma$, $\beta\to\alpha$, $\gamma\to\beta$:

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}, \qquad & b_1 &= \frac{-(\gamma+\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}, \qquad & b_0 &= \frac{\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}, \\ c_2 &= \frac{1}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}, \qquad & c_1 &= \frac{-(\beta+\alpha)}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}, \qquad & c_0 &= \frac{\beta\alpha}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że przy okazji znaleźliśmy macierz A^{-1} odwrotną do macierzy A występującej we wszystkich trzech rozwiązywanych (w celu znalezienia wielomianów bazowych) układach równań:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ -(\beta-\gamma)(\beta+\gamma) & -(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) & -(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \\ (\beta-\gamma)\beta\gamma & (\gamma-\alpha)\gamma\alpha & (\alpha-\beta)\alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz bez kłopotu wykazać formalnie, że kowektory $\hat{\mathbf{f}}^i$ są liniowo niezależne (a że są ich trzy, więc stanowią bazę, bo $\dim V^* = \dim V = 3$). Musimy pokazać, że równość

$$\lambda_1\hat{\mathbf{f}}^1 + \lambda_2\hat{\mathbf{f}}^2 + \lambda_3\hat{\mathbf{f}}^3 = \hat{\mathbf{0}},$$

może być spełniona tylko dla $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Symbol $\hat{\mathbf{0}}$ oznacza tu zerowy kowektor, czyli taki, który na każdym wielomianie daje zero. W szczególności musi też dawać zero na znalezionych wyżej wielomianach-wektorach $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$. Ale na pierwszym daje on λ_1, na drugim λ_2, a na trzecim λ_3. Stąd już wynika, że powyższy kowektor jest równy $\hat{\mathbf{0}}$ tylko dla $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, co oznacza, że trzy $\hat{\mathbf{f}}^i$ są liniowo niezależne, czyli są bazą. Oczywiście można było ten dowód przeprowadzić najpierw, ale albo trzeba by było zgadnąć te trzy szczególne wielomiany (matematycy tak często robią: gdzieś na boku wyznaczają takie wielomiany, a potem przed publiką wyjmują je "z kapelusza" i dowód idzie gładko...) albo obliczyć $\lambda_1\hat{\mathbf{f}}^1 + \lambda_2\hat{\mathbf{f}}^2 + \lambda_3\hat{\mathbf{f}}^3$ na trzech losowo wybranych (byle liniowo niezależnych) wielomianach i pokazać (np. sprawdzając, że wyznacznik macierzy problemu nie znika), że układ trzech jednorodnych równań na λ_i otrzymanych z przyrównania do zera wyników działania $\lambda_1\hat{\mathbf{f}}^1 + \lambda_2\hat{\mathbf{f}}^2 + \lambda_3\hat{\mathbf{f}}^3$ na te trzy wielomiany nie ma nietrywialnych rozwiązań.

Jeśli wprowadzimy kanoniczną bazę przestrzeni V wielomianów:

$$\mathbf{e}_2 = x^2\,, \qquad \mathbf{e}_1 = x\,, \qquad \mathbf{e}_0 = 1\,,$$

to, jak można się łatwo zorientować,

$$A^{-1} = R_{e\leftarrow f}\,,$$

gdyż w kolumnach macierzy A^{-1} stoją właśnie składowe wielomianów $\mathbf{f}_i$ w bazie $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_0$.

Działając na wielomian

$$W(x) = w^2_{(e)}x^2 + w^1_{(e)}x + w^0_{(e)} \equiv \mathbf{e}_2 w^2_{(e)} + \mathbf{e}_1 w^1_{(e)} + \mathbf{e}_0 w^0_{(e)}\,,$$

kowektor $\hat{\mathbf{I}}$ daje $\frac{1}{3}w^2_{(e)} + \frac{1}{2}w^1_{(e)} + w^0_{(e)}$. Zatem w bazie $\hat{\mathbf{e}}^i$ kowektorów dualnych do $\mathbf{e}_i$ (tj. takich, że $\hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i{}_j$) jego składowymi muszą być

$$I^{(e)}_i = (\frac{1}{3},\, \frac{1}{2},\, 1)\,.$$

Aby znaleźć jego składowe $I^{(f)}_i$ w bazie $\hat{\mathbf{f}}^i$ piszemy:

$$(\frac{1}{3},\, \frac{1}{2},\, 1)\begin{pmatrix} w^2_{(e)} \\ w^1_{(e)} \\ w^0_{(e)} \end{pmatrix} = I^{(e)}_i w^i_{(e)} = \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{W}) = I^{(f)}_i w^i_{(f)} = I^{(f)}_i [R_{f\leftarrow e}]^i{}_j w^j_{(e)}\,.$$

Wynika stąd natychmiast, że (zobacz Zadanie 39)

$$I^{(f)}_j = I^{(e)}_i [P^{e\to f}]^i{}_j = I^{(e)}_i [R_{e\leftarrow f}]^i{}_j \equiv I^{(e)}_i [A^{-1}]^i{}_j\,,$$

czyli że składowe $I^{(f)}_j$ kowektora $\hat{\mathbf{I}}$ w bazie $\hat{\mathbf{f}}^j$ otrzymujemy przykładając $(\frac{1}{3},\, \frac{1}{2},\, 1)$ z lewej strony do macierzy $P^{e\to f} = R_{e\leftarrow f} = A^{-1}$ i wykonując działanie.

Wypiszemy to wszystko teraz i sprawdzimy na konkretnym przykładzie. Przyjmując $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = +1$ otrzymamy $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 2$, $-(\beta + \gamma) = -1$, $\beta\gamma = 0$ dla pierwszego wielomianu, $(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)=-1$, $-(\gamma+\alpha)=0$, $\gamma\alpha=-1$ dla drugiego oraz $(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)=2$, $-(\beta+\alpha)=1$, $\beta\alpha=0$ dla trzeciego. Trzy wielomiany bazowe mają wtedy postacie

$$\mathbf{f}_1=\frac{1}{2}\,(x^2-x)\,,\qquad \mathbf{f}_2=-x^2+1\,,\qquad \mathbf{f}_3=\frac{1}{2}\,(x^2+x)\,.$$

Są to akurat tzw. wielomiany interpolacyjne Lagrange'a (ale nie jest to tu istotne). Macierz A ma dla $\alpha=-1$, $\beta=0$, $\gamma=1$ prostą postać

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Macierzą do niej odwrotną, będącą jednocześnie potrzebną nam macierzą przejścia (zmiany bazy) jest macierz[33]

$$A^{-1}=R_{e\leftarrow f}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}.$$

Składowe wielomianu $W(x)=w^2_{(e)}x^2+w^1_{(e)}x+w^0_{(e)}$ w bazie $\mathbf{f}_i$ można dostać działając na nie macierzą $A=R_{f\leftarrow e}$. Są więc one równe $w^1_{(f)}=w^2_{(e)}-w^1_{(e)}+w^2_{(e)}$, $w^2_{(f)}=w^0_{(e)}$ i $w^3_{(f)}=w^2_{(e)}+w^1_{(e)}+w^2_{(e)}$. Łatwo to sprawdzić:

$$\begin{aligned}W(x)&=\mathbf{f}_1w^1_{(f)}+\mathbf{f}_2w^2_{(f)}+\mathbf{f}_3w^3_{(f)}\\&\equiv\frac{1}{2}(x^2-x)(w^2_{(e)}-w^1_{(e)}+w^0_{(e)})+(1-x^2)w^0_{(e)}+\frac{1}{2}(x^2+x)(w^2_{(e)}+w^1_{(e)}+w^0_{(e)})\\&=w^2_{(e)}x^2+w^1_{(e)}x+w^0_{(e)}\,,\end{aligned}$$

tak jak być powinno. Zgodnie z wyprowadzonym wyżej wzorem, składowe kowektora $\hat{I}$ w bazie $\hat{\mathbf{f}}^i$ są równe

$$\left(\frac{1}{3},\,\frac{1}{2},\,1\right)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{12},\,\frac{2}{3},\,\frac{5}{12}\right).$$

Sprawdzamy:

$$\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{W})=I^{(f)}_jw^j_{(f)}=\left(-\frac{1}{12},\,\frac{2}{3},\,\frac{5}{12}\right)\begin{pmatrix}w^2_{(e)}-w^1_{(e)}+w^0_{(e)}\\w^0_{(e)}\\w^2_{(e)}+w^1_{(e)}+w^0_{(e)}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}w^2_{(e)}+\frac{1}{2}w^1_{(e)}+w^0_{(e)}\,,$$

[33]Ponieważ A ma w tym przypadku tak prostą postać, macierz A^{-1} można znaleźć bezpośrednio przez tzw. "inspekcję", tj. przykładając jej kolumny do macierzy A i zgadując, co w nich powinno być, by $A\cdot A^{-1}=I$.

tak jak miało być.

Zadanie 42[34]
Znaleźć rzut należącego do $V = \mathbb{R}^5$ wektora

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

"wzdłuż" podprzestrzeni rozpinanej przez wektory $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$ na dwuwymiarową podprzestrzeń rozpiętą przez wektory $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$, gdzie wektory

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

stanowią bazę przestrzeni V. Znaleźć także macierz odwzorowania tego rzutu (zwaną macierzą operatora rzutu) w kanonicznej zero-jedynkowej bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, 5$ przestrzeni $\mathbb{R}^5$.
Rozwiązanie: Rzut $\mathbf{w} \to \Pi(\mathbf{w})$ wektora $\mathbf{w}$ na wektory $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ wzdłuż wektorów $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$ polega na zapisaniu $\mathbf{w}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ oraz $\mathbf{v}_5$:

$$\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \lambda_4\mathbf{v}_4 + \lambda_5\mathbf{v}_5\,,$$

a następnie wyzerowaniu współczynników tego rozkładu mnożących $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ oraz $\mathbf{v}_5$:

$$\mathbf{w} \to \Pi(\mathbf{w}) = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2\,.$$

Konieczne jest oczywiście, by wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ oraz $\mathbf{v}_5$ były liniowo niezależne; nie jest konieczne by rozpinały one całą przestrzeń V (tu akurat rozpinają, bo jest ich pięć) ale rzutowany wektor $\mathbf{w}$ musi się dać na nie rozłożyć. Ogólnie jednak, aby dowolny wektor z danej przestrzeni V dało się zrzutować na podprzestrzeń W wzdłuż podprzestrzeni U, V musi być sumą prostą W i U: $V = W \oplus U$, bo tylko wtedy rozkład dowolnego wektora z V na wektor z W i wektor z U jest jednoznaczny.

Rozkładamy zatem $\mathbf{w}$. Trzeba w tym celu rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned}
-2 &= -\lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 \\
0 &= \ \ \lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 \\
2 &= 2\lambda_1 + \ \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 + \lambda_5 \\
2 &= 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\
0 &= 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5\,.
\end{aligned}$$

[34] Jednym z celów tego zadania jest wybicie studiującym z głowy błędnej myśli, jakoby rzut musiał mieć coś wspólnego z iloczynem skalarnym (o którym tu nie będzie ani słowa).

To się daje łatwo zrobić: z pierwszych dwu równań znajdujemy natychmiast, że $\lambda_1 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Po wstawieniu tych wartości do pozostałych równań przybierają one postać

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_2 + 3\lambda_4 + \lambda_5 \\ 0 &= 2\lambda_2 + 2\lambda_4 \\ -3 &= 3\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5\,. \end{aligned}$$

Teraz pierwsze minus trzecie wraz z drugim

$$\begin{aligned} 4 &= -2\lambda_2 + 2\lambda_4 \\ 0 &= 2\lambda_2 + 2\lambda_4\,, \end{aligned}$$

dają $\lambda_4 = 1$, $\lambda_2 = -1$, a zatem $\lambda_5 = -1$. Mając te współczynniki mamy szukany rzut $\mathbf{w}$:

$$\Pi(\mathbf{w}) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

W bazie przestrzeni $\mathbb{R}^5$ tworzonej przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ oraz $\mathbf{v}_5$ macierz tego rzutu, który jest odwzorowaniem liniowym, ma oczywistą postać[35]

$$\Pi_{(v)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Szukana macierz $\Pi_{(e)(e)}$ jest wobec tego dana wzorem

$$\Pi_{(e)(e)} = R_{e\leftarrow v} \cdot \Pi_{(v)(v)} \cdot R_{v\leftarrow e}\,.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 + 3\,\mathbf{e}_4 + 4\,\mathbf{e}_5 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_3 + 2\,\mathbf{e}_4 + 3\,\mathbf{e}_5 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{v}_4 &= 3\,\mathbf{e}_3 + 2\,\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{v}_5 &= \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_5\,. \end{aligned}$$

[35]Gdyby zadanie polegało tylko na znalezieniu rzutu wektora $\mathbf{w}$ na wektory $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ "wzdłuż" wektorów $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$ (na które $\mathbf{w}$ się daje rozłożyć) ale sama przestrzeń V miała wymiarów więcej niż pięć, to macierzy rzutu nie dałoby się wyznaczyć: nie wiadomo bowiem by było, czy rzutować należy *na* dodatkowe wektory dopełniające do pełnej bazy wektory $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, 5$, czy *wzdłuż* nich. Oczywiście nie wpływałoby to na rzut samego wektora $\mathbf{w}$, ale nie pozwalałoby rzutować wektorów liniowo niezależnych od pięciu wektorów $\mathbf{v}_i$.

więc macierz $R_{e\leftarrow v}$ otrzymujemy natychmiast, stawiając "na sztorc" współczynniki powyższych pięciu kombinacji liniowych. Aby zaś znaleźć $R_{v\leftarrow e}$ trzeba wyrazić wektory $\mathbf{e}_k$ przez wektory $\mathbf{v}_i$. Nie jest to przyjemne, ale daje się zrobić. Najpierw od wszystkich równań odejmujemy wielokrotność ostatniego eliminując z nich $\mathbf{e}_5$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 - 4\,\mathbf{v}_5 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3 + 3\,\mathbf{e}_4\\
\mathbf{v}_2 - 3\,\mathbf{v}_5 &= \qquad\qquad\;\; - 2\,\mathbf{e}_3 + 2\,\mathbf{e}_4\\
\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_5 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \qquad\quad + \mathbf{e}_4\\
\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_5 &= \qquad\qquad\quad 2\,\mathbf{e}_3 + 2\,\mathbf{e}_4\,.
\end{aligned}$$

Następnie dodając do pierwszego i drugiego czwarte eliminujemy $\mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4 - 5\,\mathbf{v}_5 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 5\,\mathbf{e}_4\\
\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 - 4\,\mathbf{v}_5 &= \qquad\qquad\; + 4\,\mathbf{e}_4\\
\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_5 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4\,.
\end{aligned}$$

Dalej już łatwo. Wstawiamy ze środkowego

$$\mathbf{e}_4 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 - 4\,\mathbf{v}_5\right),$$

do pierwszego i trzeciego i przenosimy na drugą stronę:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4 - 5\,\mathbf{v}_5 - \frac{5}{4}\left(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 - 4\,\mathbf{v}_5\right)\\
\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &= \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_5 - \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 - 4\,\mathbf{v}_5\right).
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{4}\left(-2\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + 2\,\mathbf{v}_3\right)\\
\mathbf{e}_2 &= \frac{1}{4}\left(2\,\mathbf{v}_1 - 3\,\mathbf{v}_2 + 2\,\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4\right).
\end{aligned}$$

Mając $\mathbf{e}_4$, z czwartego równania dostajemy

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{4}\left(-\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 + 2\,\mathbf{v}_5\right).$$

Wreszcie, z ostatniego równania, $\mathbf{v}_5 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_5$ mamy

$$\mathbf{e}_5 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 + 2\,\mathbf{v}_5\right).$$

Zatem

$$\Pi_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -3 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} .
$$

Ostatecznie więc

$$
\Pi_{(e)(e)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} .
$$

Działając tą macierza na składowe $w^i_{(e)}$ wektora $\mathbf{w}$ otrzymujemy oczywiście uzyskany już wcześniej wynik.

Istnieje też bardziej wyrafinowany sposób znalezienia tej macierzy wykorzystujący to, że odwzorowanie liniowe będące rzutem jest jednoznacznie wyznaczone przez swoje jądro (czyli podprzestrzeń wzdłuż której się rzutuje) i obraz (czyli podprzestrzeń na którą się rzutuje) oraz charakterystyczną właściwość takiego odwzorowania polegającą na tym, że $\Pi^2 = \Pi$ (właściwość tę musi też wykazywać oczywiście także każda macierz reprezentująca rzut - proszę sprawdzić, że wykazuje ją znaleziona wyżej macierz $\Pi_{(e)(e)}$!). Podprzestrzeń będąca obrazem rzutu jest w naszym przypadku rozpinana przez wektory $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Jądro zaś (rozpinane przez wektory $\mathbf{v}_3$ $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$) możemy scharakteryzować podając wszystkie liniowo niezależne kowektory $\hat{\mathbf{v}}$ zerujące się na wszystkich wektorach należących do jądra.[36] Z istnienia bazy przestrzeni kowektorów (odwzorowujacych V w ciało $\mathbb{R}$) dualnej do bazy $\mathbf{v}_i$ przestrzeni V wynika, że są dwa takie kowektory. W bazie $\hat{\mathbf{e}}^k$ dualnej do kanonicznej zero-jedynkowej bazy $\mathbf{e}_i$ przestrzeni $\mathbb{R}^5$ mają one postać $\hat{\mathbf{v}} = v^{(e)}_k \hat{\mathbf{e}}^k$, gdzie składowe $v^{(e)}_k$ muszą spełniać trzy równania:

$$
\begin{aligned}
v^{(e)}_1 + v^{(e)}_2 + v^{(e)}_3 + \quad v^{(e)}_4 + v^{(e)}_5 &= 0 \, , \\
3\, v^{(e)}_3 + 2\, v^{(e)}_4 + v^{(e)}_5 &= 0 \, , \\
v^{(e)}_3 \qquad\quad + v^{(e)}_5 &= 0 \, .
\end{aligned}
$$

Odejmując ostatnie od dwu pierwszych łatwo się zorientować, że najogólniejszym rozwiązaniem tych warunków są składowe $v^{(e)}_1 = a$, $v^{(e)}_2 = -(a+b)$, $-v^{(e)}_3 = v^{(e)}_4 = v^{(e)}_5 = b$, w których stałe a i b są dowolne. Zatem dwa takie liniowo niezależne kowektory mają postać

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{v}}^1 &= a_1\, \hat{\mathbf{e}}^1 - (a_1 + b_1)\, \hat{\mathbf{e}}^2 - b_1\, \hat{\mathbf{e}}^3 + b_1\, \hat{\mathbf{e}}^4 + b_1\, \hat{\mathbf{e}}^5 \, , \\
\hat{\mathbf{v}}^2 &= a_2\, \hat{\mathbf{e}}^1 - (a_2 + b_2)\, \hat{\mathbf{e}}^2 - b_2\, \hat{\mathbf{e}}^3 + b_2\, \hat{\mathbf{e}}^4 + b_2\, \hat{\mathbf{e}}^5 \, .
\end{aligned}
$$

[36] Oczywiście teraz musimy przyjąć, że $\dim V = 5$.

Stałe $a_{1,2}$ i $b_{1,2}$ można by było dobrać np. tak, by

$$\hat{\mathbf{v}}^k(\mathbf{v}_j) = \delta^k{}_j \qquad \text{dla} \quad k, j = 1, 2\,.$$

ale dla naszego celu nie jest to konieczne. Wystarczy założyć, że są one takie, że kowektory $\hat{\mathbf{v}}^1$ i $\hat{\mathbf{v}}^2$ są linowo niezależne (odpowiedni warunek na $a_{1,2}$ i $b_{1,2}$ wyjdzie nam "w praniu"). Jasne jest jednak teraz w jakim sensie dwa kowektory charakteryzują jądro: rzut wyznaczany przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in \mathrm{im}\Pi$ i $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_5 \in \ker\Pi$ potraktowane jako baza p.w. V można zadać podając bazę $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ obrazu oraz dualne do $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ kowektory $\hat{\mathbf{v}}^1$, $\hat{\mathbf{v}}^2$ zerujace sie na wektorach $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$ rozpinających podprzestrzeń, wzdłuż której rzutujemy.

Skonstruujemy teraz macierz rzutu w bazie kanonicznej w postaci

$$\Pi_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -(a_1+b_1) & -b_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & -(a_2+b_2) & -b_2 & b_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Macierz po lewej jest utworzona z ustawionych "na sztorc" składowych (w kanonicznej zero-jedynkowej bazie) wektorów $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Jest to uzasadnione tym, że - co powinno być jasne z podanego powyżej sposobu znajdowania macierzy rzutu - działając tą macierzą na składowe jakiegoś wektora nienależącego całkowicie do jądra, musimy otrzymać jakąś kombinację liniową wektorów $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Macierz po prawej jest utworzona ze składowych kowektorów zadających jądro. Zapewnia ona zerowanie się $\Pi_{(e)(e)}$ w działaniu na kanoniczne składowe wektorów należących do jądra. (Kiedyś tam - jak zajmiemy się rzędami macierzy - stanie się też jasne, że zbudowanie macierzy $\Pi_{(e)(e)}$ z "przejściem" przez środkową macierz wymiaru 2×2 powoduje, że rząd macierzy $\Pi_{(e)(e)}$ jest równy dwa, tak jak powinien). Macierz środkową trzeba dobrać tak, by $\Pi_{(e)(e)}\cdot\Pi_{(e)(e)} = \Pi_{(e)(e)}$. Przystawiając do siebie dwie macierze $\Pi_{(e)(e)}$ widzimy, że musi zachodzić równość

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_1 & -(a_1+b_1) & -b_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & -(a_2+b_2) & -b_2 & b_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1}.$$

Wymnażamy więc i odwracamy:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b_1 - 2a_1 & 4b_1 \\ 4b_2 - 2a_2 & 4b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4(b_1a_2 - b_2a_1)} \begin{pmatrix} 2b_2 & -2b_1 \\ -2b_2 + a_2 & 2b_1 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Jak widać czynnik $b_1a_2 - b_2a_1$ musi być różny od zera - to jest właśnie warunek liniowej niezależności dwu kowektorów zadających jądro.

Aby otrzymać $\Pi_{(e)(e)}$ trzeba już tylko pracowicie powymnażać macierze:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2b_2 & -2b_1 \\ -2b_2 + a_2 & 2b_1 - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_2 & 2b_1 \\ 2b_2 & -2b_1 \\ 2b_2 + a_2 & -2b_1 - a_1 \\ 2b_2 + 2a_2 & -2b_1 - 2a_1 \\ 2b_2 + 3a_2 & -2b_1 - 3a_1 \end{pmatrix},$$

i wreszcie

$$\begin{pmatrix} -2b_2 & 2b_1 \\ 2b_2 & -2b_1 \\ 2b_2 + a_2 & -2b_1 - a_1 \\ 2b_2 + 2a_2 & -2b_1 - 2a_1 \\ 2b_2 + 3a_2 & -2b_1 - 3a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -(a_1 + b_1) & -b_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & -(a_2 + b_2) & -b_2 & b_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= (b_1 a_2 - b_2 a_1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Każdy element powstającej macierzy wychodzi proporcjonalny do czynnika $(b_1 a_2 - b_2 a_1)$, który wydzieliliśmy tu przed macierz). Po podzieleniu przez czynnik $4(b_1 a_2 - b_2 a_1)$ dostajemy tę samą macierz $\Pi_{(e)(e)}$, którą już otrzymaliśmy innym sposobem.

Uwaga: Powinno być jasne, że rzut jest wyznaczony nie przez same wektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$, lecz przez rozpinane przez dwa zbiory wektorów: $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ oraz $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$ dwie podprzestrzenie, na które rozłożona zostaje wyjściowa przestrzeń $\mathbb{R}^5$ (która musi być sumą prostą tych dwu podprzestrzeni).

Uwaga: Gdybyśmy chcieli rzutować wektory na podprzestrzeń rozpiętą przez $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$ "wzdłuż" podprzestrzeni rozpiętej przez $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, czyli dokładnie odwrotnie niż zrobiliśmy to w powyższym Zadaniu, to odpowiednią macierzą takiego rzutu w bazie $\mathbf{e}_i$ byłaby macierz $\Pi'_{(e)(e)} = I - \Pi_{(e)(e)}$ (I oznacza tu macierz jednostkową). Że $\Pi'_{(v)(v)} = I - \Pi_{(v)(v)}$ jest oczywiste; obłożenie tego związku wzajemnie odwrotnymi macierzami zmiany bazy $R_{e\leftarrow v}$ z lewej i $R_{v\leftarrow e}$ z prawej prowadzi natychmiast do $\Pi'_{(e)(e)} = I - \Pi_{(e)(e)}$. Nietrudno też zobaczyć, że $\Pi'_{(v)(v)} \cdot \Pi'_{(v)(v)} = \Pi'_{(v)(v)}$ oraz że (niezależnie od bazy) $\Pi'_{(v)(v)} \cdot \Pi_{(v)(v)} = \Pi_{(v)(v)} \cdot \Pi'_{(v)(v)} = 0$ (macierz zerowa).

Zadanie 43

W bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ pewnej trówymiarowej przestrzeni wektorowej wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ oraz $\mathbf{u}$ mają odpowiednio składowe

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć rzut wektora $\mathbf{u}$ na wektor $\mathbf{v}_1$ "wzdłuż" podprzestrzeni rozpinanej przez wektory $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$. Podać macierz rzutu w bazie $\mathbf{e}_i$.

Rozwiązanie: Po poprzednim zadaniu sprawa już jest prosta: musimy zapisać $\mathbf{u}$ w postaci kombinacji liniowej $\mathbf{v}_i$. Możemy to zrobić posługując się składowymi:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązując ze względu na λ_i otrzymujemy $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$. Stąd

$$\Pi(\mathbf{u}) = 2\,\mathbf{v}_1\,.$$

Aby znaleźć macierz rzutu w bazie $\mathbf{e}_i$ musimy mieć macierze zmiany bazy $R_{e\leftarrow v}$ oraz $R_{v\leftarrow e}$. Tę pierwszą mamy od ręki. Aby znaleźć drugą odwracamy układ

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

To jest proste: od drugiego odejmujemy pierwsze i mamy $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$; to do pierwszego i trzeciego daje

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &= 2\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\,, \\ \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 &= 3\,\mathbf{v}_1 - 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,. \end{aligned}$$

Znów od drugiego pierwsze da od razu $\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ i teraz wyznaczone $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ do pierwotnego pierwszego i $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$. W odruchu samokontroli[37] sprawdzamy mnożenie macierzy przejścia:

$$R_{e\leftarrow v} \cdot R_{v\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dobrze. Teraz możemy już napisać macierz rzutu:

$$\begin{aligned} \Pi_{(e)(e)} = R_{e\leftarrow v} \cdot \Pi_{(v)(v)} \cdot R_{v\leftarrow e} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[37] Odruch ten należy sobie wyrabiać przy każdej nadarzającej się okazji!

Oczywiście spełnia ona podstwowy wymóg: $\Pi_{(e)(e)} \cdot \Pi_{(e)(e)} = \Pi_{(e)(e)}$. Dla kontroli (kontroli nigdy dość!) podziałajmy jeszcze macierzą $\Pi_{(e)(e)}$ na składowe w bazie $\mathbf{e}_i$ wektora $\mathbf{u}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wyszły oczywiście podwojone składowe wektora $\mathbf{v}_1$.

Przy okazji można się przekonać, że rzut wektora $\mathbf{u}$ na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor $\mathbf{v}_1$ w istotny sposób zależy od tego "wzdłuż" jakiej podprzestrzeni rzutujemy: Gdybyśmy rzutowali, tak jak powyżej na podprzestrzeń rozpiętą przez $\mathbf{v}_1$, ale "wzdłuż" podprzestrzeni rozpiętej przez np. $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1$, to wynik rzutowania byłby inny: jeśli napisalibyśmy $\mathbf{u}$ jako kombinację liniową

$$\mathbf{u} = \lambda_1'\mathbf{v}_1 + \lambda_2'\mathbf{v}_2 + \lambda_3'\mathbf{v}_3' = (\lambda_1' + \lambda_3')\mathbf{v}_1 + \lambda_2'\mathbf{v}_2 + \lambda_3'\mathbf{v}_3\,,$$

to (co oczywiste z już wykonanych rachunków) otrzymalibyśmy $\lambda_2' = 0$, $\lambda_3' = -1$ oraz $\lambda_1' + \lambda_3' = 2$, czyli $\lambda_1' = 3$ i rzut $\mathbf{u}$ byłby równy $3\mathbf{v}_1$ (a nie $2\mathbf{v}_1$, jak poprzednio).

Szczególnie prosto znajduje się macierz $\Pi_{(e)(e)}$ drugim ze sposobów pokazanych w Zadaniu 42 (metoda ta jest tym prostsza im mniej wymiarów ma podprzestrzeń na którą rzutujemy, bo liczba tych wymiarów jest równa liczbie niezależnych kowektorów zerujących się na wektorach podprzestrzeni "wzdłuż" której rzutujemy). Obraz rzutu rozpina tu jeden wektor i jeden też tylko kowektor zeruje się na wszystkich wektorach będących kombinacjami liniowymi $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$. Kowektor ten, który można reprezentować jego składowymi (a, b, c) w bazie $\hat{\mathbf{e}}^i$ (dualnej do bazy $\mathbf{e}_i$) wyznaczają równania

$$\begin{aligned} a + b + 2c &= 0\,, \\ a + 2b + 3c &= 0\,. \end{aligned}$$

Najogólniejszy taki kowektor ma postać $(-c, -c, c)$. Zatem

$$\Pi_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot p \cdot \begin{pmatrix} -c & -c & c \end{pmatrix}\,.$$

p jest tu macierzaą wymiaru 1×1, czyli po prostu liczbą. Ponieważ

$$\Pi_{(e)(e)} \cdot \Pi_{(e)(e)} = p^2 \begin{pmatrix} -c & -c & c \\ -c & -c & c \\ -c & -c & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -c & -c & c \\ -c & -c & c \\ -c & -c & c \end{pmatrix} = p^2 \begin{pmatrix} c^2 & c^2 & -c^2 \\ c^2 & c^2 & -c^2 \\ c^2 & c^2 & -c^2 \end{pmatrix},$$

widać, że równość $\Pi_{(e)(e)} \cdot \Pi_{(e)(e)} = \Pi_{(e)(e)}$ wymaga, by $pc = -1$. Otrzymujemy więc ponownie tę samą macierz $\Pi_{(e)(e)}$, co powyżej.

Zadanie to warto rozwiązać jeszcze jednym, prostszym sposobem. Rozłóżmy najpierw całkiem ogólny wektor $\mathbf{w} = a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3$ na wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$. Sprowadza się to do rozwiązania układu równań (zobacz Zadania 17 i 31):

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Rozwiązujemy i znajdujemy: $\alpha = a + b - c$, $\beta = a - 2b + c$, $\gamma = -a + b$. Zatem po wyrzutowaniu na wektor $\mathbf{v}_1$ wzdłuż $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ wektor $\mathbf{w}$ przejdzie w wektor $\alpha\mathbf{v}_1$, co w działaniu na składowe oznacza, że

$$\Pi_{(e)(e)} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ a+b-c \\ a+b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Sztuczka (ta sama, co w Zadaniu 31 - w końcu rzut to też odwzorowanie liniowe, a wektory $\mathbf{v}_i$ definiujące rzut są właśnie tymi wektorami, na których działanie tego odwzorowania-rzutu znamy!) polega na tym, by składowe wektora otrzymanego w wyniku rzutu przedstawić w postaci macierzy działającej na składowe tegoż wektora. Ponieważ sam wektor $\mathbf{w}$ był najogólniejszy z możliwych, otrzymaliśmy macierz rzutu $\Pi_{(e)(e)}$ (tę samą oczywiście, co uprzednio).

Zadanie 44

Znaleźć wszystkie macierze X wymiaru 2×2 (nad ciałem $\mathbb{C}$) takie, że $X^2 = K$, gdzie

$$K = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}, \qquad \kappa \in \mathbb{C}.$$

Rozwiązanie: Oczywistymi macierzami X spełniającymi podany warunek są cztery macierze postaci

$$X = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\kappa} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\kappa} \end{pmatrix},$$

gdzie znaki pierwiastków na diagonali są ze sobą nieskorelowane. Jednak nie są to wszystkie takie macierze. Np. nietrudno sprawdzić, że podniesiona do kwadratu macierz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

daje macierz K z $\kappa = 3$ i nie jest ona żadną z podanych powyżej czterech macierzy. Widać więc, że rozwiązań może być "dużo", więcej niż naiwnie by można oczekiwać.

Aby znaleźć wszystkie macierze X takie, że $X^2 = K$, zastosujemy prosty chwyt (słuszny w dowolnej liczbie wymiarów).[38] Po pierwsze sprowadzamy problem do szukania pierwiastków macierzy jednostkowej, tj. szukamy wszystkich macierzy Y takich, że

$$Y^2 = I.$$

[38]Chwyt ten podał mi dr hab. Maciej Nieszporski w odpowiedzi na moje pytanie dotyczące pierwiastkowania macierzy.

W oczywisty sposób $X = \sqrt{\kappa}\, Y$. Następnie podstawiamy $Y = I - 2P$. Spełnienie warunku $Y^2 = I$ jest wtedy równoważne spełnianiu przez P równania:

$$P^2 = P\,.$$

Macierz P jest więc rzutem (patrz Zadania 42 i 43). Dwa trywialne rzuty: $P = I$ i $P = 0$ (macierz zerowa) dają dwa oczywiste "pierwiastki" z macierzy jednostkowej, a mianowicie $-I$ i I, ale innych rzutów w przestrzeni n-wymiarowej jest rzeczywiście "dużo" (w istocie, jak zaraz zobaczymy, nieprzeliczalnie wiele[39]).

W przypadku przestrzeni dwuwymiarowej można te wszystkie rzuty łatwo napisać. Przypomnijmy, że aby w takiej przestrzeni zadać rzut, trzeba wybrać jakieś dwa wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ rozpinające całą przestrzeń i w bazie tworzonej przez te dwa wektory macierz $P_{(w)(w)}$ rzutu może mieć jedną z czterech postaci:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dwie skrajne macierze dadzą oczywiście $P = 0$ i $P = I$ (w każdej bazie). Jeśli w pierwotnej bazie $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ przestrzeni V wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są postaci

$$\mathbf{w}_1 = a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{w}_2 = c\,\mathbf{e}_1 + d\,\mathbf{e}_2,$$

to wówczas macierzami zmiany bazy są

$$R_{e\leftarrow w} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \qquad R_{w\leftarrow e} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Warunek $ad - bc \neq 0$ jest oczywiście warunkiem liniowej niezależności wektorów $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$. Macierz $P_{(e)(e)} = R_{e\leftarrow w}\cdot P_{(w)(w)}\cdot R_{w\leftarrow e}$ otrzymana z drugiej macierzy $P_{(w)(w)}$ (tej z jedynką w lewym górnym rogu) ma postać

$$P_{(e)(e)} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad & -ac \\ bd & -bc \end{pmatrix}.$$

(Nietrudno sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że $P_{(e)(e)}\cdot P_{(e)(e)} = P_{(e)(e)}$). Wobec dowolności stałych a, b, c i d, druga nietrywialna macierz $P_{(e)(e)}$ (otrzymana z trzeciej macierzy $P_{(w)(w)}$, tej z jedynką w prawym dolnym rogu) mająca postać

$$P'_{(e)(e)} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -bc & ac \\ -bd & ad \end{pmatrix}.$$

nie daje już nic nowego (tj. zmieniając a, b, c i d w $P_{(e)(e)}$ wyczerpujemy zbiór wszystkich rzutów na podprzestrzenie jednowymiarowe). Zatem w przestrzeni dwuwymiarowej

[39] Czyli jest ich tyle, ilu Wielowców (skąd to?)

wszystkie pozostałe (poza tymi czterema oczywistymi) pierwiastki z macierzy $\mathrm{diag}(\kappa,\kappa)$ są postaci

$$X=\sqrt{\kappa}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{2}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad & -ac\\ bd & -bc\end{pmatrix}\right\}=\frac{\sqrt{\kappa}}{ad-bc}\begin{pmatrix}-ad-bc & 2ac\\ -2bd & ad+bc\end{pmatrix}.$$

W przestrzeni n wymiarowej rzutów jest odpowiednio więcej (rzutować można na podprzestrzeń n, $n-1$, $n-2$, $\dots$, 0 wymiarową) i nie daje się łatwo napisać potrzebnych macierzy przejścia, ale poza tym wszystko inne pozostaje bez zmian.

Zadanie 45

Funkcję $\exp(A)$, której argumentem jest macierz A definiujemy przez rozwinięcie w szereg Taylora:

$$\exp(A)=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{4!}A^4+\dots$$

(I, jest tu macierzą mającą na diagonali jedynki, i zera wszędzie poza diagonalą; kiedyś się dowiemy, że szereg ten jest zawsze zbieżny). Obliczyć eksponensy macierzy tA, tB oraz tC (gdzie $t\in\mathbb{R}$)

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Obliczmy najpierw $A\cdot A\cdot A=A\cdot A^2=A^3$:

$$\begin{aligned}A^3&=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nietrudno spostrzec, że $A^4=0$. Zatem w tym przypadku

$$\exp(tA)=I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\frac{t^3}{3!}A^3=\begin{pmatrix}1 & t & t^2 & t^3\\ 0 & 1 & 2t & 3t^2\\ 0 & 0 & 1 & 3t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Podobnie obliczmy $B \cdot B = B^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Widzimy, że $B^2 = 2^2 I$. Wnioskujemy stąd, że $B^3 = 2^2 B$, $B^4 = 2^4 I$, etc. Ogólnie $B^{2n} = 2^{2n} I$, $B^{2n+1} = B^{2n} \cdot B = 2^{2n} B = 2^{2n+1} \frac{1}{2} B$. Możemy więc napisać

$$\begin{aligned} \exp(tB) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (tB)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (tB)^{2n+1} \\ &= I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2} B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = I \operatorname{ch}(2t) + \frac{1}{2} B \operatorname{sh}(2t) . \end{aligned}$$

Obliczmy znowu $C^2 = C \cdot C$ oraz $C^3 = C^2 \cdot C$:

$$\begin{aligned} C^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że $C^3 = -3C$. Ogólnie zatem $C^{2n} = (-3)^{n-1} C^2$, a $C^{2n+1} = (-3)^n C$

$$\begin{aligned} \exp(t\,C) &= I - \frac{C^2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{3}\,t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{C}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{3}\,t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= I - \frac{C^2}{3} \Big(-1 + \cos(\sqrt{3}\,t) \Big) + \frac{C}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}\,t) . \end{aligned}$$

Uwaga: W tym zadaniu udało nam się znaleźć jawnie funkcję (eksponens) od macierzy, bo same macierze miały pewne szczególne właściwości.[40] Aby móc znajdować takie funkcje od dowolnych macierzy będziemy musieli jeszcze trochę rozbudować teorię.

[40]Np. macierz C jest w istocie rzeczy sumą trzech generatorów grupy obrotów $SO(3)$ w reprezentacji o spinie 1, tj. w reprezentacji wektorowej; macierz $\exp(tC)$ jest więc macierzą obrotu wokół osi wyznaczanej przez wektor $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$ o kąt $\phi = \sqrt{3}\,t$.

Przypomnienie.
Permutacją π nazywa się bijekcję (czyli odwzorowanie jeden-do-jednego) na siebie n-elementowego zbioru, np. podzbioru S liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Permutować można wszystkie zbiory skończone: np. zbiór słoni bojowych[41] w szyku albo zbiór wektorów bazy uporządkowanej jakiejś przestrzeni wektorowej (z permutacji wektorów bazy będziemy tu korzystać, bo już się z bazami oswoiliśmy, a ze słoniami jeszcze nie).

Permutację n liczb naturalnych będziemy zapisywać następująco (tzw. "zapis piętrusowy" - od piętrusów-autobusów, albo wagonów-piętrusów):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) & \pi(5) & \pi(6) & \pi(7) \end{pmatrix}.$$

Oczywiście zapis

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ \pi(2) & \pi(1) & \pi(3) & \pi(7) & \pi(6) & \pi(5) & \pi(4) \end{pmatrix},$$

oznacza tę samą permutację, tylko inaczej zapisaną. Dla przejrzystości, żeby lepiej kontrolować operacje permutowania staramy się zawsze permutowane elementy zbioru jakoś uporządkować przyczepiając im numerki. Podzbiory liczb naturalnych są oczywiście same z siebie takimi numerkami. Ogólnie więc permutację zbioru n-elementowego zbioru uporządkowanego $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ można zapisywać jako

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_{\pi(1)} & a_{\pi(2)} & a_{\pi(3)} & a_{\pi(4)} & a_{\pi(5)} & a_{\pi(6)} & a_{\pi(7)} \end{pmatrix}.$$

Tu już te a_i i $a_{\pi(i)}$ są elementami permutowanego zbioru uporządkowanego (czyli na przykład tymi słoniami bojowymi z numerami przyczepionymi na ogonach). Wszystkich możliwych permutacji zbioru o n elementach jest $n!$

Permutację π n-elementowego zbioru $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazywa się *cyklem* o długości k ($k \leq n$), jeśli zamyka się ona "w kółko" po k elementach. Jakoś trudno to zapisać przejrzyście, więc będzie przykład. Każda permutacja zbioru n-elementowego składa się z jednego n-elementowego cyklu lub kilku rozłącznych cykli o długościach k_1, k_2, ..., takich, że $k_1 + k_2 + \ldots = n$. Permutację można więc rozłożyć na cykle. Cykl o długości $k = 2$ nazywa się *transpozycją* (cykl o długości $k = 1$ jest oczywiście trywialny). Każdą permutację można oczywiście złożyć z kilku transpozycji. Minimalna liczba transpozycji, z których można złożyć cykl o długości k wynosi $k - 1$. Nieminimalna liczba transpozycji z jakiej można złożyć dany cykl (można przecież trochę "błądzić" składając cykl!) różni się od minimalnej zawsze o liczbę parzystą.

[41] Tych, co to je Hannibal przez Alpy ciągnął by, po wielu zwycięstwach nad Rzymianami, m.in. nad jeziorem Trazymeńskim, czy pod Kannami w sierpniu roku 216 p. Chr., w końcu, dzięki przebiegłej taktyce Fabiusza Kunktatora (a mówią, że kunktatorów w d... biją!), ugrzęznąć w południowej Italii i ewakuować się w końcu zurück do Afryki, czyli do Kartaginy...

Ważny w różnych zastosowaniach jest *znak* permutacji $\operatorname{sgn}\pi$. Jeśli π jest permutacją rozkładającą się na p rozłącznych cykli o długościach k_1, k_2, ..., k_p, to[42]

$$\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{k_1-1}\cdot(-1)^{k_2-1}\cdot\ldots\cdot(-1)^{k_p-1}\,.$$

Znak transpozycji jest z definicji ujemny, znak cyklu jest iloczynem znaków transpozycji, z których się on składa, a znak permutacji jest iloczynem znaków cykli, na które ta permutacja się rozkłada. Zatem dwie permutacje różniące się o jedną transpozycję mają przeciwne znaki. Ponadto $\operatorname{sgn}\pi = \operatorname{sgn}\pi^{-1}$.

Wszystkie permutacje zbioru n-elementowego tworzą grupę (tzw. grupę skończoną, bo są jeszcze grupy ciągłe, które mają nieprzeliczalnie wiele elementów) S_n.: złożenie dwóch permutacji jest permutacją, każdej permutacji odpowiada permutacja odwrotna, istnieje permutacja trywialna ("jedynka grupowa") taka, że jej złożenie z dowolną permutacją π daje tę samą permutację π. Grupa ta jest (gdy $n\geq 3$) nieprzemienna: $\pi_2\cdot\pi_1\neq\pi_1\cdot\pi_2$.

Zadanie 45.1

Napisać permutację odwrotną do permutacji

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5\end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Patent jest prosty: należy zamienić "pięterka" miejscami (odwrócić piętrusa do góry kołami) i właściwie już jest. Ale że umówiliśmy się pisać permutowane zbiory w sposób uporządkowany, to, jako drugi krok, porządkujemy górne piętro wraz z tym, co na dole:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

Inny sposób polega na potraktowaniu permutacji jak liniowego odwzorowania π n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V w nią samą, takiego, że obrazami wektorów $\mathbf{e}_i$, $i=1,\ldots,n$ pewnej jej bazy są też wektory tej samej bazy tylko w innej kolejności. Byłoby najwygodniej odwzorowanie to zdefiniować tak, by $\pi(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_2$, ..., $\pi(\mathbf{e}_7)=\mathbf{e}_5$. Z przyczyny, która niżej się wyjaśni, przyjmujemy jednak inną definicję: mianowicie definiujemy odwzorowanie π tak, iż $\pi(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_2$, $\pi(\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_1$, $\pi(\mathbf{e}_3)=\mathbf{e}_4$, $\pi(\mathbf{e}_4)=\mathbf{e}_3$, $\pi(\mathbf{e}_5)=\mathbf{e}_7$, $\pi(\mathbf{e}_6)=\mathbf{e}_5$, $\pi(\mathbf{e}_7)=\mathbf{e}_6$. Odpowiada to przyporządkowaniu wektorowi $\mathbf{e}_i$ o numerze i wektora $\mathbf{e}_j$ o numerze j znajdującym się w piętrusie *nad* numerkiem i. Następnie, zgodnie ze standardowymi regułami tworzymy macierz $S_\pi\equiv\pi_{(e)(e)}$ odwzorowania π:

$$S_\pi=\begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot\end{pmatrix}.$$

[42]Matematycy z niewiadomych powodów piszą $(-1)^{k_1+1}$ itd. (i tak jest też to pisane w zadaniach), co oczywiście daje ten sam znak permutacji, ale ukrywa fakt, że chodzi o minimalną liczbę transpozycji.

(Kropki oznaczają zera - czyni to zapis łatwiej czytelnym.) Znalezienie permutacji odwrotnej do danej sprowadza się teraz do napisania macierzy S_π^{-1} odwrotnej do S_π, która to macierz S_π^{-1}, podobnie jak S_π, w każdym wierszu i w każdej kolumnie może mieć tylko jedną jedynkę a poza tym same kropki (zera); dzięki temu nietrudno tę macierz napisać:[43]

$$S_{\pi^{-1}} = S_\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Po przetłumaczeniu na zapis dwupiętrowy macierz S_π^{-1} da to, co już wiemy.

Przedstawienie permutacji za pomocą macierzy pozwala zatem łatwo je składać: złożeniu dwóch permutacji $\pi_2 \cdot \pi_1$ odpowiada oczywiście iloczyn macierzy $S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_1}$. To właśnie to składanie permutacji "od prawej do lewej" (tzn. najpierw wykonujemy permutację π_1 zbioru, a potem wykonujemy permutację π_2) zmusza nas do przyjęcia takiej definicji odwzorowania π przestrzeni wektorowej V w nią samą (przyjęcie bardziej naturalnej definicji prowadziłoby do przyjęcia odwrotnej kolejności mnożenia macierzy w stosunku składania permutacji). Inny prosty sposób składania permutacji bezpośrednio na piętrusach jest pokazany w zadaniu o grupie permutacji S_3. Przyporządkowanie każdej permutacji π macierzy S_π w taki sposób, że $S_{\pi_2 \cdot \pi_1} = S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_1}$ nazywa się *reprezentacją grupy* przez odwzorowania liniowe pewnej przestrzeni wektorowej V w nią samą. Tu widzimy, że łatwo jest napisać *wierną* (tzn. taką, że jeśli $\pi_2 \neq \pi_1$, to $S_{\pi_2} \neq S_{\pi_1}$) n-wymiarową reprezentację grupy S_n.

Zadanie 45.2
Rozłożyć na rozłączne cykle permutację

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ustalić jej znak.
Rozwiązanie: Tu sposób polega na "wyciąganiu nitki z kłębka". Zaczynamy od 1. 1 przechodzi na 2, a 2 na 1. Jest więc to cykl. Następnie zaczynamy od pierwszego elementu nie uwikłanego w poprzedni cykl: 3 przechodzi na 4, a 4 na 3; jest więc drugi cykl. Następnie 5 przechodzi na 6, 6 na 7, a 7 na 5 i jest to trzeci cykl. Ostatni cykl jest trywialny: 8 przechodzi na 8. W notacji piętrusowej wygląda to następująco

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

[43] Można też zauważyć, że macierze reprezentujące permutacje zbioru n-elementowego są podzbiorem macierzy ortogonalnych, czyli tworzących grupę klasyczną $O(n)$, i wobec tego macierz odwrotna jest po prostu macierzą transponowaną.

(ostatniego, trywialnego cyklu już nie piszemy, bo i po co?) albo znacznie prościej:

$$(5,6,7)(3,4)(1,2),$$

co należy czytać tak, jak to, co napisane jest wyżej. Można to wreszcie przedstawić macierzowo

$$\begin{pmatrix}
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}.$$

Tu kolejność, w jakiej stoją te trzy macierze (czwartemu cyklowi odpowiada macierz jednostkowa, której już nie napisaliśmy) jest dowolna, bo cykle są rozłączne (wszystkie trzy wypisane macierze są każda z każdą przemienne). Odpowiada to temu, że $(5,6,7)(3,4)(1,2) = (5,6,7)(1,2)(3,4) = (1,2)(3,4)(5,6,7)$, etc.

Ponieważ badana permutacja rozkłada się na cztery cykle o długościach $(2,2,3,1)$, jej znak to $(-1)^1(-1)^1(-1)^2(-1)^0 = +1$.

Zadanie 45.3

Znaleźć π^{24}, czyli permutację będącą złożeniem 24-ech identycznych permutacji π danych wzorem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 9 & 1 & 3 & 10 & 4 & 2 & 7 & 11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Wygląda to na trudne zadanie, ale jest bardzo proste. Najpierw metodą "wyciągania nitki z kłębka" rozkładamy π na rozłączne cykle:

$$(6,10,11)(2,8)(1,5,3,9,7,4)\,.$$

Składa się więc ona z trzech rozłącznych cykli o długościach 6, 2 oraz 3. Jest jednak mniej więcej oczywiste, że p-krotne złożenie cyklu o długości p daje permutację trywialną, czyli tożsamość. Ponieważ 24 jest wielokrotnością długości każdego z rozłącznych cykli, na które rozkłada się permutacja π (i ponieważ kolejność składania rozłącznych cykli jest bez znaczenia), $\pi^{24} = \mathrm{id}$, tj. złożenie 24-ech permutacji π jest permutacją trywialną (tożsamościową).

Zadanie 45.4
Rozłożyć na rozłączne cykle dwie permutacje będące każda z osobna złożeniem trzech *nie*rozłącznych cykli:

$$(1,2,3,4)(1,2,3)(1,2) \qquad \text{oraz} \qquad (1,2)(1,2,3)(1,2,3,4)\,.$$

Rozwiązanie: Zapis wskazuje, że każda z podanych permutacji jest złożeniem trzech innych permutacji (bo cykl to też jest pewna permutacja) zbioru 4-elementowego. Dwa przypadki różnią się porządkiem, w jakim składane są te trzy permutacje: pierwsza to $\pi_3{\cdot}\pi_2{\cdot}\pi_1$, a druga to $\pi_1{\cdot}\pi_2{\cdot}\pi_3$. Wyreprezentujemy te trzy permutacje składowe macierzami 4×4:

$$S_{\pi_1} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_{\pi_2} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_{\pi_3} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Następnie mnożymy te trzy macierze w dwu różnych kolejnościach:

$$S_{\pi_3} \cdot S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad S_{\pi_1} \cdot S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_3} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1\cdot & \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Teraz można otrzymane permutacje zapisać piętrusowo:

$$S_{\pi_3} \cdot S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_{\pi_1} \cdot S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pierwsza z nich składa się z dwóch rozłącznych cykli o długości 2: $(1,4)(2,3)$, a druga z cyklu trzyelementowego $(1,3,4)$ i cyklu trywialnego. Otrzymany wynik pokazuje, że permutacje tworzą grupę nieprzemienną (inaczej: nieabelową).

Zadanie 45.5
Dana jest permutacja

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 15 & 13 & 11 & 12 & 7 & 10 & 4 & 5 & 6 & 1 & 14 & 8 & 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Napisać permutację odwrotną, czyli π^{-1}. Rozłożyć π na cykle. Wyznaczyć znak permutacji π. Podać permutację będącą 27-krotnym złożeniem permutacji π z nią samą, tj. π^{27}.

Rozwiązanie: Permutacja odwrotna: odwracamy piętrusa do góry kołami i porządkujemy:

$$\begin{pmatrix} 15 & 13 & 11 & 12 & 7 & 10 & 4 & 5 & 6 & 1 & 14 & 8 & 9 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 15 & 14 & 7 & 8 & 9 & 5 & 12 & 13 & 6 & 3 & 4 & 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teraz rozkład na rozłączne cycle. Z permutacji

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 15 & 13 & 11 & 12 & 7 & 10 & 4 & 5 & 6 & 1 & 14 & 8 & 9 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

wyciagamy nitkę z kłębka:

$$\pi = (1, 15, 2, 13, 9, 6, 10)(3, 11, 14)(4, 12, 8, 5, 7).$$

π składa się więc z trzech rozłącznych cykli o długościach 7, 3 i 5 (razem 15, więc się zgadza). Zatem jej znak to

$$\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{7-1} \cdot (-1)^{3-1} \cdot (-1)^{5-1} = +1\,.$$

Jest to permutacja parzysta. Przy 27-krotnym złożeniu π z nią samą środkowy cykl długości 3 przejdzie w identyczność (permutację trywialną, czyli żadną), bo 27 jest pełną wielokrotnością trzech. Cykl długości 5 po 25-krotnym złożeniu da też identyczność, więc efektywnie zostają tylko dwa złożenia (inaczej: 27-krotne złożenie tego cyklu jest tym samym, co jego złożenie dwukrotne). Przy złożeniu $(4, 12, 8, 5, 7)(4, 12, 8, 5, 7)$

$$4 \to 12 \to 8, \quad 12 \to 8 \to 5, \quad 8 \to 5 \to 7, \quad 5 \to 7 \to 4, \quad 7 \to 4 \to 12\,,$$

czyli dostajemy cykl $(4, 8, 7, 12, 5)$. Wreszcie, 28-krotne złożenie cyklu o długości 7 dałoby identyczność, więc jego złożenie 27-krotne jest tym samym co cykl będący permutacją odwrotną. Zapiszmy więc ten cykl w postaci piętrusa (na razie jako pełną permutację piętnastu liczb):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 15 & 13 & 3 & 4 & 5 & 10 & 7 & 8 & 6 & 1 & 11 & 12 & 9 & 14 & 2 \end{pmatrix},$$

obróćmy do góry kołami i uporządkujmy:

$$\begin{pmatrix} 15 & 13 & 3 & 4 & 5 & 10 & 7 & 8 & 6 & 1 & 11 & 12 & 9 & 14 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 15 & 3 & 4 & 5 & 9 & 7 & 8 & 13 & 6 & 11 & 12 & 2 & 14 & 1 \end{pmatrix},$$

czyli jest to cykl (znów nitkę z kłębka) postaci $(1, 10, 6, 9, 13, 2, 15)$. Widać, że gdybyśmy pisali odwracany cykl $(1, 15, 2, 13, 9, 6, 10)$ w postaci $(1, 15, 2, 13, 9, 6, 10, 1)$, czyli z tą 1, której z oszczędności nie piszemy, to odwrócić cykl by było banalnie łatwo: po prostu przepisalibyśmy go w odwrotnej kolejności: $(1, 10, 6, 9, 13, 2, 15, 1)$. No i teraz usuwamy tę ostatnią 1, której zgodnie z umową nie piszemy i już mamy!

Zatem permutacja π złożona sama ze sobą 27-krotnie składa się z dwóch nietrywialnych rozłącznych cykli

$$\pi^{27} = (1, 10, 6, 9, 13, 2, 15)(4, 8, 7, 12, 5)\,.$$

Teraz możemy (jeśli nam to do czegoś potrzebne) przerobić to na piętrusa

$$\pi^{27} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 15 & 3 & 8 & 4 & 9 & 12 & 7 & 13 & 6 & 11 & 5 & 2 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 45.6
Podać tabelkę składania permutacji zbioru trójelementowego.
Rozwiązanie: Najpierw trzeba jakoś te permutacje ponazywać. Niech

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Musimy poskładać wszystkie możliwe pary permutacji, tj. cierpliwie wykonać $3! \cdot 3! = 36$ operacji typu $\pi_i \cdot \pi_j$. Oczywiście $\pi_1 \cdot \pi_j = \pi_j \cdot \pi_1 = \pi_j$, więc operacji jest o 11 mniej, czyli tylko 25. No to do dzieła.

$$\pi_2 \cdot \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \pi_3\,.$$

Po prostu patrzymy (idąc od prawej strony): przy prawym π_2 1 przechodzi na 3, a 3 przy lewym π_2 na 2, więc w piętrusie będącym złożeniem $\pi_2 \cdot \pi_2$ pod 1 piszemy 2. I tak dalej. Na piętrusach składanie permutacji jest dość proste. Można też mnożyć macierze 3×3 podane w następnym zadaniu. No to jeszcze 24 takie operacje i mamy tabelkę 1. Tabelka pokazuje, że grupa S_3 jest nieprzemienna: $\pi_i \cdot \pi_j \neq \pi_j \cdot \pi_i$. Poza tym można w niej wyróżnić cztery bloki 3×3: w lewym górnym i prawym dolnym są permutacje parzyste (bo parzysta z parzystą i nieparzysta z nieparzystą dają parzystą), a w lewym dolnym i prawym górnym - nieparzyste (bo parzysta z nieparzystą daje nieparzystą).

Zadanie.
Jeśli w przestrzeni wektorowej, w której grupa jest reprezentowana, można tak wybrać bazę, że wszystkie macierze odpowiadające elementom grupy będą miały strukturę klatkową (wszystkie taką samą) i na mniejsze klatki tych macierzy (wszystkich jednocześnie) rozłożyć dalszą zmianą bazy już nie daje, to mówimy, że udało nam się rozłożyć reprezentację na reprezentacje nieprzywiedlne (dane przez te klatki). Rozłożyć naturalną

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_1	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_2	π_2	π_3	π_1	π_5	π_6	π_4
π_3	π_3	π_1	π_2	π_6	π_4	π_5
π_4	π_4	π_6	π_5	π_1	π_3	π_2
π_5	π_5	π_4	π_6	π_2	π_1	π_3
π_6	π_6	π_5	π_4	π_3	π_2	π_1

Tablica 1: Tabelka działań grupy permutacji S_3. W rubryczkach są złożenia $\pi_{\text{lewe}} \cdot \pi_{\text{gora}}$.

reprezentację trójwymiarową grupy S_3 (permutacji zbioru trójelementowego) na reprezentacje nieprzywiedlne.
Rozwiązanie: Trójwymiarową naturalną reprezentację grupy S_3 tworzy 6 macierzy

$$S^{\pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{\pi_2} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad S^{\pi_3} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$
$$S^{\pi_4} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{\pi_5} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad S^{\pi_6} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Traktujemy je jak macierze sześciu różnych odwzorowań przestrzeni wektorowej V w V w pewnej bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ więc, zgodnie z wprowadzoną w tym skrypcie notacją, $S^{\pi_j} \equiv S^{\pi_j}_{(e)(e)}$. Jest jasne, że jeśli zmienimy bazę przestrzeni V tak, by jednym z wektorów bazy był wektor $\mathbf{f}_1 \propto \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, to jego obrazem przy każdym z tych sześciu odwzorowań będzie on sam, czyli $\mathbf{f}_1$. Podprzestrzeń rozpięta na wektorze V jest więc podprzestrzenią niezmienniczą względem tych sześciu odwzorowań. Każde z nich ma jeszcze tę dodatkową właściwość, że zachowuje długości wektorów $\mathbf{e}_i$ (przy naturalnym iloczynie skalarnym $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, w którym baza $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ jest bazą ortonormalną). Możemy więc unormować wektor $\mathbf{f}_1$ i dokombinować dwa inne tak, by stworzyć bazę ortonormalną $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. Np. może to być baza dana wzorami

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Macierz tu stojąca, to macierz zmiany bazy $R_{e \leftarrow f}$. Ponieważ łączy ona dwie bazy ortonormalne (względem zwykłego iloczynu skalarnego), macierz odwrotna jest dana przez transpozycję: $R_{f \leftarrow e} = [R_{e \leftarrow f}]^T$.

Reszta jest sprawą tępego mnożenia macierzy:

$$\tilde{S}^{\pi_j} \equiv S^{\pi_j}_{(f)(f)} = [R_{e \leftarrow f}]^T \cdot S^{\pi_j}_{(e)(e)} \cdot [R_{e \leftarrow f}] .$$

Otrzymujemy:

$$\tilde{S}^{\pi_1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}^{\pi_2} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \cdot & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}^{\pi_3} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \cdot & -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S}^{\pi_4} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \cdot & \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}^{\pi_5} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \cdot & \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}^{\pi_6} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}.$$

Sześć klatek 2×2 w prawych dolnych rogach tych macierzy tworzy dwuwymiarową nieprzywiedlną reprezentację grupy permutacji zbioru trójelementowego, tzn. ich składanie podlega tym samym regułom składania elementów grupy S_3 zebranym w tabelce 1.

Otrzymane klatki 2×2 muszą być jakimiś macierzami z grupy $O(2)$ (bo klatki te są, jak łatwo dostrzec, macierzami ortogonalnymi). Grupę $O(2)$ tworzą wszystkie ortogonalne macierze $O(\alpha)$

$$O(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

z $0 \leq \alpha < 2\pi$ o wyznaczniku równym $+1$, tworzące przemienną grupę $SO(2)$ obrotów dwuwymiarowych, i ortogonalna macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

"parzystości" o wyznaczniku równym -1. To właśnie dołączenie tej macierzy powoduje, że grupa $O(2)$ jest nieprzemienna (i dlatego niema tu sprzeczności z nieprzemiennością grupy S_3):

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Pozostaje sprawdzić jakim elementom $O(2)$ odpowiadają otrzymane klatki 2×2 - oznaczmy je $S^{\pi_i}_{2\times2}$ - macierzy reprezentacji grupy S_3. Należy tu najpierw zauważyć, że wyznacznik równy $+1$ lub -1 macierzy $S^{\pi_i}_{2\times2}$ odpowiada parzystości permutacji. Zatem macierze $S^{\pi_1}_{2\times2}$, $S^{\pi_2}_{2\times2}$, $S^{\pi_3}_{2\times2}$ reprezentujące permutacje π_1, π_2 i π_3 muszą być macierzami z $SO(2)$, a więc tworzą podgrupę przemienną (istotnie: lewy górny blok 3×3 tabelki 1 z poprzedniego Zadania jest symetryczny i występują w nim tylko permutacje π_1, π_2 i π_3 - składając tylko te ze sobą nigdy nie dostajemy permutacji π_4, π_5 i π_6; zatem parzyste permutacje tworzą podgrupę w S_3). π_1 odpowiada oczywiście $\alpha = 0$, π_2 - $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, a π_3 - $\alpha = \frac{4}{3}\pi$. Z kolei każda z macierzy $S^{\pi_4}_{2\times2}$, $S^{\pi_5}_{2\times2}$, $S^{\pi_6}_{2\times2}$ reprezentujących permutację nieparzystą musi być iloczynem jakiejś macierzy z $SO(2)$ i macierzy P (bo wtedy wyznacznik jest równy -1). Żeby zobaczyć, czemu odpowiadają dwuwymiarowe macierze reprezentujące permutacje π_4, π_5 i π_6 umówmy sie, że przypasujemy je do macierzy $P \cdot O(\alpha)$. Wtedy można zobaczyć, że π_4 odpowiada $\alpha = \frac{4}{3}\pi$, π_5 - $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, a π_6 odpowiada $\alpha = 0$.

Jest mniej więcej oczywiste, że otrzymana tu nieprzywiedlna i wierna dwuwymiarowa reprezentacja grupy S_3 nie jest jednoznaczna: gdyby inaczej skierować wektory bazy $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ otrzymalibyśmy inne macierze również stanowiące dwuwymiarową reprezentację S_3, Nietrudno zrozumieć, że każdy zbiór macierzy otrzymanych z $S^{\pi_i}_{2\times 2}$ przez obłożenie ich macierzami: z lewej przez $O^T(\beta)$, a z prawej przez $O(\beta)$ z dowolnym β (ale takim samym dla wszystkich $S^{\pi_i}_{2\times 2}$) da również dwuwymiarową reprezentację grupy S_3 (tzn. da macierze 2×2 spełniające reguły składania zebrane w tabelce 1).

Przypomnienie.
Wyznacznikiem macierzy kwadratowej (wyznacznika macierzy niekwadratowej nie można zdefiniować w sposób, który by był sensowny, tj. użyteczny!)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

nazywamy liczbę (z ciała $\mathbb{K}$, z którego są elementy a_{ij} macierzy A) daną wzorem

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} \ .$$

Jest to suma $n!$ składników, z których każdy jest iloczynem n czynników będących elementami macierzy A. $\mathrm{sgn}(\pi)$ jest znakiem permutacji π czyli $(-1)^k$, gdzie k jest równe liczbie pierestanowok potrzebnych do ustawienia ciągu liczb $\pi(1), \pi(2), \pi(3), \dots, \pi(n)$ w porządku $1, 2, 3, \dots, n$.
Należy zauważyć, iż w każdym składniku $a_{1\pi(1)} a_{2\pi(1)} \dots a_{n\pi(1)}$ sumy definiującej wyznacznik występuje dokładnie po jednym elemencie z każdej kolumny i po jednym elemencie z każdego wiersza macierzy A, tzn. w każdym iloczynie będącym składnikiem sumy każda kolumna ma dokładnie jednego "reprezentanta" i każdy wiersz ma też dokładnie jednego "reprezentanta" (jest to tzw. *reguła reprezentantów*). Z powyższej definicji natychmiast otrzymujemy wzory

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \,,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \,,$$

jako mające należne liczby składników ($n!$) i spełniające regułę "reprezentantów". Ten ostatni wynik wygodnie zapamiętuje się jako regułę "mnożenia po skosach".
Uwaga: Studenci niekiedy mają nadzieję, że podobną metodę "mnożenia po skosach" można zastosować np. do obliczania wyznaczników macierzy 4×4. Niestety, to nie

działa, co widać choćby z tego, że nie dostaje się wtedy koniecznej liczby składników sumy ($4! = 24$).

Wygodnie jest też traktować wyznacznik macierzy A jak funkcję jej kolumn $\mathbf{C}_i$, $i = 1,\ldots,n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{C}_1\ \mathbf{C}_2\ \ldots \mathbf{C}_n)\,,$$

a kolumny $\mathbf{C}_i$, $i = 1,\ldots,n$ traktować z kolei jak wektory z $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ (ogólniej z $\mathbb{K}^n$)

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \qquad \ldots \quad \mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Właściwości wyznacznika

- jeśli choć jeden wiersz lub choć jednak kolumna macierzy A składa się z samych zer to $\det A = 0$ ("reguła reprezentantów"!)

- zamiana miejscami dwu kolumn lub dwu wierszy macierzy A zmienia znak wyznacznika (wyznacznik jest całkowicie antysymetryczną funkcją kolumn i wierszy macierzy A)

  $$\det(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_k\ \ldots \mathbf{C}_l\ \ldots \mathbf{C}_n) = -\det(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_l\ \ldots \mathbf{C}_k\ \ldots \mathbf{C}_n)\,,$$

  dla dowolnych $1 \leq k, l \leq n$

- jeśli wszystkie elementy jednej z kolumn A lub wszystkie elementy jednego z wierszy A pomnożymy przez λ to wyznacznik też ulegnie pomnożeniu przez λ

  $$\det(\mathbf{C}_1\ \ldots \lambda\mathbf{C}_k\ \ldots \mathbf{C}_n) = \lambda \det(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_k\ \ldots \mathbf{C}_n)\,,$$

- wyznacznik jest liniową funkcją każdej z kolumn (każdego z wierszy):

  $$\begin{aligned} \det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \lambda_1\mathbf{C}_k^{(1)} + \lambda_2\mathbf{C}_k^{(2)}\ \ldots \mathbf{C}_n\right) &= \lambda_1 \det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_k^{(1)}\ \ldots \mathbf{C}_n\right) \\ &\quad + \lambda_2 \det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_k^{(2)}\ \ldots \mathbf{C}_n\right) \end{aligned}$$

- wyznacznik nie zmienia się jeśli jedną z jego kolumn (lub wiersz) zastąpimy sumą tejże kolumy (wiersza) i dowolnej innej kolumny (wiersza) pomnożonej przez dowolną liczbę

  $$\det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \tilde{\mathbf{C}}_k\ \ldots \mathbf{C}_n\right) = \det(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_k\ \ldots \mathbf{C}_n)\,,$$

  gdzie $\tilde{\mathbf{C}}_k = \mathbf{C}_k + \sum_{j\neq k} \lambda_j \mathbf{C}_j$.

- $\det A = \det A^T$, gdzie macierz transponowaną A^T tworzy się z A przez odbicie elementów A symetrycznie względem diagonali wyznaczonej przez elementy a_{kk}:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

  Z tego wynika również, że wyznacznik można traktować jak funkcję wierszy $\mathbf{R}_1, \dots,$ $\mathbf{R}_n$ macierzy A, które to wiersze też można uważać za wektory z $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$

Z przedostatniej właściwości wynika natychmiast, że wyznacznik znika (tj. równa się zeru) zawsze, gdy wektory $\mathbf{C}_i$, $i = 1, n$ tworzące kolumny (lub wiersze) macierzy A są liniowo zależne (można bowiem wtedy takimi operacjami wyzerować jakąś całą kolumnę lub cały wiersz).

Przykłady Zadanie 45.7 Pokazać, że

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\,;$$

wynika to z tego, że w składnikach sumy występuje tylko po jednym elemencie z każdej kolumny i po jednym elemencie z każdego wiersza macierzy A. Stąd wyznacznik macierzy jednostkowej wymiaru $n \times n$ (o dowolnym n) jest równy zawsze 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\,,$$

bo trzeba zamienić miejscami kolumny drugą i czwartą.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

bo odejmując od czwartej kolumy dwa razy trzecią dostajemy zerową czwartą kolumnę.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24\,,$$

gdzie w pierwszym kroku od kolumn drugiej, trzeciej i czwartej odjęliśmy pierwszą, potem wyprowadziliśmy czynnik 2 przed wyznacznik, potem od kolumn trzeciej i czwartej odjęliśmy kolumnę drugą, potem wyprowadziliśmy czynnik 3 przed wyznacznik etc.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\,.$$

Najpierw od kolumn drugiej, trzeciej i czwartej odjęliśmy pierwszą, a potem zauważyliśmy, że wynik wynika (a cóż innego wynik mógłby robić, jak nie wynikać?) już z tego, iż w składnikach sumy dającej wyznacznik występuje tylko po jednym elemencie z każdej kolumny i po jednym elemencie z każdego wiersza. (Można też od wierszy drugiego, trzeciego i czwartego odjąć pierwszy i wyjdzie macierz diagonalna).

Z przykładów tych wynika wniosek: wyznacznik macierzy "górno-trójkątnej" lub "dolno-trójkątnej", tj. macierzy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \text{lub} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

jest równy iloczynowi jej elementów diagonalnych, bo przez dozwolone operacje na kolumnach lub wierszach (tj. operacje nie zmieniające wartości wyznacznika), które tu można przeprowadzić nie zmieniając elementów diagonalnych, można ją zawsze sprowadzić do macierzy diagonalnej.

Inny przykład. Zadanie 45.8. Obliczmy wyznacznik macierzy $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Odejmujemy od $n-1$ pierwszych kolumn ostatnią (tj. $\mathbf{C}_i \to \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_n$ dla $i = 1, \dots, n-1$), co da

$$\begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Jest to już macierz górnotrójkątna i jej wyznacznik jest równy $(-1)^{n-1}\,n\,(n-1)\ldots 1 = (-1)^{n-1}\,n!$.

Na koniec przykładów obliczmy jeszcze `dla naprzykładu`[44] wyznacznik macierzy 3×3

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8\cdot 4\cdot 0 + 7\cdot 3\cdot 2 + 5\cdot 1\cdot 6 - 2\cdot 4\cdot 6 - 8\cdot 1\cdot 3 - 5\cdot 7\cdot 0 = 0\,.$$

Zerowanie się wyznacznika zawsze sygnalizuje liniową zależność jego kolumn. I istotnie: w powyższej macierzy $\mathbf{C}_3 = -\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{C}_2$.

Przypomnienia

Minorem stopnia r macierzy A o wymiarach $n\times m$ (ważne: minory można także wybierać w macierzach niekwadratowych o $m\neq n$) nazywamy wyznacznik podmacierzy $r\times r$ utworzonej z macierzy A przez skreślenie $n-r$ jej wierszy i $m-r$ jej kolumn.

Dopełnieniem algebraicznym A_{jk} elementu a_{jk} macierzy *kwadratowej* A o wymiarach $n\times n$ (uwaga: tu znów mowa o macierzach *kwadratowych*!) nazywamy liczbę

$$A_{jk} \equiv (-1)^{j+k} M_{jk}\,,$$

gdzie M_{jk} jest minorem macierzy A utworzonym przez skreślenie jej j-tego wiersza i k-tej kolumny. Np. w przypadku macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dopełnieniem algebraicznym elementu a_{13} ($a_{13}=2$) jest

$$A_{13} = (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 117\,.$$

Rozwinięciem Laplace'a wyznacznika macierzy A wymiaru $n\times n$ względem j-tego wiersza nazywamy wzór

$$\det A = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + a_{j3}A_{j3} + \ldots + a_{jn}A_{jn}\,,$$

(niema tu sumowania po j !). Wyznacznik można także rozwinąć względem k-tej kolumny:

$$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}\,.$$

[44] jak by powiedział Jacek Fedorowicz

Wiersz j lub kolumna k mogą być wybrane dowolnie. Wobec tego, przy praktycznym stosowaniu tego rozwinięcia do obliczania wyznaczników najlepiej jest rozwijać względem kolumny (wiersza), w której jest najwięcej zer; dobrze jest też operacjami nie zmieniającymi wyznacznika trochę zer powytwarzać przed przystąpieniem do rozwijania.

Przykład tzn. **Zadanie 45.9**
Zastosujmy Laplace'a do macierzy górnotrójkątnej (wiemy co powinno wyjść). Rozwijamy jej wyznacznik względem ostatniego wiersza

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}A_{nn} = a_{nn}(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n-1} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}.$$

Ponieważ w ostatnim wierszu tylko element a_{nn} jest niezerowy, suma (rozwinięcie wyznacznika względem ostatniego wiersza) $a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + a_{n3}A_{n3} + \ldots + a_{nn}A_{nn}$ składa się tylko z ostatniego wyrazu. Następnie rozwijamy ponownie pozostały wyznacznik, względem ostatniego, $(n-1)$-ego, wiersza itd. Widać, że w rezultacie dostaje się znany wynik, że wyznacznik macierzy górno-trójkątnej jest iloczynem jej elementów diagonalnych. Można było uzyskać to samo rozwijając wyznacznik względem pierwszej kolumny (tylko żeby to przyzwoicie zapisywać, trzeba by było w każdym kolejnym kroku przenumerowywać elementy macierzy...)

Przykład tzn. **Zadanie 45.10**
Ma on ilustrować pożytki z wytwarzania zer.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ 7 & 6 & -3 & -7 & 12 \\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Przechodząc od jednej postaci macierzy do drugiej dokonaliśmy operacji $\mathbf{W}_2 \to \mathbf{W}_2 - 3\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_3 \to \mathbf{W}_3 + 2\mathbf{W}_4$. Druga postać już jest lepsza do potraktowania jej Laplacem: rozwijamy względem trzeciego wiersza:

$$\det A = (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

Teraz z kolei oba wyznaczniki najłatwiej zlaplaceować względem ich drugich wierszy, co sprowadzi obliczenie każdego z nich do obliczenia jednego wyznacznika 3×3. Co więcej, oba wyznaczniki 3×3 są takie same! Ostatecznie więc

$$\det A = (8+2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-16 + 2 + 72 - 16 - 12 + 12) = 10 \cdot 42 = 420.$$

Zadanie 46 (uświęcony tradycją wyznacznik Vandermonde'a[45])
Obliczyć wyznacznik

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Wyznacznik taki pojawił się już w Zadaniu 41.
Rozwiązanie: Sprawdźmy najpierw przypadki z $n = 2$ i $n = 3$:

$$n = 2 : \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 .$$

$$n = 3 : \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) .$$

Stawiamy więc hipotezę, że

$$V_n = \prod_{k>l} (x_k - x_l) .$$

Dowód przeprowadzamy posługując się indukcją matematyczną. Zakładamy, że teza jest prawdziwa dla V_{n-1}. Na V_n dokonujemy następujących operacji (nie zmieniających wyznacznika): $\mathbf{C}_n \to \mathbf{C}_n - x_n \mathbf{C}_{n-1}$, $\mathbf{C}_{n-1} \to \mathbf{C}_{n-1} - x_n \mathbf{C}_{n-2}, \dots$ $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 - x_n \mathbf{C}_1$. Daje to

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & x_1^2(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-3}(x_1 - x_n) & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & x_2^2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-3}(x_2 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ 1 & x_3 - x_n & x_3(x_3 - x_n) & x_3^2(x_3 - x_n) & \dots & x_3^{n-3}(x_3 - x_n) & x_3^{n-2}(x_3 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Teraz dokonujemy rozwinięcia Laplace'a V_n względem ostatniego wiersza, który ma tylko jeden niezerowy element:

$$V_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & x_1^2(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & x_2^2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ x_3 - x_n & x_3(x_3 - x_n) & x_3^2(x_3 - x_n) & \dots & x_3^{n-2}(x_3 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & x_{n-1}^2(x_{n-1} - x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix} .$$

[45] Nie mylić z Valdemortem czyli SamWieszZKim

Wyciągamy następnie z wiersza pierwszego wspólny czynnik $(x_1 - x_n)$, z drugiego czynnik $(x_2 - x_n)$, ... i z ostatniego wiersza czynnik $(x_{n-1} - x_n)$ i znajdujemy, że

$$\begin{aligned} V_n &= (-1)^{n+1}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\dots(x_{n-1} - x_n) \cdot V_{n-1} \\ &= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1}) \cdot V_{n-1}\,. \end{aligned}$$

To zaś kończy dowód, bo na mocy założenia indukcyjnego V_{n-1} jest już dany przez odpowiedni iloczyn.

Zadanie 46′[46]

Niech w wektorowej przestrzeni $\mathbb{R}^7$ zadana będzie forma objętości, tj. całkowicie antysymetryczna forma 7-liniowa $\mathrm{Vol} = \hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{e}}^7$, gdzie jedno-formy $\hat{\mathbf{e}}^i$ są dualne do kanonicznej zero-jedynkowej bazy $\mathbf{e}^i$ przestrzeni V. Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na siedmiu wektorach

$$\begin{bmatrix} 7\\1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6\\7\\1\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5\\1\\6\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4\\1\\1\\5\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3\\1\\1\\1\\4\\1\\1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2\\1\\1\\1\\1\\3\\1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1\\2 \end{bmatrix}.$$

A jak zmieni się objętość jeśli przedostatnia składowa drugiego wektora zmieni się w 2 ?
Rozwiązanie: Objętość jest z deficji wartością formy $\mathrm{Vol} = \hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{e}}^7$ na podanych (żywych) wektorach. Obliczenie tej wartości sprowadza się do obliczenia wyznacznika macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

W tym celu odejmujemy pierwszą kolumnę od pozostałych sześciu, co daje macierz

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[46] Treść tego zadanie dotyczy form antysymetrycznych wieloliniowych; niemniej jest ono po prostu ćwiczeniem w obliczaniu wyznaczników i dlatego znalazło się tutaj.

Dalej już prosto: jeśli do pierwszego wiersza dodamy ostatni pomnożony przez $\frac{6}{1}$, to w ostatniej kolumnie pozostanie tylko jedynka na siódmym miejscu i poza tym element 11 przejdzie w $7+\frac{6}{1}$; można teraz zlaplasować macierz względem ostatniej kolumny. Następnie w powstałej macierzy 6×6 dodajemy ostatni wiersz pomnożony przez $\frac{5}{2}$ do pierwszego, co znów zostawi tylko jeden niezerowy element w ostatniej kolumnie i zmieni element 11 na $7 + \frac{6}{1} + \frac{5}{2}$. Widać, że procedurę tę można kontynuować. W rezultacie wyznacznik jest równy

$$\begin{aligned}
\det A &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \left(7 + \frac{6}{1} + \frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) \\
&= (7+6) \cdot 720 + 6 \cdot 5^2 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\
&= 9360 + 30 \cdot (60 + 32 + 18 + 4) + 24 \cdot 12 = 9360 + 3420 + 288 = 13068.
\end{aligned}$$

Jeśli przedostatnia składowa drugiego wektora zmieni się w 2, to wyznacznik można obliczać tak jak wyżej, z tym, że w drugim kroku, gdy dodajemy szósty (w tym momencie jest to już ostatni) wiersz pomnożony przez $\frac{5}{2}$ do pierwszego, zmieni się też element 12 macierzy: przejdzie on w $y = -1+\frac{5}{2}$. Dalej wszystko idzie jak poprzednio, aż do momentu, gdy wskutek sukcesywnego laplasowania zostanie już tylko macierz 2×2; w tym momencie (oznaczając na chwilę x element 11) mamy

$$\begin{aligned}
\det A &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \det\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \\
&\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \left[\left(7 + \frac{6}{1} + \frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) \cdot 6 - 1 \cdot \left(-1 + \frac{5}{2}\right)\right] \\
&= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \left[7 + \frac{6}{1} + \frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6}\left(-1 + \frac{5}{2}\right)\right] \\
&= 13068 - 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5^2 = 13068 - 300 = 12768\,.
\end{aligned}$$

Zadanie 47
Udowodnić, że $\det C{=}\det A{\cdot}\det B$ jeśli

$$C = \begin{pmatrix} A_{p\times p} & [0]_{p\times l} \\ [0]_{l\times p} & B_{l\times l} \end{pmatrix}.$$

A i B są tu macierzami wymiarów odpowiednio $p\times p$ i $l \times l$, a $[0]_{p\times l}$ i $[0]_{l\times p}$ są macierzami zerowymi wymiarów $p \times l$ i $l \times p$.
Rozwiązanie: Można posłużyć się indukcją matematyczną względem l. Gdy $l = 1$, tzn. gdy macierz B składa się tylko z jednego elementu, wzór jest prawdziwy na mocy rozwinięcia Laplace'a (zastosowanego do ostatniej kolumny bądź ostatniego wiersza). Zakładamy więc, że wzór jest prawdziwy dla macierzy B wymiaru $(l-1)\times(l-1)$ i badamy przypadek macierzy B wymiaru $l \times l$. Rozwijamy wyznacznik całej macierzy C względem ostatniego

wiersza, w którym niezerowe są elementy $c_{p+l\ p+1} \equiv b_{l1}$, $c_{p+l\ p+2} \equiv b_{l2}$, ... $c_{p+l\ p+l} \equiv b_{ll}$:

$$\begin{vmatrix} A_{p\times p} & [0]_{p\times l} \\ [0]_{l\times p} & B_{l\times l} \end{vmatrix} = c_{p+l\ p+1}\,(-1)^{p+l+p+1} M^C_{p+l\ p+1} + c_{p+l\ p+2}\,(-1)^{p+l+p+2} M^C_{p+l\ p+2} + \dots$$
$$+ c_{p+l\ p+l}\,(-1)^{p+l+p+l} M^C_{p+l\ p+l}$$

$$= b_{l1}\,(-1)^{p+l+p+1} M^C_{p+l\ p+1} + b_{l2}\,(-1)^{p+l+p+2} M^C_{p+l\ p+2} + \dots$$
$$+ b_{ll}\,(-1)^{p+l+p+l} M^C_{p+l\ p+l}\ .$$

Każdy z minorów $M^C_{p+l\ p+k}$ $(k = 1, \dots, l)$ macierzy C jest teraz wyznacznikiem podmacierzy o wymiarach $(p + l - 1) \times (p + l - 1)$ składającej się z dwu niezerowych bloków: bloku wymiarów $p \times p$ w lewym górnym rogu i bloku o wymiarach $(l - 1) \times (l - 1)$ w prawym dolnym rogu; do takiego wyznacznika stosuje się zatem założenie indukcyjne. Na mocy tego założenia odpowiednie minory $M^C_{p+k\ p+l}$ $(k = 1, \dots l)$ macierzy C są równe odpowiednim minorom macierzy B razy wyznacznik macierzy A:

$$M^C_{p+k\ p+l} = \det A \cdot M^B_{kl}, \qquad k = 1, \dots l\,.$$

Zatem

$$\det C = (\det A) \cdot (-1)^{p+p} \cdot \left\{b_{l1}\,(-1)^{l+1} M^B_{l1} + b_{l2}\,(-1)^{l+2} M^B_{l2} + \dots + b_{ll}\,(-1)^{l+l} M^B_{ll}\right\}$$
$$= (\det A) \cdot (\det B)\,,$$

bo wyrażenie w nawiasie jest niczym innym, jak rozwinięciem Laplace'a wyznacznika macierzy B względem jej ostatniego wiersza.

Uwaga: Warto też pamiętać, choć nie dowodzimy tu tego, że

$$\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B)$$

i, co za tym idzie (bo wyznacznik macierzy jednostkowej jest równy 1),

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}\,.$$

Zadanie 47′

Obliczyć wyznacznik macierzy wymiaru $n \times n$ trójpasmowej tj. mającej na diagonali potrójny pas ("pas słucki, pas lity" - z czego to Młodzieży kochana?) jedynek (kropki oznaczają zera):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Oznaczmy D_n wyznacznik macierzy A wymiaru $n \times n$. Oczywiście $D_1 = 1$ i $D_2 = 0$. Rozwijając wyznacznik D_{n+2} macierzy wymiaru $(n+2) \times (n+2)$ względem ostatniego wiersza dostrzegamy natychmiast prosty związek rekurencyjny

$$D_{n+2} = D_{n+1} - D_n\,.$$

Ponieważ znamy D_1 i D_2, możemy obliczyć na piechotę

$$\begin{array}{cccccccccc} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & D_7 & D_8 & D_9 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & \dots \end{array}$$

Widać, że powtarzać się będą ciągi sześcioliczbowe (bo $D_7 = D_1$ i $D_8 = D_2$, a dwie kolejne liczby całkowicie determinują liczby następne). Jest więc to w zasadzie kompletne rozwiązanie, bo np.

$$D_{237} = D_{39\cdot 6+3} = D_3 = -1\,,$$

etc. Spróbujemy jednak znaleźć jakąś zwartą postać rozwiązania.

Znaleziony związek rekurencyjny można zapisać w formie macierzowej

$$\begin{pmatrix} D_{n+2} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n+1} \\ D_n \end{pmatrix}.$$

Oznaczmy występującą tu macierz F. Iterując moglibyśmy więc napisać, że

$$\begin{pmatrix} D_{n+2} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix},$$

i w zasadzie, biorąc pod uwagę, że $D_2 = 0$, a $D_1 = 1$ mielibyśmy rozwiązanie:

$$D_{n+2} = (F^n)_{12}\,.$$

Trzeba by tylko umieć podnieść macierz F do dowolnej potęgi, a tego jeszcze nie umiemy (ale jak się nauczymy, to będziemy takie rzeczy tak rozwiązywać - zob. Zadanie 72). Musimy więc uciec się do innej metody. Spróbujmy poszukać rozwiązania związku rekurencyjnego podstawiając doń

$$D_n = A\,\lambda^n\,.$$

Daje to równanie kwadratowe

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0\,,$$

którego pierwiastkami są

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\,(1 \pm i\sqrt{3}) \equiv e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\,.$$

Ponieważ pierwiastki te są zespolone, a wyznacznik D_n musi być liczbą rzeczywistą, możemy od razu napisać

$$D_n = A\, e^{i\frac{\pi}{3}n} + A^*\, e^{-i\frac{\pi}{3}n}\,.$$

Zespoloną stałą A wyznaczamy z warunków

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,(1+i\sqrt{3}\,)\,A\; + \;\frac{1}{2}\,(1-i\sqrt{3}\,)\,A^* &= D_1 = 1\,,\\ \frac{1}{4}\,(1+i\sqrt{3}\,)^2\,A + \frac{1}{4}\,(1-i\sqrt{3}\,)^2\,A^* &= D_2 = 0\,.\end{aligned}$$

Daje to $A = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}-i)$. Zatem

$$D_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(\sqrt{3}-i)\,e^{i\frac{\pi}{3}n} + (\sqrt{3}+i)\,e^{-i\frac{\pi}{3}n}\right] \equiv \cos\!\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\!\left(\frac{\pi}{3}n\right).$$

Można sprawdzić, że wzór ten odtwarza wyliczone wyżej liczby (wyznaczniki) D_1, D_2, ..., D_9. Widać też, że $D_{n+6} = D_n$.

Zadanie 47″
Napisać odwzorowanie $f\,:\,\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, tj. mówiąc po ludzku, funkcję robiącą z trzech wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jakiś wektor $\mathbf{d}\in\mathbb{R}^4$: $\mathbf{d} = \mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$, takie, że wektor $\mathbf{d}$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ (w sensie kanonicznego iloczynu skalarnego w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^4$)[47] i zarazem takie, że $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e_3}) = \mathbf{e}_4$, gdzie $\mathbf{e}_i$ są czterema wektorami kanonicznej zero-jedynkowej bazy $\mathbb{R}^4$.
Rozwiązanie: Napiszmy sobie macierz

$$A = \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 & x^1\\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3\\ a^4 & b^4 & c^4 & x^4\end{pmatrix},$$

i rozwińmy jej wyznacznik względem jej ostatniej kolumny:

$$\mathrm{det}A = x^1A_{14} + x^2A_{24} + x^3A_{34} + x^4A_{44}\,.$$

Wygląda to jak iloczyn skalarny (taki szkolny, czyli właśnie kanoniczny) wektora $\mathbf{x}$ o składowych x^i z wektorem (tu żywym, bo to w $\mathbb{R}^4$)

$$\begin{bmatrix} A_{14}\\ A_{24}\\ A_{34}\\ A_{44}\end{bmatrix},$$

[47]Ponieważ o iloczynach skalarnych nic jeszcze nie było, to powiedzmy, że chodzi po prostu o to, żeby $d^1a^1 + d^2a^2 + d^3a^3 + d^4a^4 = 0$, gdzie d^i i a^i są odpowiednio składowymi wektorów $\mathbf{d}$ i $\mathbf{a}$ w kanonicznej zero-jedynkowej bazie $\mathbf{e}_i$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i by analogiczne związki zachodziły z $a^i\to b^i$ oraz $a^i\to c^i$.

utworzonym z dopełnień algebraicznych macierzy A. Z właściwości wyznacznika (liniowa zależność kolumn) wynika, że jeśli za x^i weźmiemy składowe (w bazie kanonicznej, czyli po prostu jego elementy, bo to $\mathbb{R}^4$) wektora $\mathbf{a}$, lub $\mathbf{b}$, lub $\mathbf{c}$, to ten iloczyn skalarny zniknie. Zatem definiując odwzorowanie f tak, że kolejnymi pięterkami wektora $\mathbf{d}$ (czyli jego składowymi w kanonicznej zero-jedynkowej bazie $\mathbb{R}^4$) są dopełnienia algebraiczne A_{14}, A_{24}, A_{34} i A_{44} (będące funkcjami elementów wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$), spełnimy warunek ortogonalności $\mathbf{d}$ i wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$. Nietrudno zobaczyć, iż spełniony jest wtedy także i drugi warunek: jeśli za $\mathbf{a}$, lub $\mathbf{b}$, lub $\mathbf{c}$ w macierzy A wstawimy zero-jedynkowe wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$, to niezerowe będzie tylko dopełnienie algebraiczne A_{44}, czyli jako wektor $\mathbf{d}$ otrzymamy $\mathbf{e}_4$.

Przypomnienie
Uogólnieniem rozwinięcia Laplace'a są wzory

$$a_{l1}A_{j1} + a_{l2}A_{j2} + a_{l3}A_{j3} + \ldots + a_{ln}A_{jn} = \delta_{lj} \cdot \mathrm{det}A\,,$$

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + a_{2k}A_{2l} + \ldots + a_{nk}A_{nl} = \delta_{kl} \cdot \mathrm{det}A\,,$$

w których $\delta_{lj} = 1$, gdy $l = j$ i $\delta_{lj} = 0$, gdy $l \neq j$.

Wzory te pozwalają napisać macierz odwrotną do danej. Mianowicie: jeśli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

to

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{det}A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

(ważne: w A^{-1} na miejscu kj stoi A_{jk}, nie zaś A_{kj}!). Istotnie: gdy mnożymy A i A^{-1} to element c_{jk} macierzy $C = A \cdot A^{-1}$ jest równy

$$c_{jk} = \frac{1}{\mathrm{det}A} \left(a_{j1}A_{k1} + a_{j2}A_{k2} + \ldots + a_{jn}A_{kn}\right),$$

a to właśnie na mocy pierwszego ze wzorów będących uogólnionymi rozwinięciami Laplace'a da $c_{jk} = \delta_{jk}$. Nietrudno zobaczyć, że drugi z tych wzorów zapewnia, iż $(A^{-1} \cdot A)_{jk} = \delta_{jk}$.

Mamy stad natychmiast wzór na macierz A^{-1} odwrotną do macierzy A wymiaru 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 48
Korzystajac z powyższej metody[48] odwrócić macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy dopełnienia algebraiczne wszystkich alementów macierzy:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\,, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\,, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,,$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\,, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\,, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\,,$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1\,, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\,, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\,.$$

Wyznacznik macierzy A jest np. dany przez $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) = -1$. Stąd A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nietrudno sprawdzić, że istotnie jest to macierz odwrotna. Oczywiście, jeśli $\det A = 0$, to macierz odwrotna A^{-1} nie istnieje.

Przypomnienie
Układem Cramera nazywa się liniowy układ n równań na n niewiadomych

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & .. & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n\,, \end{array}$$

który równoważnie można zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix},$$

lub po prostu

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

[48] Inna, naogół znacznie szybsza metoda odwracania macierzy była podana w zadaniu 19. Tamże była podana także jeszcze inna metoda.

Wzory na macierz odwrotną prowadzą natychmiast do wzorów Cramera będących rozwiązaniem układu Cramera: $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$, lub jawnie:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Widać stąd, że

$$x_k = \frac{1}{\det A} \sum_{l=1}^{n} A_{lk} b_l = \frac{1}{\det A} \left(b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \ldots + b_n A_{nk} \right).$$

Uważniejsze spojrzenie na ten wzór ujawnia, że suma po jego prawej stronie jest po prostu rozwinięciem Laplace'a względem k-tej kolumny wyznacznika macierzy utworzonej z wyjściowej macierzy (*macierzy układu*) A przez zastąpienie jej k-tej kolumny wektorem $\mathbf{b}$ (tj. dokonaniu podstawień $a_{jk} \to b_j$, $j = 1, \ldots, n$):

$$x_k = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$
$$\uparrow k\text{−ta kolumna}$$

Tak więc dzięki wzorom Cramera rozwiązanie układu n liniowych równań na n niewiadomych sprowadza się do obliczenia $n+1$ wyznaczników macierzy $n \times n$. Wzory Cramera nie są szczególnie wygodnym sposobem rozwiązywania takiego układu równań ale jako jawne mają ważne znaczenie teoretyczne. Co więcej jeśli ze wszystkich x-ów potrzebny jest np. tylko x_k to wzory Cramera pozwalają wyznaczyć od razu tę niewiadomą bez wyznaczania pozostałych (sprowadza się to do obliczenia dwu wyznaczników tylko).

Ze wzorów Cramera można ponadto wysnuć dwa wnioski: po pierwsze, jeśli $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, a $\det A = 0$, to być może układ ma rozwiązanie ale nie można go znaleźć tą metodą (zobacz dalej) i po drugie, jeśli $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (jednorodny układ równań), to nietrywialne rozwiązanie $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ istnieje tylko wtedy, gdy $\det A = 0$ (bo jeśli $\det A \neq 0$, to wzory Cramera dają $x_i = 0$). Ten wniosek jest w fizyce niezwykle często wykorzystywany; tu będzie nam potrzebny m.in. przy rozwiązywaniu tzw. zagadnienia własnego operatora liniowego.

Zadanie 49
Z układu równań:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 5\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1\,, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2\,, \\ x_1 + \phantom{x_2 +{}} x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 3\,. \end{aligned}$$

wyznaczyć x_1.
Rozwiązanie: Macierz tego układu ma postać

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jej wyznacznik obliczamy dokonując najpierw prostej operacji: $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1$, co daje

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i teraz} \quad \det A = 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9\,.$$

Zgodnie z podanymi wzorami mamy więc

$$x_1 = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \left\{ -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right\}.$$

Stąd $x_1 = (1/9)[-3 \cdot 3 - 1 \cdot (-18)] = 1$. W podobny sposób można znaleźć (jeśli by były potrzebne) $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ i $x_4 = 3$. (Ponieważ rozwiązanie takiego układu równań jest, gdy $\det A \neq 0$, jednoznaczne więc zgadnięcie lub ściągnięcie od kolegi/koleżanki x_2, x_3 i x_4 i sprawdzenie, że wraz z x_1 spełniają one układ załatwia sprawę sprawdzenia poprawności wyliczonego własnoręcznie x_1).

Przypomnienie
Rząd $r(A)$ *macierzy* A wymiaru $m \times n$ (niekoniecznie kwadratowej), która ma n kolumn $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$: tworzących n wektorów o długości m (i elementach z ciała $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) jest to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów-kolumn $\mathbf{C}_i$. Rząd macierzy jest więc to wymiar podprzestrzeni liniowej $\mathbb{K}^n$ rozpinanej przez kolumny $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ macierzy A.

Przykład. Rząd macierzy A (nad ciałem $\mathbb{C}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & i & 2+i \end{pmatrix},$$

jest równy 2, bo $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$.

Właściwości rzędu macierzy. Rząd macierzy A i rząd macierzy transponowanej A^T są sobie równe:

$$r(A) = r(A^T)\,.$$

(Inaczej: rząd "kolumnowy" macierzy i jej rząd "wierszowy" są takie same). Wynika stąd natychmiast, że

$$r\left(A_{m\times n}\right) \leq \min(m,n)\,.$$

Rząd macierzy nie zmieni się jeśli

- którąś z kolumn (lub wierszy) pomnożymy przez jakąś liczbę $\lambda \neq 0$ (z ciała $\mathbb{K}$)
- przestawimy kolumny (wiersze)
- do jednej z kolumn (wiersza) dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn (wierszy)

Wykorzystując powyższe właściwości, rząd macierzy można ustalić stosując systematycznie eliminatkę Gaussa, tj. systematycznie zerując wszystkie prócz jednego (wykorzystywanego do tego celu) elementy w kolejnych wierszach (lub kolumnach).

Przykład
Znajdziemy rząd macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

stosując eliminatkę Gaussa. Najpierw $\mathbf{C}_{2,3} \to \mathbf{C}_{2,3} - \mathbf{C}_4$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Strzałka oznacza operacje: $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 - \mathbf{C}_1$. Następnie $\mathbf{C}_{1,2} \to \mathbf{C}_{1,2} + \mathbf{C}_3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W ostatnim ruchu kolumna $\mathbf{C}_2$ została użyta do wyzerowania dolnego pięterka pozostałych kolumn. Widać teraz, że cztery kolumny są wszystkie liniowo niezależne, czyli $r(A) = 4$,

Zadanie 50
Ustalić jaki jest rząd macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Oczywiście, rząd nie może być większy niż 3. Dokonajmy operacji: $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 - (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)$, $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 - 2(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)$. Daje to

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i natychmiast[49] widać, że $r(A) = 2$.

Zadanie 51
Jeszcze raz ustalić jaki jest rząd macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

trochę inną metodą[50] niż w podanym wyżej przykładzie **Rozwiązanie:** Dokonajmy operacji: $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 - \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1$. Daje to

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A dalej można po prostu rozwiązywać problem liniowej (nie)zależności kolumn: $\lambda_1 \mathbf{C}_1 + \lambda_2 \mathbf{C}_2 + \lambda_3 \mathbf{C}_3 + \lambda_4 \mathbf{C}_4 = \mathbf{0}$, czyli

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Wyrażając z ostatnich trzech równań λ_2, λ_3 i λ_4 przez λ_1 i wstawiając do pierwszego znajdujemy sofort, że $\lambda_1 = 0$, a stąd, z pozostałych równań $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Stąd kolumny $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ są liniowo niezależne, a co za tym idzie rząd wyjściowej macierzy jest równy 4, co można sprawdzić obliczając wyznacznik A ($\det A = -3 \neq 0$).

Przypomnienie
Rząd $r(A)$ macierzy A jest równy najwyższemu ze stopni n_k *niezerowych* minorów M_k^A jakie można z niej "wyjąć" (tj. utworzyć skreślając w A pewną liczbę kolumn i wierszy, tak by otrzymać podmacierz wymiaru $n_k \times n_k$). Ze stwierdzenia tego wynika natychmiast

[49] Jeszcze szybciej by poszło, gdyby na macierzy A dokonać operacji $\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 - (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)$.
[50] No, naprawdę to jest ta sama metoda tylko trochę inaczej zapisana.

to, że "rząd kolumnowy" macierzy jest taki sam, jak jej "rząd wierszowy". Stwierdzenie to daje nam jeszcze jedną metodę badania rzędu macierzy.

Zadanie 52
Ustalić jaki jest rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Niewątpliwie $r(A) \leq 4$, bo macierz ma tylko cztery wiersze. Zanim zaczniemy obliczać wyznaczniki lepiej wykonać parę operacji. Np.: $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 - 2\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 - 4\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_5 \to \mathbf{C}_5 - 4\mathbf{C}_2$. Dadzą one

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz zaryzykować i utworzyć minor M^A stopnia 4 skreślając pierwszą kolumnę:

$$M^A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

To już łatwo obliczyć: $M^A = -1 \cdot (-2) - 1 \cdot (1) = 1 \neq 0$. Znaleźliśmy więc w macierzy otrzymanej z A niezerowy minor stopnia 4, a to oznacza, że macierz, której minor ten jest wyznacznikiem, a zatem i sama macierz A jest rzędu 4 (gdyby wybrany minor okazał się zerowy, to wciąż nie moglibyśmy wykluczyć, że $r(A) = 4$; trzeba by wtedy sprawdzić kolejny z wszystkich pięciu minorów czwartego stopnia, jakie można wybrać w A).

Bez odwoływania się do kryterium minorowego rząd badanej macierzy moglibyśmy ustalić robiąc na niej najpierw operacje $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 - 2\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 - 3\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 - 4\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_5 \to \mathbf{C}_5 - 5\,\mathbf{C}_2$, co dałoby

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Strzałka oznacza operacje $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_1$. $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 - \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_5 \to \mathbf{C}_5 + \mathbf{C}_1$. Teraz już wystarczy wykorzystując czwartą kolumnę wyzerować ostatni element pierwszej, wykorzystując piątą wyzerować przedostatnie elementy pierwszej i drugiej kolumny i, na koniec, wykorzystując otrzymaną w wyniku tego pierwszą kolumnę wyzerować drugi element drugiej kolumny, by otrzymać jedną całkowicie zerową kolumnę (trzecią) i pozostałe każdą z jedną jedynką na innym pięterku, czyli cztery liniowo niezależne kolumny.

Przypomnienie
Ogólny układ m równań liniowych z n niewiadomymi postaci

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m\,, \end{aligned}$$

lub, równoważnie,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix},$$

lub, jeszcze inaczej, ale wciaż równoważnie,

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix},$$

ma rozwiązanie, czyli jest *niesprzeczny*, gdy rząd *macierzy rozszerzonej* A^R układu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

jest nie większy (mniejszy być nie może) niż rząd macierzy A układu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Jest to oczywiste jeśli zapisać ostatnią z podanych postaci układu równań jako równość

$$x_1\mathbf{C}_1 + x_2\mathbf{C}_2 + \ldots + x_n\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_B\,,$$

która oznacza, że wektor-kolumna $\mathbf{C}_B$ musi się dać przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów-kolumn $\mathbf{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$ macierzy A. Oznacza to bowiem, że kolumna $\mathbf{C}_B$ musi być liniowo zależna od kolumn $\mathbf{C}_i$, czyli jej dostawienie do macierzy A w celu stworzenia macierzy rozszerzonej A^R nie może podwyższyć rzędu macierzy.

Ogólna postać rozwiązania. Jeśli $r(A^R) = r(A) = r$, gdzie z konieczności $r \leq \min(n, m)$, tj. jeśli układ jest niesprzeczny, to w macierzy A musi się dać wybrać niezerowy minor stopnia r, tj. musi w niej istnieć podmacierz $A_{\rm red}$ wymiaru $r\times r$ o niezerowym wyznaczniku (trzeba ją znaleźć). Załóżmy, że podmacierz ta składa się z r pierwszych kolumn i r pierwszych wierszy macierzy A (zawsze można tak przenumerować równania i niewiadome x_i, żeby tak było). Możemy wtedy odrzucić równania, których współczynniki a_{jk} nie wchodzą do znalezionej podmacierzy $r\times r$ o niezerowym wyznaczniku (czyli przy powyższym założeniu, $m-r$ ostatnich równań), a zmienne, x_l, których współczynniki a_{kl} nie wchodzą do owej podmacierzy (czyli tu zmienne x_{r+1}, …, x_n) należy uznać za dowolne (żeby to podkreślić nadajemy im nowe nazwy $x_{r+1}=\alpha_1$, …, $x_n=\alpha_{n-r}$) i przenieść na drugą stronę równań. Następnie rozwiązujemy układ zredukowany

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r &=& b_1-a_{1r+1}\alpha_1+\ldots-a_{1n}\alpha_{n-r}\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r &=& b_2-a_{2r+1}\alpha_1+\ldots-a_{2n}\alpha_{n-r}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r &=& b_r-a_{rr+1}\alpha_1+\ldots-a_{rn}\alpha_{n-r}\ ,
\end{array}$$

Ten układ równań ma już, zgodnie z twierdzeniem Cramera, jednoznaczne rozwiązanie (przy ustalonych wartościach α_1, …, α_{n-r}), bo odpowiadająca mu macierz problemu $A_{\rm red}$ ma rząd równy r. Co więcej, zagwarantowane jest, że odrzucone równania są również spełnione, bo kolumna $\mathbf{C}_B$ jest liniowo zależna od kolumn $\mathbf{C}_1,\ldots,\mathbf{C}_n$.

Wynika z tego wszystkiego, że układ m równań na n niewiadomych ma jedno (jednoznaczne) rozwiązanie tylko gdy $r(A)=n$ (bo wtedy po prawej stronie powyższego układu niema żadnych dowolnych α_i. (To samo inaczej: wszystkie wektory-kolumny $\mathbf{C}_1$, …, $\mathbf{C}_n$ są wtedy liniowo niezależne i rozłożenie na nie wektora-kolumny $\mathbf{C}_B$ jest jednoznaczne). Jeśli $r(A)=r(A^R)=r<n$, to rozwiązanie jest niejednoznaczne bo zależy od $n-r$ dowolnych stałych α_1, …, α_{n-r} (skądinąd jest tak zawsze, gdy $n>m$; czyli w takim przypadku jeśli rozwiązanie istnieje, to nie może być jednoznaczne). W ogólnym przypadku (gdy układ jest niesprzeczny), po skorzystaniu z macierzy $A^{-1}_{\rm red}$ odwrotnej do macierzy $A_{\rm red}$ wypisanego wyżej układu zredukowanego (r równań na r zmiennych) rozwiązanie tegoż zredukowanego układu ma - ponieważ działanie $A^{-1}_{\rm red}$ na wektor stojący po prawej stronie jest liniowe - ma strukturę

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\x_r\end{pmatrix}=A^{-1}_{\rm red}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdot\\b_r\end{pmatrix}-\alpha_1\,A^{-1}_{\rm red}\cdot\begin{pmatrix}a_{1,r+1}\\a_{2,r+1}\\\cdot\\a_{r,r+1}\end{pmatrix}+\ldots-\alpha_{n-r}\,A^{-1}_{\rm red}\cdot\begin{pmatrix}a_{1,n}\\a_{2,n}\\\cdot\\a_{r,n}\end{pmatrix}.$$

W pełnej krasie rozwiązanie całego układu można więc zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\x_r\\x_{r+1}\\\cdot\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1^{\rm (s)}\\x_2^{\rm (s)}\\\cdot\\x_r^{\rm (s)}\\0\\\cdot\\0\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}\tilde{x}_1^{(1)}\\\tilde{x}_2^{(1)}\\\cdot\\\tilde{x}_r^{(1)}\\1\\\cdot\\0\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_{n-r}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1^{(n-r)}\\\tilde{x}_2^{(n-r)}\\\cdot\\\tilde{x}_r^{(n-r)}\\0\\\cdot\\1\end{pmatrix},$$

w której pierwsza kolumna (r pierwszych jej elementów jest danych działaniem A_{red}^{-1} na pierwsze r elementów wektora-kolumny $\mathbf{C}_B$) jest szczególnym rozwiązaniem wyjściowego układu *niejednorodnego*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(\mathrm{s})} \\ x_2^{(\mathrm{s})} \\ \cdot \\ x_r^{(\mathrm{s})} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix},$$

a kolejne kolumny są $n-r$ liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania *jednorodnego*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(k)} \\ \tilde{x}_2^{(k)} \\ \cdot \\ \tilde{x}_r^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \dots, n-r \ .$$

(w wektorze po lewej jedynka jest na $r+k$-tym miejscu; wyrażamy tu minus k-tą kolumnę przez r pierwszych kolumn, które przy przyjętych założeniach są liniowo niezależne). Dlatego mówimy, że przestrzeń rozwiązań wyjściowego układu równań jest $n-r$ wymiarowa.

Przykład
Szukamy rozwiązań układu równań:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1\,, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &= -1\,, \\ x_1 \qquad + 7x_3 - 4x_4 &= 4\,. \end{aligned}$$

Macierzą tego układu jest

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście $r(A) \leq 3$. Aby wyznaczyć $r(A)$ dokonujemy operacji: $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1$, co sprowadza A do

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Widać teraz, że $\mathbf{C}_4 = -3\mathbf{C}_2$, a $\mathbf{C}_3 = 5\mathbf{C}_2$. Ponieważ kolumny $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ są liniowo niezależne więc $r(A) = 2$. Jest też oczywiste, że macierz rozszerzona układu

$$A^R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

ma ten sam rząd, bo jej ostatnia kolumna jest po prostu równa minus przedostatniej, tj. $\mathbf{C}_B = -\mathbf{C}_4$. Z tego powodu przykład ten jest trywialny: gołym okiem widać, że $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = -1$ jest rozwiązaniem; nie jest to jednak rozwiązanie jedyne. Zastosujmy ogólną teorię: niezerowym minorem stopnia 2 w A może być np. minor utworzony z dwu pierwszych wierszy kolumn $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$. Postępując teraz według podanego przepisu odrzucamy trzecie równanie, a wyrazy z x_3 i x_4 po nadaniu im nowych nazw: $x_3 \equiv \alpha$, $x_4 \equiv \beta$, przenosimy na prawą stronę:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 - 2\alpha + \beta\,, \\ 2x_1 - 3x_2 &= -1 + \alpha - \beta\,. \end{aligned}$$

Rozwiązujemy ten układ (np. metodą macierzy odwrotnej):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3+2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha + \beta \\ -1 + \alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 7\alpha + 4\beta \\ 3 - 5\alpha + 3\beta \end{pmatrix}.$$

Czyli $x_1 = 4 - 7\alpha + 4\beta$, $x_2 = 3 - 5\alpha + 3\beta$. Sprawdzamy, że ostatnie (odrzucone) równanie też jest spełnione (musi być; jest więc to sprawdzenie, czy się nie pomyliliśmy w rachunkach):

$$4 - 7\alpha + 4\beta + 7\alpha - 4\beta = 4\,.$$

Ponieważ $x_3 = \alpha$, a $x_4 = \beta$ można ostatecznie rozwiązanie zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zapis ten czyni jawną ogólną strukturę rozwiązania: jest ono sumą jakiegoś jednego szczególnego rozwiązania (pierwszy wektor po prawej stronie) pełnego niejednorodnego układu równań oraz najogólniejszego rozwiązania układu jednorodnego reprezentowanego po prawej stronie przez dowolną (z dowolnymi współczynnikami α i β) kombinację liniową wszystkich wektorów, na których macierz A daje zero:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wspomniane wyżej, widoczne na pierwszy rzut oka rozwiaząnie $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = -1$, jest szczególnym przypadkiem wypisanego wyżej najogólniejszego rozwiązania i odpowiada przyjęciu $\alpha = 0$ i $\beta = -1$.

Zadanie 53
Rozwiązać (jeśli to możliwe) układ:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2\,, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &= 3\,. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Badamy najpierw rząd macierzy układu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po operacjach: $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_1$ przyjmuje ona postać

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie w przedostatnim kroku zrobiono operację $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 - 2\mathbf{C}_3$, a w ostatnim $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$. Ponieważ teraz kolumny pierwsza i trzecia są wzajemnie do siebie proporcjonalne (a czwarta jest zerowa), więc rząd macierzy układu jest równy 2. Następnie sprawdzamy rząd macierzy rozszerzonej

$$A^R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Po wykonaniu tych samych operacji, co poprzednio na macierzy A dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Widać, że minor stopnia 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 3 = 1 \neq 0\,,$$

z czego wniosek, że macierz rozszerzona ma rząd równy 3. Zatem układ równań jest sprzeczny, mimo iż zmiennych jest więcej (cztery) niż równań do spełnienia (trzy).

Zadanie 54
Znaleźć najogólniejsze rozwiązanie układu równań liniowych

$$\begin{aligned} 2x - \ y + \ 3z &= 7\,, \\ 3x + 2y - \ 5z &= 4\,, \\ 4x + 5y - 13z &= 1\,. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Macierz A tego problemu i macierz rozszerzona A^R mają postacie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & 5 & -13 \end{pmatrix}, \qquad A^R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po dokonaniu operacji (tych samych na obu macierzach) $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 + 3\mathbf{C}_2$, a następnie $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 - 3\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 - 2\mathbf{C}_3$ otrzymujemy z A i A^R odpowiednio macierze

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}^R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Widać, że pierwsza kolumna obu macierzy jest proporcjonalna do drugiej, więc rząd macierzy A jest równy 2. Obliczając zaś wyznacznik podmacierzy tworzonej przez ostatnie trzy kolumny macierzy $\tilde{A}^R$ znajdujemy $-1 - 7 + 8 = 0$, skąd płynie wniosek, że rząd macierzy rozszerzonej też jest równy 2. (Istotnie: $\mathbf{C}_4 = -7\mathbf{C}_2 + 4\mathbf{C}_3$). Zatem układ jest niesprzeczny. Aby wypisać najogólniejsze jego rozwiązanie znajdziemy najpierw najogólniejsze rozwiązanie równania jednorodnego (użyjmy λ_1, λ_2, λ_3 w miejsce x_1, x_2, x_3; czemu? a tak sobie!)

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \ \lambda_2 + \ 3\lambda_3 &= 0\,, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \ 5\lambda_3 &= 0\,, \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 - 13\lambda_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Z pierwszego $\lambda_2 = 2\lambda_1 + 3\lambda_3$. To do drugiego i trzeciego:

$$\begin{aligned} 7\lambda_1 + \ \lambda_3 &= 0\,, \\ 14\lambda_1 + 2\lambda_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Widać, że $\lambda_3 = -7\lambda_1$, $\lambda_2 = -19\lambda_1$ spełnia te równania niezależnie od wartości λ_1.

Następnie szukamy jakiegoś szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego. Możemy w tym celu[51] położyć $z = 0$. Mamy wtedy

$$2x - \ y = 7\,,$$

[51] Gdybyśmy nie znaleźli wcześniej rozwiązania równania jednorodnego, to tak postępując ryzykowalibyśmy trochę, bo zakładalibyśmy tym samym, że kolumna $\mathbf{C}_3$ macierzy A jest liniowo zależna od $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ - mogłoby się akurat okazać, że nie jest. Ale skoro już mamy rozwiązanie równania jednorodnego, to wiemy z niego, że dowolną z trzech kolumn można wyrazić jako kombinację liniową dwu pozostałych i żanego ryzyka tu nie podejmujemy. W przyjętej tu metodzie chodzi o pokazanie, jak można próbować rozwiązać układ nie pamiętając metody "regulaminowej",

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &= 4\,, \\
4x + 5y &= 1\,.
\end{aligned}
$$

skąd, dodając dwa razy pierwsze do drugiego, znajdujemy $7x = 18$, a potem z pierwszego $y = 2x - 7 = -\frac{13}{7}$. Trzecie równanie jest wtedy też spełnione (co jest zagwarantowane tym, że układ jest niesprzeczny, ale dobrze to sprawdzić jawnie, bo można wtedy wykryć własne błędy rachunkowe). Najogólniejsze rozwiązanie wyjściowego układu jest sumą szczególnego rozwiązania układu niejednorodnego i ogólnego rozwiązania układu jednorodnego:

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -19 \\ -7 \end{pmatrix}.
$$

Ten sam wynik uzyskuje się oczywiście metodą ogólną: Minor uworzony z elementów dwu pierwszych kolumn i dwu pierwszych wierszy macierzy wyjściowego układu jest niezerowy, więc skreślamy ostatnie równanie, a "wystające" poza minor wyrazy z niewiadomą z przenosimy na drugą stronę podstawiając $z = \alpha$. Rozwiązujemy więc układ zredukowany

$$
\begin{aligned}
2x - y &= 7 - 3\,\alpha \\
3x + 2y &= 4 + 5\alpha\,,
\end{aligned}
$$

skąd mamy

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 - 3\alpha \\ 4 + 5\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 18 - \alpha \\ -13 + 19\alpha \end{pmatrix},
$$

Łatwo sprawdzić, że skreślone trzecie równanie jest też spełnione (z $z = \alpha$):

$$
4 \cdot \frac{1}{7}(18 - \alpha) + 5 \cdot \frac{1}{7}(-13 + 19\alpha) - 13\alpha = 1\,.
$$

Widać że otrzymuje się tą drogą to samo rozwiązanie, co poprzednio (tamto odpowiada temu tu z $\alpha = -7\lambda_1$).

Zadanie 55
Zbadać istnienie rozwiązań (i znaleźć najogólniejsze, jeśli istnieje) układu równań

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},
$$

w zależności od wartości parametru a.
Rozwiązanie: Zobaczmy najpierw kiedy kolumny macierzy po lewej stronie są liniowo niezależne i ile ich jest liniowo niezależnych (czyli jaki jest rząd tej macierzy). W tym celu obliczamy wyznacznik tej macierzy:

$$
\det A = 3a - a^3 - 2 = -(a-1)(a^2 + a - 2) = -(a-1)^2(a+2)\,.
$$

Wyznacznik zeruje się więc, gdy $a = 1$ lub gdy $a = -2$. $a = 1$ jest pierwiastkiem podwójnym równania $\det A = 0$ i, jak od razu widać, wszystkie trzy kolumny macierzy są takie same czyli rząd macierzy jest równy 1 (tj. pierwiastek podwójny obniża rząd macierzy o 2). Widać też, że układ jest wtedy sprzeczny. Gdy $a = -2$ rząd macierzy wynosi 2 (np. po wstawieniu $a = -2$ zobaczyć, że nie znika lewy górny minor stopnia 2). Rozwiązanie wtedy istnieje, bo ostatnia kolumna macierzy jest wtedy po prostu równa minus wektorowi po prawej stronie (inaczej: gdy $a = -2$, rząd macierzy rozszerzonej nie przewyższa rzędu macierzy wyjściowej). Jeśli $a \neq 1$ i $a \neq -2$, wyznacznik nie znika, czyli trzy kolumny są liniowo niezależne i układ ma zawsze rozwiązanie, które można znaleźć np. ze wzorów Cramera.

$$x_1 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^2 + a - 2}{\det A} = (1-a)^{-1},$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^2 + a - 2}{\det A} = (1-a)^{-1},$$

$$x_3 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-2a^2 - 2a + 4}{\det A} = 2(a-1)^{-1}.$$

Widać, że gdy $a = 1$ rozwiązanie staje się osobliwe, ale zera mianowników w $a = -2$ skróciły się z zerami liczników. Pozornie więc nic tu nie wyróżnia przypadku $a = -2$. Jednak dzięki zbadaniu rzędu macierzy problemu w funkcji parametru a wiemy, że gdy $a = -2$ tylko dwie kolumny tej macierzy są liniowo niezależne i wobec tego przestrzeń rozwiązań jest jednowymiarowa: do rozwiązania dawanego (w granicy $a \to -2$) przez Kramersięta możemy dodać jeszcze z dowolnym współczynnikiem wektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

na którym, gdy $a = -2$, macierz A problemu zeruje się.

Zadanie 56

Zbadać istnienie rozwiązań (i jeśli istnieją, podać je) układu równań

$$\begin{pmatrix} 3a-1 & 2a & 3a+1 \\ 2a & 2a & 3a+1 \\ a+1 & a+1 & 2a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix},$$

w zależności od wartości parametru a.

Rozwiązanie: Zbadajmy najpierw rząd macierzy układu. Najpierw $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$:

$$\begin{pmatrix} 3a-1 & 2a & 3a+1 \\ -a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a+1 & 2a+2 \end{pmatrix},$$

a następnie $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_3$ daje

$$\begin{pmatrix} -2 & 2a & 3a+1 \\ -a+1 & 0 & 0 \\ -a-1 & a+1 & 2a+2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2a & 3a+1 \\ -a+1 & 0 & 0 \\ -2 & a+1 & 2a+2 \end{pmatrix},$$

gdzie w kolejnym kroku zrobiliśmy $\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2$. Nastepnie $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2a & -a+1 \\ -a+1 & 0 & 0 \\ -2 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a-1 & -a+1 \\ -a+1 & 0 & 0 \\ -2 & a+1 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie w kolejnym kroku zrobiliśmy $\mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3$. Wreszcie, po $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3$ macierz przybiera w miarę przejrzystą postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-a \\ 1-a & 0 & 0 \\ -2 & a+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jej wyznacznik jest równy[52] $\det A = (1-a)^2(1+a)$. Widać więc, że szczególnymi wartościami są $a = 1$ oraz $a = -1$. Jeśli $a \neq 1$ i $a \neq -1$ to rząd macierzy układu jest równy 3 i rozwiązanie zawsze istnieje i jest jednoznaczne. Jeśli $a = -1$ (jednokrotny pierwiastek równania $\det A = 0$) rząd macierzy jest równy 2, ale rząd macierzy rozszerzonej

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jest równy 3 i układ jest sprzeczny (rieszenije otsutstwujet). Wreszcie, gdy $a = 1$ rząd macierzy jest równy 1, a macierz rozszerzona ma postać

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

(trzy pierwsze kolumny są oczywiście macierzą układu dla $a = 1$ - widać, że jej rząd wynosi 1, co wynika także z tego, iż $a = 1$ jest podwójnym pierwiastkiem równania $\det A = 0$). Ponieważ jednak (co jest oczywiste) rząd macierzy rozszerzonej też jest równy 1, rozwiązanie istnieje, ale jest oczywiście niejednoznaczne - przestrzeń rozwiązań jest dwuwymiarowa: zgodnie z ogólną metodą możemy w tym przypadku napisać

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[52]Można było też obliczyć od razu wyznacznik wyjściowej macierzy układu, albo jeszcze prościej - zlaplasować względem drugiego wiersza wyznacznik macierzy otrzymanej po operacji $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$; wynik by był oczywiście taki sam.

Zadanie 57

Traktując p jak parametr rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2p \\ 1 \\ p \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Najpierw znajdujemy rząd macierzy A układu. W tym celu robimy najpierw $\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4$ i obliczamy wyznacznik powstałej macierzy:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0\,.$$

Ponieważ wyznacznik macierzy A znika, jej rząd jest mniejszy niż 4. Łatwo sprawdzić, że ma ona podmacierz 3×3 o niezerowym wyznaczniku w prawym górnym rogu:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 4 + 18 \neq 0\,.$$

Zatem rząd A wynosi 3. Niezerowy wyznacznik wskazanej podmacierzy oznacza także, iż kolumny $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ macierzy A są liniowo niezależne. Kolumnę $\mathbf{C}_1$ można zaś przedstawić w postaci

$$\mathbf{C}_1 = a\,\mathbf{C}_2 + b\,\mathbf{C}_3 + c\,\mathbf{C}_4\,,$$

gdyż jest ona od $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ liniowo zależna.

Żądając teraz by rząd macierzy rozszerzonej nie był większy niż 3 moglibyśmy znaleźć wartość parametru p, dla której układ jest niesprzeczny. W tym celu trzeba by badać rząd macierzy zbudowanej z kolumn $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_B)$ ale ponieważ $\mathbf{C}_1$ jest liniowo zależna od $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$, to wystarczyłoby badać rząd macierzy składającej się z kolumn $(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_B)$; żadanie, by jej rząd był mniejszy niż 4 sprowadza się do zażądania, by jej wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 2p \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & p \end{vmatrix},$$

był równy zeru. Stąd otrzymalibyśmy wartość parametru p, dla której układ równań jest niesprzeczny. Wstawiając tę wartość p moglibyśmy następnie odrzucić czwarte równanie (jako że jego współczynniki nie wchodzą w tę podmacierz wymiaru 3×3 macierzy A, której niezerowy wyznacznik pokazał nam, że $r(A) = 3$) i przenieść $x_1 = \alpha$ na prawą stronę, tak jak to opisane jest w Przypomnieniu ogólnej metody. Zamiast jednak obliczać ten wyznacznik, po prostu zaczniemy rozwiązywać układ równań i wyjdzie nam "w praniu" dla jakiego p się to da zrobić. Ponieważ kolumna $\mathbf{C}_1$ jest liniowo zależna od kolumn $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ to jej dołączenie nie może pomóc w wyrażaniu $\mathbf{C}_B$ przez kolumny macierzy A. Dlatego możemy na razie położyć $x_1 = 0$ (albo nadać niewiadomej x_1 jakąkolwiek inną wartość $x_1^{(0)}$) i szukać rozwiązania układu

$$x_2\mathbf{C}_2 + x_3\mathbf{C}_3 + x_4\mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_B\,,$$

(lub układu $x_2\mathbf{C}_2 + x_3\mathbf{C}_3 + x_4\mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_B - x_1^{(0)}\mathbf{C}_1$), czyli

$$\begin{aligned} 3x_2 - 2x_3 - 6x_4 &= -3\,, \\ 3x_3 - 2x_4 &= 2p\,, \\ x_2 \qquad + 3x_4 &= 1\,, \\ x_2 + x_3 \qquad &= p\,. \end{aligned}$$

Rozwiążmy najpierw układ trzech ostatnich równań. Po prostych fiku-miku znajdujemy

$$x_2 = -\frac{1}{7}(2 - 3p)\,, \qquad x_3 = \frac{1}{7}(2 + 4p)\,, \qquad x_4 = \frac{1}{7}(3 - p)\,.$$

Wstawiamy to teraz do pierwszego (na razie nie uwzględnionego) równania i mamy mieć

$$3\left(-\frac{2}{7} + \frac{3}{7}p\right) - 2\left(\frac{2}{7} + \frac{4}{7}p\right) - 6\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{7}p\right) = -3\,,$$

co zachodzi tylko dla $p = 1$.

Dla $p = 1$ mamy zatem jedno szczególne rozwiązanie wyjściowego układu równań

$$\begin{pmatrix} x_1^{(s)} \\ x_2^{(s)} \\ x_3^{(s)} \\ x_4^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}.$$

Nie jest to jednak jeszcze najogólniejsze rozwiązanie bo niewiadomych było $n = 4$, a rząd macierzy A był równy 3. Musimy do powyższego rozwiązania szczególnego układu niejednorodnego dodać z dowolnym współczynnikiem jedno (bo $n - r = 1$) rozwiązanie układu jednorodnego

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Musi takowe istnieć bo $\det A = 0$. Łatwo je znajdujemy

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4/7 \\ -3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}.$$

Najogólniejszym zatem rozwiązaniem wyjściowego układu równań (oczywiście tylko dla $p = 1$) jest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4/7 \\ -3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix},$$

gdzie λ jest dowolną stałą.

Zadanie 58
Rozwiązać układ równanń

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix},$$

dla takich wartości parametrów a i b, dla których jest on niesprzeczny.
Rozwiązanie: Badamy najpierw rząd macierzy układu i macierzy rozszerzonej. Przy odrobinie czujności (sprowadzającej się do tego, by do pierwszych czterech kolumn nie dodawać nigdy ostatniej z różnym od zera współczynnikiem; do ostatniej zaś kolumny kombinacje liniowe pierwszych czterech dodawać można) można to robić symultanicznie:

$$A/A^R = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -3 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right),$$

(pierwsze cztery kolumny tworzą oczywiście macierz A układu). Dokonujemy operacji: $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_4$, co daje

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -4 & 1 & b \\ 6 & 6 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right),$$

Taraz $\mathbf{R}_4 \to \mathbf{R}_4 + 2\mathbf{R}_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -4 & 1 & b \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 3 \end{array}\right),$$

i wreszcie $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 + \frac{1}{3}\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_5 \to \mathbf{C}_5 + \frac{1}{3}\mathbf{C}_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -4 & 1 & b \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Widać teraz, że kolumna $\mathbf{C}_1$ jest liniowo niezależna od pozostałych. Z kolei minor utworzony z trzech dolnych składowych $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ znika:

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 6 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 16 + 24 + 24 = 0\,,$$

co oznacza, że kolumny $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ sa liniowo zależne (w istocie: $-4\mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3$). Rząd macierzy układu jest więc równy 3. Rząd macierzy rozszerzonej nie może zatem być większy. Po wykonanych już pracach przygotowawczych jest zupełnie jasne, że sprowadza się to do żądania by w ostatniej macierzy wymiaru 4×5 kolumna $\mathbf{C}_5$ była liniowo zależna od $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$. Aby tak było musi znikać minor (utworzony z trzech dolnych składowych zainteresowanych kolumn)

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & a \\ 0 & -4 & b \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 48 + 24(a + b)\,.$$

Zatem wyjściowy układ równań jest niesprzeczny gdy $a + b = -2$. Będziemy więc go rozwiązywać położywszy $b = -2 - a$. Ponieważ rząd macierzy rozpatrywanego układu równań z $n = 4$ niewiadomymi jest równy 3, przestrzeń rozwiązań jest jednowymiarowa i rozwiązanie będzie zależało od jednego dowolnego parametru. Nie jest to jednak parametr a! Dla różnych wartości a mamy *różne* układy równań i dla każdego konkretnego a rozwiązanie układu odpowiadającego temu a będzie zależało od jednego parametru λ, który wprowadzimy niżej.

Odstąpimy tu od kanonicznej metody przedstawionej parę stron wcześniej na rzecz bardziej "fizycznego" podejścia (tj. takiego, jakiego by użył każdy zdrowy na umyśle fizyk). Znajdźmy najpierw rozwiązanie równania *jednorodnego*. Zaczynamy jeszcze raz od macierzy A układu. Łatwo zobaczyć, że np. minor stopnia 3 utworzony z pierwszych trzech składowych trzech pierwszych jej kolumn jest niezerowy:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0\,,$$

więc te trzy kolumny są liniowo niezależne i można wyrazić przez nie czwartą, tj. znaleźć lambdy w kombinacji $\xi_1\mathbf{C}_1 + \xi_2\mathbf{C}_2 + \xi_3\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_4$:

$$\begin{aligned} -2\xi_1 + \ \xi_2 + \ \xi_3 &= 1\,, \\ \xi_1 - 3\xi_2 + \ \xi_3 &= 1\,, \\ \xi_1 + \ \xi_2 - 3\xi_3 &= 1\,, \\ \xi_1 + \ \xi_2 + \ \xi_3 &= -5\,. \end{aligned}$$

Rozwiązując trzy pierwsze równania stosując zwykłą "eliminatkę" znajdujemy łatwo $\xi_1 = -2$, $\xi_2 = \xi_3 = -\frac{3}{2}$. Sprawdzamy, że czwarte równanie jest spełnione (musi być - to tylko element samokontroli). Stąd rozwiązanie równania jednorodnego ma postać

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(λ jest właśnie parametrem, o którym była mowa wyżej).

Szukamy teraz jakiegoś jednego, szczególnego rozwiązania wyjściowego równania *niejednorodnego* (z $b = -2 - a$). Ponieważ już wiemy, że kolumna $\mathbf{C}_4$ macierzy A układu jest liniowo zależna od trzech pozostałych, można ją usunąć, tj. szukać rozwiązania z $x_4 = 0$. Ponieważ już wiemy, że minor stopnia 3 z lewego górnego rogu macierzy A jest niezerowy (wynosi on -8 - patrz wyżej), można rozwiązać tylko trzy górne równania

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -2-a \end{pmatrix},$$

Wykorzystując Kramersięta (tj. wzory Cramera) mamy

$$x_1 = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -3 & 1 \\ -2-a & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(9 - 2 - a + a - 6 - 3a - 1 + 3a) = 0\,,$$

$$x_2 = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & -2-a & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(6a + 1 - 2 - a - a + 3 - 4 - 2a) = -\frac{1}{8}(-2 + 2a)\,,$$

$$x_3 = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & -2-a \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(-12 - 6a + a + 1 + 3 + 2a + 2 + a) = -\frac{1}{8}(-6 - 2a)\,.$$

Ostatecznie więc, gdy $b = -2 - a$ najogólniejszym rozwiązaniem wyjściowego układu równań jest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1-a \\ 3+a \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na koniec sprawdzamy, że odrzucone równanie $x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 1$ jest spełnione (musi być, bo to nam gwarantuje wybór $b = -a-2$): $2\lambda + \frac{1}{4}(1-a) + \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{4}(3+a) + \frac{3}{2}\lambda - 5\lambda = 1$.

Zadanie 59

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -10 & -7 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

będzie macierzą odwzorowania liniowego A p.w. V w tę samą p.w. V. (Jeśli bazą p.w. V są $\mathbf{v}_i$, to jest to $A_{(v)(v)}$ w naszej starej notacji, ale możemy tu pominąć te detale). Niech V_0 =ker$A$ oraz V_1 =im$A$ będą odpowiednio jądrem i obrazem tego odwzorowania. Zbadać czy wektor o składowych

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(w tej samej bazie p.w. V, w której dana jest macierz A) należy do $V_0 + V_1$?
Rozwiązanie: Pytanie jest nietrywialne tylko w przypadku, gdy ker$A\cap$im$A \neq \{\mathbf{0}\}$ bo w przeciwnym razie z równości dim(ker$A$)+dim(im$A$) =dim$V$ wynikało by, że im$A$+ker$A$ = V i wtedy każdy wektor musiałby należeć do im$A$+ker$A$. Najpierw ustalmy więc rząd macierzy A. Każda próba obliczenia jakiegoś jej minora stopnia 3 kończy się wynikiem zero! Zatem zapewne jej rząd wynosi 2. Aby to potwierdzić dokonujemy standardowych operacji: [53] $\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1 + 2\mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_2 \rightarrow \mathbf{C}_2 + 4\mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_4$, które przeprowadzają A w macierz

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12 & -28 & 4 & -7 \\ 9 & 21 & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -4 & -7 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(w drugim kroku pierwszą, drugą i trzecią kolumnę podzieliliśmy odpowiednio przez 3, 7 i -1), której już rząd A jest oczywisty. Łatwo też ustalić, że kolumny $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ macierzy A wyrażają się przez $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$: $\mathbf{C}_1 = -3\mathbf{C}_3 + 4\mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_2 = -7\mathbf{C}_3 + 10\mathbf{C}_4$. W ogólności obrazem odwzorowania A (im$A$) są wszystkie kombinacje liniowe $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$, ale skoro $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ są liniowo zależne, to obrazem A w tym przypadku są wektory będące dowolnymi kombinacjami liniowymi $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$:

$$\mathrm{im}A = \{\mathbf{w} : \ \mathbf{w} = \alpha\, \mathbf{C}_3 + \beta\, \mathbf{C}_4; \ \text{gdzie } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Trzeba jeszcze znaleźć najogólniejszą postać wektora należącego do ker$A$. Łatwo ją napisać korzystając z tego (co już ustaliliśmy), że $\mathbf{C}_1 + 3\mathbf{C}_3 - 4\mathbf{C}_4 = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}_2 + 7\mathbf{C}_3 - 10\mathbf{C}_4 =$

[53] Jeszcze prościej jest wykorzystać pierwszą kolumnę do wyzerowania dolnych pięterek pozostałych, czyli $\mathbf{C}_{2,3} \rightarrow \mathbf{C}_{2,3} - 5\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_4 \rightarrow \mathbf{C}_4 - 4\mathbf{C}_1$, co da macierz

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & -16 & -12 \\ -2 & 6 & 12 & 9 \\ 2 & -10 & -20 & -15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

której trzy ostatnie kolumny są do siebie wzajemnie proporcjonalne.

$\mathbf{0}$. Wynika stąd, że wektory, na których A daje zero są postaci

$$\xi\begin{pmatrix}1\\0\\3\\-4\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix}0\\1\\7\\-10\end{pmatrix}.$$

Zatem pytanie będące treścią zadania brzmi: czy można tak dobrać η, ξ, α i β, by spełnić równość

$$\xi\begin{pmatrix}1\\0\\3\\-4\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix}0\\1\\7\\-10\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-1\\2\\-10\\5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\-7\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

w której dwa pierwsze wektory rozpinaja ker$A$, a dwa drugie im$A$? Aby ustalić jaki jest wymiar ker$A$+im$A$ tworzymy z wektorów rozpinających tę sumę macierz

$$H=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&1\\3&7&-10&-7\\-4&-10&5&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&1\\3&7&-7&-7\\-4&-10&1&4\end{pmatrix}\equiv H'.$$

Strzałka oznacza tu dokonanie operacji polegającej na dodaniu pierwszej kolumny macierzy H do trzeciej. Rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza pozwala łatwo zobaczyć, że wyznacznik macierzy H' znika. Zatem rząd macierzy H', a zatem i macierzy H jest mniejszy niż 4. Z kolei lewy górny minor stopnia 3 macierzy H' nie znika, a zatem macierz H jest rzędu 3 i taki też jest wymiar ker$A$+im$A$. Oznacza to oczywiście, bo dim(ker$A$) = 2 i dim(im$A$) = 2, że przecięcie ker$A$ z im$A$ jest różne od $\{\mathbf{0}\}$, a zatem im$A$+ker$A \subset V$, ale suma ta nie jest całą przestrzenią V. Może więc się zdarzyć, że wektor z samych jedynek do ker$A$+im$A$ nie należy. Że tak jest w istocie pokazuje następujące rozumowanie: zróbmy $\mathbf{H}'_3 \to \frac{1}{3}(\mathbf{H}'_3+\mathbf{H}'_2)$, $\mathbf{H}'_4 \to \frac{1}{2}(\mathbf{H}'_4+\mathbf{H}'_2)$, (chodzi o kolumny macierzy H') co da

$$\tilde{H}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\3&7&0&0\\-4&-10&-3&-3\end{pmatrix}.$$

Z wektorów rozpinających ker$A$+im$A$, którymi mogą być kolumy powyższej macierzy wystarczają tylko trzy pierwsze by stworzyć bazę. Jeśli zaś jakaś ich kombinacja $\xi_1\tilde{\mathbf{H}}_1+\xi_2\tilde{\mathbf{H}}_1+\xi_3\tilde{\mathbf{H}}_3$ miała by dawać wektor mający same jedynki, to jest oczywiste, że $\xi_1=1$. Odejmując więc od tego wektora $\tilde{\mathbf{H}}_1$ musiały by być spełnione związki

$$\xi_2\begin{pmatrix}1\\7\\-10\end{pmatrix}+\xi_3\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$$

(wypisaliśmy tu tylko trzy dolne składowe każdego z wektorów). Zatem $\xi_2 = -\frac{2}{7}$ i $\xi_3 = \frac{9}{7}$ żeby sie zgodziły dwie pierwsze składowe, ale wtedy w trzeciej linii po lewej mamy $\frac{20}{7} + \frac{27}{7} \neq 5$, co dowodzi, że wektor z samych jedynek do $\ker A + \mathrm{im} A$ nie należy.

Zadanie 60

Znaleźć najogólniejsze rozwiązanie układu równań liniowych[54]

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad\quad + x_5 &= a\,, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= b\,, \\ -x_1 \qquad\qquad\qquad\quad - x_5 &= -a\,, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= c\,. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Macierz tego problemu i macierz rozszerzona mają postacie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Widać, że w obu macierzach trzeci wiersz jest tym samym co pierwszy pomnożony przez -1. Zatem rząd obu macierzy nie może być większy niż 3. Na macierzy A wykonajmy następujące operacje: $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_4 \to \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1$, co daje

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a następnie $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Pokazuje to, że rząd macierzy A jest równy 3. Zatem macierz ta ma taki sam rząd jak macierz rozszerzona, bo ta (po wyzerowaniu trzeciego wiersza przez dodanie doń pierwszego) ma rząd nie większy niż trzy (a ponieważ A jest częścią A^R, rząd A jest po prostu równy 3). Zatem układ ma rozwiązania. Zgodnie z ogólną metodą musimy teraz w macierzy A znaleźć niezerowy minor stopnia 3. Jest nim np. minor będący

[54] Przykład jest wzięty z "kultowego" podręcznika Jacka Komorowskiego *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk* bez pytania Autora o zgodę. Ufam, że wbrew dość powszechnemu mniemaniu o prawie do "własności intelektualnej" - bycie nieistniejącym i całkowicie sprzecznym z duchem nauki! - potraktuje On to jak częściowe rozwiązanie "problemu długu, który naturalną rzeczy koleją (...) spłacany być powinien w większości następnym pokoleniom."

wyznacznikiem podmacierzy utworzonej z elementów kolumn: pierwszej, drugiej i piątej i wierszy pierwszego, drugiego i ostatniego. Trzecie równanie, którego współczynniki do tej podmacierzy nie wchodzą, skreślamy. Wyrazy z x_3 i x_4 z równań pierwszego, drugiego i ostatniego "wystają" poza tę podmacierz, zatem zgodnie z ogólną metodą podstawiamy w nich $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, gdzie α i β są dowolnymi stałymi i przenosimy je na drugą stronę otrzymując w ten sposób zredukowany układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_5 &= a\,, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= b - 2\alpha + \beta\,, \\ x_1 - x_2 + x_5 &= c + 2\alpha - \beta\,. \end{aligned}$$

Układ ten można łatwo rozwiązać, np. stosując Kramersięta: Wyznacznik macierzy układu jest równy $1 - 2 - 1 + 1 = -1$, więc

$$x_1 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b - 2\alpha + \beta & 1 & 1 \\ c + 2\alpha - \beta & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b - 2\alpha + \beta & 1 & 2 \\ c + 2\alpha - \beta & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2a + b + c\,,$$

$$x_2 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b - 2\alpha + \beta & 1 \\ 1 & c + 2\alpha - \beta & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & b - 2\alpha + \beta & 1 \\ 0 & c + 2\alpha - \beta & 1 \end{vmatrix} = a - c - 2\alpha + \beta\,,$$

$$x_5 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b - 2\alpha + \beta \\ 1 & -1 & c + 2\alpha - \beta \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 3 & 1 & b - 2\alpha + \beta \\ 0 & -1 & c + 2\alpha - \beta \end{vmatrix} = 3a - b - c\,.$$

Kompletne rozwiązanie można zapisać więc w postaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + b + c \\ a - c \\ 0 \\ 0 \\ 3a - b - c \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ma ono oczywistą strukturę: pierwszy wektor po prawej stronie jest szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego, a dwa następne wektory po prawej są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego.

Przypomnienie
Forma biliniowa (dwuliniowa) jest to takie odwzorowanie $V \times V$ w ciało $\mathbb{K}$ (u nas będzie to naogół ciało $\mathbb{R}$, rzadziej $\mathbb{C}$), że

$$
\begin{aligned}
B(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2,\, \mathbf{w}) &= \lambda_1\, B(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{w}) + \lambda_2\, B(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{w})\,, \\
B(\mathbf{v},\, \eta_1 \mathbf{w}_1 + \eta_2 \mathbf{w}_2) &= \eta_1\, B(\mathbf{v},\, \mathbf{w}_1) + \eta_2\, B(\mathbf{v},\, \mathbf{w}_2)\,.
\end{aligned}
$$

Analogicznie można zdefiniować formę p-liniową, czyli odwzorowanie $V \times V \times V \times \ldots \times V$ (p-razy) w $\mathbb{K}$, jako odwzorowanie $P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$, które jest liniowe względem każdego ze swych p argumentów. Można też badać odwzorowania p-liniowe $V \times V \times V \times \ldots \times V$ (p-razy) w przestrzeń wektorową W. (Odwzorowanie w ciało $\mathbb{K}$ jest więc przypadkiem szczególnym - ciało jest też przestrzenią wektorową, bo jest strukturą bogatszą - i wtedy nazywa się to formą). Na razie będziemy się zajmować odwzorowaniami $V \times V$ w $\mathbb{K}$.

Formy biliniowe mogą być *symetryczne*:

$$
B(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) = B(\mathbf{w},\, \mathbf{v})\,,
$$

lub *antysymetryczne*

$$
B(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) = -B(\mathbf{w},\, \mathbf{v})\,.
$$

Mogą też nie wykazywać żadnej symetrii, ale każdą formę $B(\mathbf{v},\, \mathbf{w})$ zawsze można przedstawić w postaci sumy formy symetrycznej $B_s(\mathbf{v},\, \mathbf{w})$ i antysymetrycznej $B_a(\mathbf{v},\, \mathbf{w})$, które są zdefiniowane wzorami

$$
\begin{aligned}
B_s(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) &\equiv \frac{1}{2}\left[B(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) + B(\mathbf{w},\, \mathbf{v})\right], \\
B_a(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) &\equiv \frac{1}{2}\left[B(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) - B(\mathbf{w},\, \mathbf{v})\right].
\end{aligned}
$$

W ustalonej bazie $\mathbf{e}_i$ przestrzeni V formie biliniowej $B(\cdot,\cdot)$ odpowiada jej macierz $B^{(e)}_{ij}$. Jeśli wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ mają w tej bazie składowe $v^i_{(e)}$ oraz $w^j_{(e)}$, to

$$
B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\, v^i_{(e)} w^j_{(e)} \equiv B^{(e)}_{ij} v^i_{(e)} w^j_{(e)}\,,
$$

lub jawnie macierzowo:

$$
B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (v^1_{(e)}, \cdots, v^n_{(e)}) \begin{pmatrix} B^{(e)}_{11} & \ldots & B^{(e)}_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ B^{(e)}_{n1} & \cdots & B^{(e)}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1_{(e)} \\ \cdot \\ \cdot \\ w^n_{(e)} \end{pmatrix}.
$$

Ze wzorów tych natychmiast wynika przepis, według którego macierz formy biliniowej przekształca się przy zmianie bazy $\mathbf{e}_i$ na bazę $\mathbf{f}_j$:

$$
B^{(f)}_{ij} = B^{(e)}_{kl} [R_{e\leftarrow f}]^k{}_i [R_{e\leftarrow f}]^l{}_j\,,
$$

lub macierzowo:[55]

$$B^{(f)} = [R_{e\leftarrow f}]^T \cdot B^{(e)} \cdot R_{e\leftarrow f} \,.$$

Jeśli forma biliniowa jest formą symetryczną (odpowiednio: antysymetryczną) określoną na n-wymiarowej przestrzeni wektorowej (nad $\mathbb{R}$), to jej macierz jest symetryczna $B^{(e)}_{ij} = B^{(e)}_{ji}$ (antysymetryczna $B^{(e)}_{ij} = -B^{(e)}_{ji}$) i ma wobec tego $n + \frac{1}{2}\,n(n-1) = \frac{1}{2}\,n(n+1)$ (odpowiednio: $\frac{1}{2}\,n(n-1)$) niezależnych elementów.

Formę biliniową można przedstawić wykorzystując wprowadzone wcześniej jedno-formy $\hat{\mathbf{e}}^i$ tworzące bazę dualną do bazy $\mathbf{e}_i$ przestrzeni V. Tworzymy w tym celu iloczyny tensorowe $\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j$ jedno-form bazowych. Jeśli $\dim V = n$, to n^2 takich dwu-form z $i, j = 1, \ldots, n$ tworzy bazę przestrzeni wektorowej $V^* \otimes V^*$, której elementami są właśnie formy dwuliniowe nad V, czyli inaczej mówiąc, *tensory kowariantne drugiego rzędu*. Każdy taki tensor (forma) B należący(a) do $V^* \otimes V^*$ daje się przedstawić w postaci

$$B = B^{(e)}_{ij}\, \hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j \,,$$

a jego (jej) działanie na parę dowolnych wektorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ jest dane wzorem

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \left(B^{(e)}_{ij}\, \hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv B^{(e)}_{ij}\, \hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{v})\, \hat{\mathbf{e}}^j(\mathbf{w}) = B^{(e)}_{ij} v^i_{(e)} w^j_{(e)} \,.$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że formy $\hat{\mathbf{e}}^i$ będąc dualnymi do wektorów bazy $\mathbf{e}_i$, dają $\hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_k v^k_{(e)}) = \hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_k)\, v^k_{(e)} = v^i_{(e)}$. Zauważmy też, że podobnie jak wektor $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i v^i_{(e)}$ jest "żywym" wektorem, niezależnym od wyboru bazy, tak też i tensor $B = B^{(e)}_{ij}\, \hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j$ jest "żywym" tensorem i od wyboru bazy nie zależy. Istotnie: niech wektory $\mathbf{f}_j$ będą inną bazą p.w. V, a $\hat{\mathbf{f}}^k$ dualną do bazy $\mathbf{f}_j$ bazą V^*. Wtedy

$$\begin{aligned} B = B^{(e)}_{ij}\, \hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j &= B^{(f)}_{kl} [R_{f\leftarrow e}]^k{}_i [R_{f\leftarrow e}]^l{}_j\, \hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j \\ &= B^{(f)}_{kl} [P^{f\to e}]^k{}_i \hat{\mathbf{e}}^i \otimes [P^{f\to e}]^l{}_j \hat{\mathbf{e}}^j = B^{(f)}_{kl}\, \hat{\mathbf{f}}^k \otimes \hat{\mathbf{f}}^l \,. \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy tu znaleziony już (Zadanie 39) związek macierzy zmiany bazy w p. V i w p. V^*: $[P^{f\to e}]^k{}_i = [R_{f\leftarrow e}]^k{}_i$.

[55] Dla uzmysłowienia sobie różnicy w stosunku do przepisu na przekształcanie się przy zmianie bazy macierzy odwzorowania liniowego, przypomnijmy, że jeśli odwzorowanie liniowe F z p.w. V w tę samą p.w. V jest zapisane "z obu stron" w tej samej bazie, to przy zmianie (jednocześnie "z obu stron") bazy z $\mathbf{e}_i$ na bazę $\mathbf{f}_i$

$$F_{(f)(f)} = [R_{e\leftarrow f}]^{-1} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{e\leftarrow f} \,,$$

gdzie oczywiście $[R_{e\leftarrow f}]^{-1} = R_{f\leftarrow e}$.

Przykład
Obliczymy wartość formy $B = \hat{\mathbf{e}}^1 \otimes \hat{\mathbf{e}}^2 + \hat{\mathbf{e}}^2 \otimes \hat{\mathbf{e}}^2 + \hat{\mathbf{e}}^3 \otimes \hat{\mathbf{e}}^3$ na uporządkowanej parze wektorów $\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ oraz $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \hat{\mathbf{e}}^1 \otimes \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \hat{\mathbf{e}}^2 \otimes \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \hat{\mathbf{e}}^3 \otimes \hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{w}) + \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{w}) + \hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{w}), \end{aligned}$$

a ponieważ jedno-forma $\hat{\mathbf{e}}^k$ "wycina" z wektora, na który działa, jego współczynnik przy $\mathbf{e}_k$, więc

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 21\,.$$

To samo można otrzymać macierzowo:

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (3, 2, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 21\,.$$

Wszystko to daje się łatwo uogólnić na formy wieloliniowe: jeśli dana jest forma p-liniowa (W od "wieloliniowa") $W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$, czyli odwzorowanie $W : V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$, to w ustalonej bazie $\mathbf{e}_i$ przestrzeni V jest ona reprezentowana przez swoje składowe $W^{(e)}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ w bazie $\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{i_2} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{e}}^{i_p}$ przestrzeni wektorowej $V^* \otimes \dots \otimes V^*$ (p-krotny iloczyn tensorowy). "Żywa" zaś forma p-liniowa, czyli *tensor kowariantny p-tego rzędu*, ma postać

$$W = W^{(e)}_{i_1 i_2 \dots i_p} \hat{\mathbf{e}}^{i_1} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{i_2} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{e}}^{i_p}\,.$$

Idąc "za ciosem" wprowadźmy też "żywe" *tensory kontrawariantne, p-tego rzędu* tj. elementy przestrzeni $V \otimes \dots \otimes V$ (p-razy):

$$T = \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{(e)}\,.$$

Ponieważ $(V^*)^* = V$, można takie tensory uważać za p-liniowe formy na przestrzeni jedno-form, tzn. odwzorowania $V^* \times \dots \times V^*$ w ciało $\mathbb{R}$. Jeśli formy $\hat{\mathbf{f}}^1, \dots, \hat{\mathbf{f}}^p$ mają w bazie jedno-form $\hat{\mathbf{e}}^i$ dualnej do bazy $\mathbf{e}_j$ przestrzeni wektorowej V składowe $f^{k(e)}_i$, to

$$T(\hat{\mathbf{f}}^1, \dots, \hat{\mathbf{f}}^p) = T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{(e)} f^{1(e)}_{i_1} \dots f^{p(e)}_{i_p}.$$

Wreszcie istnieją tensory mieszane kontra-i-kowariantne rzędu (p, q), będące elementami przestrzeni $V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ (p-krotnie i q-krotnie):

$$T = \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{e}}^{j_q} T^{i_1 \dots i_p}_{(e)\ \ \ j_1 \dots j_q}\,.$$

Przypomnijmy tu, że z tensorem $F = \mathbf{e}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j [F_{(e)(e)}]^i{}_j$ typu $(1, 1)$ utożsamialiśmy (Zadanie 40) zwykłe odwzorowanie liniowe przestrzeni V w nią samą. Ogólnie, tensor rzędu (p, q) możemy utożsamić z wieloliniowym odwzorowaniem $V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^*$ (k-krotnie

V i l-krotnie V^*, przy czym $k \leq q$ i $l \leq p$) w $V \otimes \ldots \otimes V \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*$ ($p-l$-krotnie V oraz $q-k$-krotnie V^*).

Wśród form wieloliniowych szczególną rolę odgrywają formy wieloliniowe całkowicie antysymetryczne, gdyż na nich opiera się, należąca już do analizy, teoria form różniczkowych. Dlatego też wprowadzona została dla nich specjalna notacja. Np. antysymetryczną formę biliniową B zapisuje się następująco:

$$B = B^{(e)}_{ij}\, \hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j = \frac{1}{2}\, B^{(e)}_{ij} \big(\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j - \hat{\mathbf{e}}^j \otimes \hat{\mathbf{e}}^i\big) \equiv \frac{1}{2} B^{(e)}_{ij}\, \hat{\mathbf{e}}^i \wedge \hat{\mathbf{e}}^j \equiv \sum_{i<j} B^{(e)}_{ij}\, \hat{\mathbf{e}}^i \wedge \hat{\mathbf{e}}^j \, .$$

"Dziubek" $\wedge$ nazywa się *iloczynem zewnętrznym* dwu form (tu: jedno-form). Oczywiście działanie takich "zdziubkowanych" dwu jedno-form na dwa wektory jest dane regułą

$$(\hat{\mathbf{e}}^i \wedge \hat{\mathbf{e}}^j)(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) \equiv \hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{v})\, \hat{\mathbf{e}}^j(\mathbf{w}) - \hat{\mathbf{e}}^j(\mathbf{v})\, \hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{w}) \, .$$

Iloczyny po prawej stronie tego wzoru są iloczynami zwykłych liczb. Ogólnie, bazę wszystkich antysymetrycznych form p-liniowych stanowią p-formy

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^{i_1 \ldots i_p}_{(p)} &\equiv \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)\, \hat{\mathbf{e}}^{\pi(i_1)} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{\pi(i_2)} \otimes \ldots \hat{\mathbf{e}}^{\pi(i_p)} \\ &\equiv \hat{\mathbf{e}}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{e}}^{i_p} \, , \qquad \text{o } \ i_1 < \ldots < i_p \, , \end{aligned}$$

w których suma przebiega $p!$ permutacji π wskaźników $i_1, \ldots, i_p$, z których każdy może przyjmować n wartości ($\mathrm{dim}V = n$). Na sztuki, liniowo niezależnych, całkowicie antysymetrycznych form p-liniowych nad n wymiarową przestrzenią wektorową V jest więc

$$\binom{n}{p} .$$

Jest oczywiste, że (nad p.w. V o $\mathrm{dim}V = n$) nie mogą istnieć całkowicie antysymetryczne p-formy o $p > n$. n-forma jest, z dokładnością do liczby z ciała, tylko jedna.

Zadanko

Ustalić, jak przy zmianie $[P^{e\to f}]^i{}_j \hat{\mathbf{f}}^j = \hat{\mathbf{e}}^i$ bazy $\hat{\mathbf{e}}^i$ jedno-form n-wymiarowej przestrzeni V^* na bazę $\hat{\mathbf{f}}^j$ przekształca się n-forma

$$\hat{\omega}_{(n)} = a \cdot \hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{e}}^n \, ,$$

w której a jest pewną stałą.

Rozwiązanie: Wykorzystując macierz $[P^{e\to ef}]^i{}_j$ zmiany bazy możemy napisać

$$\hat{\omega}_{(n)} = a \sum_{j_1, \ldots, j_n} [P^{e\to f}]^1{}_{j_1} [P^{e\to f}]^2{}_{j_2} \ldots [P^{e\to f}]^n{}_{j_n} \hat{\mathbf{f}}^{j_1} \wedge \hat{\mathbf{f}}^{j_n} \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{f}}^{j_n} \, .$$

Z powodu antysymetrii $\hat{\mathbf{f}}^{j_1} \wedge \hat{\mathbf{f}}^{j_n} \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{f}}^{j_n}$ z sumowania wypadają wyrazy, w których choćby dwa wskaźniki j_l i j_k są równe. Dzięki temu w każdym wyrazie sumy występuje ta sama n-forma $\hat{\mathbf{f}}^1 \wedge \hat{\mathbf{f}}^2 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{f}}^n$, tylko z różnym uporządkowaniem wskaźników $1, \ldots, n$; doprowadzenie ich do porządku $1, \ldots, n$ daje znak permutacji wskaźników $j_1, \ldots, j_n$ w stosunku do porządku $1, \ldots, n$. Zatem

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{(n)} = a\cdot\hat{\mathbf{f}}^1 \wedge \hat{\mathbf{f}}^2 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{f}}^n &\sum_{j_1,\ldots,j_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ j_1 & \ldots & j_n \end{pmatrix} [P^{e\to f}]^1{}_{j_1} [P^{e\to f}]^2{}_{j_2} \ldots [P^{e\to f}]^n{}_{j_n} \\ &= a\cdot\det(P^{e\to f})\cdot\hat{\mathbf{f}}^1 \wedge \hat{\mathbf{f}}^2 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{f}}^n \,.\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z tego, że suma po $j_1, \ldots, j_n$ jest po prostu definicją wyznacznika macierzy $P^{e\to f}$. Jeśli macierz ta jest macierzą ortogonalną, $[P^{e\to f}]^T\cdot[P^{e\to f}] = I$, to, ponieważ wtedy $(\det P)^2 = \det(P^T \cdot P) = 1$, n-forma $\hat{\omega}_{(n)}$ ma formalnie (z dokładnością do znaku) tę samą postać w obu bazach.

Przypomnienie:
W przestrzeni wektorowej V wymiaru n można zadać *objętość (ze znakiem)*, jeśli wśród wszystkich n-form wyróżnić (arbitralnie) jedną (oznaczaną $\mathrm{Vol}_{(n)}$). Istnieje wtedy uporządkowana baza $\hat{\mathbf{f}}^i$ przestrzeni V^* jedno-form, w której forma ta ma postać $\mathrm{Vol}_{(n)} = \hat{\mathbf{f}}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{f}}^n$. Liczba

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \hat{\mathbf{f}}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{f}}^n(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\,,$$

jest wtedy (z definicji) objętością (ze znakiem) równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Tak zdefiniowana objętość nie ma nic wspólnego z długościami rozpinających równoległościan wektorów, ani z kątami pomiędzy nimi (dlatego można by ją nazwać objętością "topologiczną"). Te charakterystyki układu wektorów wymagają wprowadzenia w przestrzeni wektorowej V iloczynu skalarnego (którego tu jeszcze nie było).

Zadanie.
Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, które w bazie $\mathbf{f}_i$ dualnej do bazy jedno-form $\hat{\mathbf{f}}^k$, w której $\mathrm{Vol}_{(n)} = \hat{\mathbf{f}}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{f}}^n$, mają składowe $v^i_{(f)l}$ (indeks l numeruje tu wektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$).
Rozwiązanie: Wykorzystujemy liniowość:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} v^{i_1}_{(f)1} \ldots v^{i_n}_{(f)n} \hat{\mathbf{f}}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{f}}^n(\mathbf{f}_{i_1}, \ldots, \mathbf{f}_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)\, v^{i_1}_{(f)1} \ldots v^{i_n}_{(f)n} \hat{\mathbf{f}}^{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes \hat{\mathbf{f}}^{\pi(n)}(\mathbf{f}_{i_1}, \ldots, \mathbf{f}_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)\, v^{i_1}_{(f)1} \ldots v^{i_n}_{(f)n} \hat{\mathbf{f}}^{\pi(1)}(\mathbf{f}_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \hat{\mathbf{f}}^{\pi(n)}(\mathbf{f}_{i_n}) \\ &= \sum_{\pi} \sum_{i_1,\ldots,i_n} \mathrm{sgn}(\pi)\, v^{i_1}_{(f)1} \ldots v^{i_n}_{(f)n} \delta^{\pi(1)}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{\pi(n)}_{i_n} \\ &= \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)\, v^{\pi(1)}_{(f)1} \ldots v^{\pi(n)}_{(f)n}\,.\end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy tu to, że skończone sumy można przestawiać ($\sum_{i_1,\dots,i_n}\sum_\pi = \sum_\pi \sum_{i_1,\dots,i_n}$) oraz właściwość delty Kroneckera (pozwalającą łatwo wykonać sumy po $i_1,\dots,i_n$). Wynik jest oczywiście wyznacznikiem macierzy, której kolumnami są postawione na sztorc składowe kolejnych wektorów (w bazie $\mathbf{f}_i$ dualnej do bazy $\hat{\mathbf{f}}^k$):

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n) = \det\begin{pmatrix} v^1_{(f)1} & v^1_{(f)2} & \dots & v^1_{(f)n} \\ v^2_{(f)1} & v^2_{(f)2} & \dots & v^2_{(f)n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v^n_{(f)1} & v^n_{(f)2} & \dots & v^n_{(f)n} \end{pmatrix}.$$

Zadanie.
Obliczyć wartość formy $\hat{\omega}_{(3)} = \hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \hat{\mathbf{e}}^2 \wedge \hat{\mathbf{e}}^3$ na uporządkowanej trójce wektorów $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1$. Pokazać bezpośrednim rachunkiem, że

$$\hat{\omega}_{(3)}(\mathbf{v},\cdot,\cdot) = \hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{e}}^2\wedge\hat{\mathbf{e}}^3(\cdot,\cdot) + \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{e}}^3\wedge\hat{\mathbf{e}}^1(\cdot,\cdot) + \hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{e}}^1\wedge\hat{\mathbf{e}}^2(\cdot,\cdot)\,.$$

Rozwiązanie. Ponieważ znamy składowe wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ w bazie dualnej do tej, w której zadana jest forma $\hat{\omega}_{(3)}$, więc

$$\hat{\omega}_{(3)}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2\,.$$

Drugi punkt sprawdza się łatwo: dla dowolnych dwu wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{(3)}(\mathbf{v},\mathbf{a},\mathbf{b}) &= (\hat{\mathbf{e}}^1\wedge\hat{\mathbf{e}}^2\wedge\hat{\mathbf{e}}^3)(\mathbf{v},\mathbf{a},\mathbf{b}) \\ &= \hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{a})\cdot\hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{b}) + \hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{a})\cdot\hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{b}) + \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{a})\cdot\hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{b}) \\ &\quad -\hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{a})\cdot\hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{b}) - \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{a})\cdot\hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{b}) - \hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{a})\cdot\hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{b})\,.\end{aligned}$$

Rozpisując podobnie

$$\hat{\omega}_{(3)}(\mathbf{v},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{v})\cdot(\hat{\mathbf{e}}^2\wedge\hat{\mathbf{e}}^3)(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{v})\cdot(\hat{\mathbf{e}}^3\wedge\hat{\mathbf{e}}^1)(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{v})\cdot(\hat{\mathbf{e}}^1\wedge\hat{\mathbf{e}}^2)(\mathbf{a},\mathbf{b})\,,$$

stwierdzamy, że jest to to samo.

Przypomnienie
Jeśli ciałem jest $\mathbb{C}$ to zwykle - zwłaszcza z punktu widzenia fizyka - interesujące są *formy półtoraliniowe*, czyli odwzorowanie $V\times V$ w ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych, mające właściwość[56]

$$\begin{aligned} D(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2,\,\mathbf{w}) &= \lambda_1^*\,D(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}) + \lambda_2^* D(\mathbf{v}_2,\,\mathbf{w})\,, \\ D(\mathbf{v},\,\eta_1\mathbf{w}_1 + \eta_2\mathbf{w}_2) &= \eta_1\,D(\mathbf{v},\,\mathbf{w}_1) + \eta_2 D\,(\mathbf{v},\,\mathbf{w}_2)\,.\end{aligned}$$

[56]Logicznie byłoby formy takie oznaczać literą P, od słowa "półtora". Ponieważ jednak P w tym skrypcie już oznacza macierz zmiany bazy w przestrzeni jedno-form, formy półtoraliniowe będziemy oznaczać literą D (od francuskiego *demi-linéaire*).

Forma półtoraliniowa nie może oczywiście być symetryczna, ale może być *hermitowska*:

$$D(\mathbf{v},\,\mathbf{w}) = [D(\mathbf{w},\,\mathbf{v})]^*\,,$$

lub *antyhermitowska*

$$D(\mathbf{v},\,\mathbf{w}) = -[D(\mathbf{w},\,\mathbf{v})]^*\,.$$

Oczywiście formę półtoraliniową, która nie jest ani taka ani siaka zawsze można przedstawić jako sumę formy hermitowskiej i antyhermitowskiej.

W ustalonej bazie $\mathbf{e}_i$ przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{C}$ formie biliniowej $D(\cdot,\cdot)$ odpowiada jej macierz $D^{(e)}_{ij}$. Jeśli wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ mają w tej bazie składowe $v^i_{(e)}$ oraz $w^j_{(e)}$, to

$$D(\mathbf{v},\mathbf{w}) = D(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)\,(v^i_{(e)})^* w^j_{(e)} \equiv D^{(e)}_{ij}(v^i_{(e)})^* w^j_{(e)}\,,$$

lub jawnie macierzowo:

$$D(\mathbf{v},\mathbf{w}) = ((v^1_{(e)})^*,\cdots,(v^n_{(e)})^*)\begin{pmatrix} D^{(e)}_{11} & \dots & D^{(e)}_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ D^{(e)}_{n1} & \dots & D^{(e)}_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^1_{(e)} \\ \cdot \\ \cdot \\ w^n_{(e)}\end{pmatrix}$$

Ze wzorów tych natychmiast wynika przepis, według którego przekształca się macierz formy półtoraliniowej przy zmianie bazy:

$$D^{(f)}_{ij} = D^{(e)}_{kl}\,([R_{e\leftarrow f}]^k{}_i)^*\,[R_{e\leftarrow f}]^l{}_j\,,$$

lub macierzowo († oznacza macierz zespoloną sprzężoną i transponowaną):

$$D^{(f)} = [R_{e\leftarrow f}]^\dagger \cdot D^{(e)} \cdot R_{e\leftarrow f}\,.$$

Macierz formy hermitowskiej (antyhermitowskiej) określonej na przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{C}$ jest macierzą hermitowską $D^{(e)}_{ij} = [D^{(e)}_{ji}]^*$ (antyhermitowską $D^{(e)}_{ij} = -[D^{(e)}_{ji}]^*$) i ma $n + \frac{1}{2}n(n-1)\cdot 2 = n^2$ (odpowiednio: $n + \frac{1}{2}n(n-1)\cdot 2 = n^2$ - bo diagonalne elementy muszą być czysto urojone) rzeczywistych parametrów.

Przypomnienie
Forma kwadratowa jest to takie odwzorowanie przestrzeni wektorowej V w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ (tj. w ciało), że po pierwsze

$$Q(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\,Q(\mathbf{v})\,,$$

i po drugie odwzorowanie $V\times V$ zadane wzorem

$$B(\mathbf{v},\,\mathbf{w}) \equiv \frac{1}{2}\,[Q(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - Q(\mathbf{v}) - Q(\mathbf{w})]\,,$$

jest uczciwą formą biliniową. Drugi warunek jest konieczny, by wykluczyć odwzorowania takie, jak odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}$ zadane wzorem:

$$Q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} x^2y^2/(x^2+y^2), & \text{gdy } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x=y=0 \end{cases},$$

które spełnia pierwszy warunek (jednorodność stopnia drugiego), ale nie jest dobrą formą kwadratową.

W gruncie rzeczy prawdziwą formę kwadratową na p. wektorowej nad $\mathbb{R}$ można uważać za pewną formę biliniową $B(\cdot,\cdot)$ której obydwoma argumentami jest ten sam wektor: $Q(\mathbf{v}) \equiv B(\mathbf{v},\mathbf{v})$. Oczywiście formę kwadratową produkuje tylko część symetryczna $B_s(\cdot,\cdot)$ danej formy - jej część antysymetryczna $B_a(\cdot,\cdot)$ znika po wstawieniu do niej dwu takich samych wektorów. I odwrotnie, mając formę kwadratową Q można odtworzyć część symetryczną formy biliniowej, z której owa forma kwadratowa wzięła swój początek:

$$B_s(\mathbf{v},\,\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\left[Q(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - Q(\mathbf{v}) - Q(\mathbf{w})\right].$$

Oczywiście w ustalonej bazie $\mathbf{e}_i$ przestrzeni V formie kwadratowej odpowiada macierz symetryczna:

$$Q(\mathbf{v}) \equiv Q^{(e)}_{ij} v^i_{(e)} v^j_{(e)}\,, \qquad \text{gdzie} \qquad Q^{(e)}_{ij} = Q^{(e)}_{ji}\,.$$

Jak zwykle opatrzyliśmy macierz $Q^{(e)}_{ij}$ superskryptem (e), aby pamiętać, że jest to macierz formy Q w bazie $\mathbf{e}_i$. Przez odpowiednią zmianę bazy macierz formy Q można zawsze sprowadzić do postaci diagonalnej. Postać diagonalna macierzy formy Q nie jest jednoznaczna już choćby dlatego, że nic (dopóki w przestrzeni wektorowej V nie wprowadzi się iloczynu skalarnego) nie ustala "długości" wektorów bazy (nie jest to jednak jedyna dowolność). Jednakże każda postać diagonalna danej formy Q (określonej na przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{R}$) ma tę samą liczbę dodatnich, ujemnych i zerowych elementów diagonalnych, tj. ma zawsze tę samą *sygnaturę* (twierdzenie Sylvestra).

Przypomnienie

Iloczyn skalarny $S(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot|\cdot)_S$ wektorów z przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ (nad ciałem $\mathbb{C}$) jest zadawany przez ustaloną symetryczną (hermitowską) formę biliniową (półtoraliniową) taką, że $S(\mathbf{v},\,\mathbf{v}) \geq 0$ i równość zachodzi tu tylko, gdy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (tj. dla wektora zerowego).

Iloczyn skalarny w przestrzeni wektorowej jest tą strukturą, która pozwala zdefiniować "długość" wektora, czyli jego *normę*:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{S(\mathbf{v},\,\mathbf{v})} \equiv \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})_S}\,.$$

(czyniąc tym samym z p. wektorowej p. unormowaną, co jest warunkiem dostatecznym, by można w niej było uprawiać analizę, bo w przestrzeni wektorowej norma indukuje metrykę) oraz zdefiniować pojęcie wzajemnej prostopadłości dwóch wektorów: $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ są do siebie nawzajem prostopadłe, gdy $S(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

Korzystając z iloczynu skalarnego można też, w przestrzeniach wektorowych nad ciałem $\mathbb{R}$, zdefiniować kąt $\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ pomiędzy dwoma wektorami $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$:

$$\cos\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{S(\mathbf{v},\, \mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\|\, \|\mathbf{w}\|}\,.$$

Oczywiście taka długość wektora i taki kąt pomiędzy dwoma wektorami, w przypadku żywych wektorów, którymi mogą być na przykład wielomiany (zobacz Zadanie X, w którym wprowadzony jest pewien iloczyn skalarny w przestrzeni wektorowej wielomianów) mogą być dość abstrakcyjne. Niemniej w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ (najlepiej o $n = 3$) z kanonicznym iloczynem skalarnym zdefiniowanym wzorem,[57] ($\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ są tu żywymi wektorami),

$$S(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) = v^1 w^1 + v^2 w^2 + \ldots + v^n w^n\,, \qquad \text{gdy} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ . \\ v^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ . \\ w^n \end{bmatrix},$$

jeśli wektory kanonicznej bazy zero-jedynkowej utożsamimy ze "szkolnymi" wektorami-strzałkami (z wersorami osi kartezjańskiego układu współrzędnych), tak zdefiniowane długość i kąt są tymi, którymi posługuje się zwykła (a najpewniej analityczna) geometria.

Kanoniczny iloczyn skalarny w p. wektorowej $\mathbb{C}^n$ jest zadany wzorem

$$S(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) = (v^1)^* w^1 + (v^2)^* w^2 + \ldots + (v^n)^* w^n\,, \qquad \text{gdy} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ . \\ v^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ . \\ w^n \end{bmatrix},$$

(żywe wektory).

Przypomnienie

Ortonormalizacja Gramma-Schmidta. Jeśli w przestrzeni wektorowej V o $\dim V = n$ nad ciałem[58] $\mathbb{R}$ zadany jest iloczyn skalarny, to z dowolnego zbioru n liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{w}_i$, $i = 1, \ldots, n$ można zbudować bazę $\mathbf{w}'_i$ *ortonormalną* (względem tego iloczynu skalarnego), tj. taką, że

$$S(\mathbf{w}'_i,\, \mathbf{w}'_j) \equiv (\mathbf{w}'_i|\mathbf{w}'_j)_S = \delta_{ij}\,,$$

(wszystkie wektory bazy $\mathbf{w}'_i$ mają długość jednostkową i wektory różne są wzajemnie do siebie prostopadłe w sensie tego iloczynu skalarnego). Konstrukcja ta zwana ortonormalizacją Gramma-Schmidta jest prosta. Wybieramy ze zbioru wektorów $\mathbf{w}_i$ jeden wektor,

[57] W tym przypadku dodatnia określoność formy $Q(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ jest oczywista: $Q(\mathbf{v}) = (v^1)^2 + (v^2)^2 + \ldots + (v^n)^2$. Taki iloczyn skarny wektorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ z $\mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać "po szkolnemu", tj. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

[58] Analogiczną konstrukcję można oczywiście przeprowadzić także z bazą p. wektorowej nad ciałem $\mathbb{C}$, z półtoraliniowym iloczynem skalarnym.

powiedzmy $\mathbf{w}_1$ (kolejność wybierania wektorów jest dowolna, ale inna kolejność da inny zbiór wektorów ortonormalnych) i tworzymy wektor $\mathbf{w}'_1$ według przepisu:

$$\mathbf{w}'_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} \equiv \frac{\mathbf{w}_1}{\sqrt{(\mathbf{w}_1|\mathbf{w}_1)_S}} ,$$

tak, iż $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1)_S = 1$. Następnie wybieramy drugi wektor, powiedzmy $\mathbf{w}_2$ i tworzymy wektor:

$$\mathbf{w}_2 - (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_2)_S\, \mathbf{w}'_1 ,$$

"wycinając" z $\mathbf{w}_2$ jego rzut[59] na wektor $\mathbf{w}'_1$. Tak utworzony wektor jest już ortogonalny (w sensie iloczynu skalarnego $(\cdot|\cdot)_S$) do $\mathbf{w}'_1$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_2 - (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_2)_S\, \mathbf{w}'_1)_S &= (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_2)_S - (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_2)_S\, (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1)_S \\ &= (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_2)_S - (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_2)_S = 0 .\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z tego, że $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1) = 1$. Drugim wektorem bazy ortonormalnej jest więc wektor $\mathbf{w}'_2$:

$$\mathbf{w}'_2 = \frac{\mathbf{w}_2 - (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_2)_S\, \mathbf{w}'_1}{\|\mathbf{w}_2 - (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_2)_S\, \mathbf{w}'_1\|} ,$$

który, jak łatwo sprawdzić, spełnia warunki $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_2)_S = 0$, $(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_2)_S = 1$. Dalsze kroki ortonormalizacji Gramma-Schmidta powinny już być oczywiste: wektorem $\mathbf{w}'_3$ jest wektor

$$\mathbf{w}'_3 = \frac{\mathbf{w}_3 - (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3)_S\, \mathbf{w}'_1 - (\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}_3)_S\, \mathbf{w}'_2}{\|\mathbf{w}_3 - (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3)_S\, \mathbf{w}'_1 - (\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}_3)_S\, \mathbf{w}'_2\|} ,$$

który, jak znowu nietrudno sprawdzić spełnia warunki $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_3)_S = 0$, $(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_3)_S = 0$, $(\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_3)_S = 1$, itd.

W tej samej przestrzeni wektorowej można zdefiniować nieskończenie wiele różnych iloczynów skalarnych bo może być nieskończenie wiele dodatnio określonych form dwuliniowych (półtoraliniowych). Aby jednak móc powiedzieć, czy dana forma biliniowa (ograniczmy się teraz do p. wektorowych nad $\mathbb{R}$) może być przyjęta za iloczyn skalarny, trzeba móc powiedzieć, czy jest ona (jako forma kwadratowa) dodatnio określona. Tym zajmiemy się więc w kolejnych zadaniach.

[59] Należy tu zwrócić uwagę na to, że sens terminu "rzut" jest tu inny niż w Zadaniach 42 i 43: tam "rzut" był wyznaczony przez wektory rozpinające podprzestrzeń, na którą było przeprowadzane rzutowanie i inne wektory, "wzdłuż" których następowało rzutowanie (tj. wektory rozpinające dopełniającą podprzestrzeń); tu rzut definiuje iloczyn skalarny, jest więc to rzut na podprzestrzeń prostopadłą w sensie iloczynu skalarnego $(\cdot|\cdot)_S$ do podprzestrzeni rozpinanej przez wektor $\mathbf{w}'_1$ (ogólniej: prostopadłą do podprzestrzeni rozpinanej przez wszystkie już zortonormalizowane - w poprzednich krokach konstrukcji - wektory bazy).

Przykład
Wektory $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ tworzą bazę przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{R}$ ($\dim V = 3$). Symetryczna forma biliniowa $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ jest zadana na wektorach tej bazy:

$$\begin{aligned} &B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1\,, \qquad B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 2\,, \qquad B(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 3\,, \\ &B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1\,, \qquad B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 1\,, \qquad B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 2\,. \end{aligned}$$

Sprawdzić, że forma $B(\cdot, \cdot)$ może być iloczynem skalarnym w V. Obliczyć długości, jakie w tym iloczynie skalarnym mają wektory

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \qquad \mathbf{w} = -4\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3\,,$$

i obliczyć kosinus kąta $\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ pomiędzy tymi wektorami. Z bazy $\mathbf{e}_i$ zbudować także metodą Gramma-Schmidta bazę ortonormalną w iloczynie skalarnym zadanym przez formę B.
Rozwiązanie: Forma $B(\cdot, \cdot)$ jest symetryczna, wiec wystarczy pokazać, że jest ona, jako forma kwadratowa, dodatnio określona. Jej macierz w bazie $\mathbf{e}_i$ ma postać

$$B^{(e)}_{ij} \equiv B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dowolny wektor p. V ma postać $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 x + \mathbf{e}_2 y + \mathbf{e}_3 z$, gdzie (x, y, z) są jego składowymi w tej bazie. Wartość na takim wektorze formy kwadratowej utworzonej z $B(\cdot, \cdot)$ jest równa

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz\,.$$

Że jest ona zawsze dodatnia, chyba, że wektor $\mathbf{v}$ jest wektorem zerowym, można się przekonać stosując metodę Lagrange'a, czyli zwijając powyższe wyrażenie do pełnych kwadratów:

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (x + y + z)^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz = (x + y + z)^2 + (y + z)^2 + z^2\,.$$

Forma ta jest zatem dodatnio określona i może być iloczynem skalarnym. Oznaczymy go $(\cdot|\cdot)_B$. Zauważmy tylko, że wektory bazy $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ nie są w tym ilocznie skalarnym ortonormalne.

Długości wektorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ oraz ich iloczyn skalarny są więc równe

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 9\,,$$

$$\|\mathbf{w}\|^2 = (-4, 1, 3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-4, 1, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 25\,,$$

$$(\mathbf{v}|\mathbf{w})_B = (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 11\,.$$

Zatem $\|\mathbf{v}\| = 3$, $\|\mathbf{w}\| = 5$ i

$$\cos\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{(\mathbf{v}|\mathbf{w})_B}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \frac{11}{15}\,.$$

Konstrukcja bazy ortonormalnej $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2, 3$ jest tu prosta:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|} = \mathbf{e}_1\,,$$

bo $(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1)_B \equiv B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$. Następnie

$$\mathbf{f}_2' = \mathbf{e}_2 - \mathbf{f}_1\,(\mathbf{f}_1|\mathbf{e}_2)_B = \mathbf{e}_2 - \mathbf{f}_1\,(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2)_B = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\,.$$

Zatem

$$\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\|} = \frac{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1}{\sqrt{(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)_B}} = \frac{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1}{\sqrt{(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1)_B + (\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_2)_B - 2(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2)_B}} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,.$$

Wreszcie

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_3' &= \mathbf{e}_3 - \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1|\mathbf{e}_3)_B - \mathbf{f}_2(\mathbf{f}_2|\mathbf{e}_3)_B = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_3)_B - (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)\,(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1|\mathbf{e}_3)_B \\ &= \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)(2 - 1) = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,.\end{aligned}$$

Ponieważ $\|-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\| = 1$, baza ortonormalna ma postać

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Stojąca tu macierz to macierz zmiany bazy $R_{e\leftarrow f}$. Mając ją można sprawdzić, że macierz formy $B(\cdot,\cdot)$ zapisana w bazie $\mathbf{f}_i$ jest macierzą jednostkową:[60] $B^{(f)}_{ij} = B^{(e)}_{kl}[R_{e\leftarrow f}]^k{}_i[R_{e\leftarrow f}]^l{}_j$, czyli macierzowo

$$\begin{aligned}B^{(f)} &= [R_{e\leftarrow f}]^T \cdot B^{(e)} \cdot R_{e\leftarrow f}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Oczywiście $(\mathbf{f}_i|\mathbf{f}_j)_B = B(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) = \delta_{ij}$.

Zadanie

Z wielomianów $w_0(x) = 1$, $w_1(x) = x$, $w_2(x) = x^2$ i $w_3(x) = x^3$ rozpinających przestrzeń wektorową wielomianów stopnia nie wyższego niż trzeci skonstruować metodą Gramma-Schmidta bazę ortonormalną w iloczynie skalarnym

$$(w(x)|v(x)) = \int_0^1 dx\, w(x)v(x)\,,$$

[60] Musi tak być, bo wektory $\mathbf{f}_i$ są ortonormalne w iloczynie skalarnym zadawanym przez tę formę.

zaczynając raz od jednego końca podanej listy wielomianów, a drugi raz od drugiego.
Rozwiązanie: Najpierw skonstruujemy bazę wielomianów $\mathbf{e}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ zaczynając od $w_0(x)$. Wielomian $w_0(x)$ jest od razu prawidłowo unormowany, więc po prostu $\mathbf{e}_0 = w_0$. Następnie tworzymy wektor-wielomian

$$x - 1 \cdot \int_0^1 dt\, 1 \cdot t = x - \frac{1}{2},$$

i obliczamy całkę z $(t - \frac{1}{2})^2$, żeby znaleźć normalizację. Całka jest równa $\frac{1}{12}$, więc

$$\mathbf{e}_1 = \sqrt{12}\,(x - \frac{1}{2}).$$

Potem tworzymy wektor-wielomian

$$x^2 - 1 \cdot \int_0^1 dt\, 1 \cdot t^2 - \sqrt{12}\,(x - \frac{1}{2}) \int_0^1 dt\, \sqrt{12}\,(t - \frac{1}{2})\, t^2 = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Ponieważ całka z $(t^2 - t + \frac{1}{6})^2$ wynosi $\frac{1}{180}$,

$$\mathbf{e}_2 = \sqrt{180}\,(x^2 - x + \frac{1}{6}).$$

Wreszcie tworzymy wektor-wielomian

$$\begin{aligned} x^3 - 1 \cdot \int_0^1 dt\, 1 \cdot t^3 - \sqrt{12}\,(x - \frac{1}{2}) \int_0^1 dt\, \sqrt{12}\,(t - \frac{1}{2})\, t^3 \\ -\sqrt{180}\,(x^2 - x + \frac{1}{6}) \int_0^1 dx\, \sqrt{180}\,(x^2 - x + \frac{1}{6})\, x^3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Całka z $(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20})^2$ jest równa $\frac{1}{1800}$ więc

$$\mathbf{e}_3 = \sqrt{1800}\,(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}).$$

Wszystkie rachunki, choć proste, są żmudne i najlepiej podeprzeć się *Mathematicą*. Przy zaczęciu konstrukcji od drugiego końca otrzymuje się bazę

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_3 &= \sqrt{7}\,x^3 \\ \mathbf{f}_2 &= \sqrt{180}\,(x^2 - \frac{7}{6}x^3) \\ \mathbf{f}_1 &= \sqrt{300}\,(x - 3x^2 + \frac{21}{10}x^3) \\ \mathbf{f}_0 &= \sqrt{16}\,(1 - \frac{15}{2}x + 15x^2 - \frac{35}{4}x^3). \end{aligned}$$

Uwaga: Zastosowanie ortonormalizacji Gramma-Schmidta do utworzenia bazy przestrzeni wektorowej wielomianów dowolnego stopnia[61] o współczynnikach rzeczywistych określonych na całej osi $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym

$$(w_a(x)|w_b(x))_S = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\, w_a(x) w_b(x)\,,$$

daje, jeśli procedurę ortonormalizacji zastosować do wielomianów uporządkowanych kanonicznie: $w_0(x) = 1$, $w_1(x) = x$, $w_2(x) = x^2$, itd., wielomiany Hermite'a:

$$H_0(x) = C_0 \cdot 1\,, \quad H_1(x) = C_1 \cdot 2x\,, \quad H_2(x) = C_2 \cdot 4x^2\,, \quad H_3(x) = C_3 \cdot (8x^3 - 12x)\,, \ldots$$

gdzie $C_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$. Grają one ważną rolę w kwantowej teorii oscylatora harmonicznego. Innymi układami wielomianów ortonormalnych (przy innej definicji iloczynu skalarnego i/lub innej ich dziedzinie) są wielomiany Legendre's, Laguerra, Gegenbauera, Czebyszewa...

Zadanie 61

Dana jest forma kwadratowa

$$Q = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz\,.$$

Stosując metodę Lagrange'a sprowadzić ją do postaci diagonalnej. Jeśli to możliwe, podać przykłady trójek liczb x, y, z takich, że $Q > 0$, takich, że $Q < 0$ i takich, że $Q = 0$.

Rozwiązanie: Interpretując zmienne x, y i z jako składowe $v^i_{(e)}$ wektora $\mathbf{v}$ w pewnej bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, tj. pisząc $x \equiv v^1_{(e)}$, $y \equiv v^2_{(e)}$, $z \equiv v^3_{(e)}$, możemy znaleźć macierz formy Q:

$$Q(\mathbf{v}) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5/2 \\ 3 & 5/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv Q^{(e)}_{ij} v^i_{(e)} v^j_{(e)}\,.$$

Zwróćmy tu uwagę na to, że elementy pozadiagonalne są połówkami odpowiednich wyrazów mieszanych w Q! Metoda Lagrange'a (szumna nazwa!) sprowadza się do sukcesywnego "zwijania do pełnego kwadratu":

$$\begin{aligned} Q &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz \\ &= (x + 2y + 3z)^2 - 2y^2 - 6z^2 - 7yz \\ &= (x + 2y + 3z)^2 - 2(y + \frac{7}{4}z)^2 + \frac{1}{8}z^2\,. \end{aligned}$$

[61] Przestrzeń ta jest wiec nieskończenie wymiarowa, ale jeszcze "do ogarnięcia", bo jest ośrodkowa, tzn. mająca przeliczalną bazę; cuda - czyli kwantowa teoria pola - zaczynają się, gdy przestrzeń Hilberta - już było, ale żeby się utrwaliło: wektorowa przestrzeń nad $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym, zupełna w normie zadawanej przez ten iloczyn - ma bazę nieprzeliczalną...

Z postaci tej odczytujemy, że w odpowiedniej bazie $\mathbf{f}_i$, którą znajdziemy poniżej, macierz formy będzie postaci

$$Q_{ij}^{(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Przypomnijmy, że zmianę bazy reprezentujemy wzajemnie odwrotnymi macierzami $R_{f\leftarrow e}$ i $R_{e\leftarrow f}$ takimi, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \mathbf{f}_j [R_{f\leftarrow e}]^j{}_i & \qquad v^i_{(f)} &= [R_{f\leftarrow e}]^i{}_j v^j_{(e)}\,, \\ \mathbf{f}_i &= \mathbf{e}_j [R_{e\leftarrow f}]^j{}_i & \qquad v^i_{(e)} &= [R_{e\leftarrow f}]^i{}_j v^j_{(f)}\,. \end{aligned}$$

W naszym przypadku, ponieważ wartość formy kwadratowej Q na wektorze $\mathbf{v}$ nie może zależeć od wyboru bazy, powinno być jasne, że jeśli znajdziemy taką bazę $\mathbf{f}_i$, w której składowe wektora $\mathbf{v}$ są postaci

$$\begin{aligned} v^1_{(f)} &= v^1_{(e)} + 2v^2_{(e)} + 3v^3_{(e)}\,, \\ v^2_{(f)} &= v^2_{(e)} + \frac{7}{4}v^3_{(e)}\,, \\ v^3_{(f)} &= v^3_{(e)}\,, \end{aligned}$$

to będziemy mieć $Q = [v^1_{(f)}]^2 - 2[v^2_{(f)}]^2 + \frac{1}{8}[v^3_{(f)}]^2$, tj. w bazie $\mathbf{f}_i$ macierz formy będzie diagonalna. Z powyższego wzoru mamy natychmiast macierz $R_{f\leftarrow e}$:

$$R_{f\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz odwrotną też łatwo znaleźć wyrażając $v^i_{(e)}$ przez $v^i_{(f)}$: $v^3_{(e)} = v^3_{(f)}$, $v^2_{(e)} = v^2_{(f)} - \frac{7}{4}v^3_{(f)}$, $v^1_{(e)} = v^1_{(f)} - 2(v^2_{(f)} - \frac{7}{4}v^3_{(f)}) - 3v^3_{(f)}$, co daje

$$R_{e\leftarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

czyli, zgodnie ze wzorem przypomnianym wyżej, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ i $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{7}{4}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Ale w gruncie rzeczy nie jest to nam tu do niczego potrzebne. To co ważne, to to, że

$$Q(\mathbf{v}) = Q^{(e)}_{ij} v^i_{(e)} v^j_{(e)} = Q^{(e)}_{ij} [R_{e\leftarrow f}]^i{}_k [R_{e\leftarrow f}]^j{}_l v^k_{(f)} v^l_{(f)} \equiv Q^{(f)}_{kl} v^k_{(f)} v^l_{(f)}\,,$$

czyli $Q^{(f)}_{kl} = Q^{(e)}_{ij}[R_{e\leftarrow f}]^i{}_k [R_{e\leftarrow f}]^j{}_l$ (reguła ta jest taka sama, jak podana w Przypomnieniu reguła przekształcania się przy zmianie bazy macierzy formy biliniowej). Sens tego wzoru jest jasny: macierze $R_{e\leftarrow f}$ przerabiają składowe wektora $\mathbf{v}$ dane w bazie $\mathbf{f}_i$ na jego składowe w bazie $\mathbf{e}_i$, a na te z kolei działa już macierz $Q^{(e)}$. Macierzowo powyższy wzór wygląda tak:

$$Q^{(f)} = R^T_{e\leftarrow f} \cdot Q^{(e)} \cdot R_{e\leftarrow f}\,.$$

(symbol ^{T} oznacza transpozycję macierzy). Łatwo sprawdzić, że istotnie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -7/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5/2 \\ 3 & 5/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Oczywiście można przejść np. do bazy $\mathbf{g}_i$ której wektory są proporcjonalne do wektorów bazy $\mathbf{f}_i$: $\mathbf{g}_i = \kappa_i \mathbf{f}_i$ (niema tu sumowania po i). Wtedy oczywiście $v^i_{(g)} = (1/\kappa_i) v^i_{(f)}$ i macierz formy kwadratowej Q w bazie $\mathbf{g}_i$ ma postać

$$Q^{(g)} = \begin{pmatrix} \kappa_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\kappa_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}\kappa_3^2 \end{pmatrix}.$$

Widać że liczby na diagonali się zmienią ale nie ich znaki (pod warunkiem, że czynniki κ_i nie mogą być zespolone - dlatego twierdzenie Sylvestra dotyczy tylko form kwadratowych na p.w. nad ciałem $\mathbb{R}$).

Niezmienniczość sygnatury formy względem przeskalowania wektorów bazy jest dość oczywista. Aby zobaczyć, że i bardziej skomplikowane transformacje sygnatury tej nie zmieniają zdagonalizujmy jeszcze raz naszą formę Q metodą Lagrange'a, ale zaczynając "od innego końca":

$$\begin{aligned} Q = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz &= 3(z + x + \frac{5}{6}y)^2 - 2x^2 - \frac{1}{12}y^2 - xy \\ &= 3(z + x + \frac{5}{6}y)^2 - 2(x + \frac{1}{4}y)^2 + \frac{1}{24}y^2\,. \end{aligned}$$

Widać, że jak poprzednio sygnatura jest $(+,-,+)$ (kolejność plusów i minusów jest oczywiście bez znaczenia - liczy się tylko liczba plusów i minusów!). Tak jak poprzednio możemy z powyższej postaci formy odczytać zmianę bazy przestrzeni wektorowej i macierz przejścia prowadzące do diagonalnej postaci formy:

$$\begin{aligned} v^1_{(h)} &= v^1_{(e)} + \frac{5}{6}v^2_{(e)} + v^3_{(e)} \\ v^2_{(h)} &= v^1_{(e)} + \frac{1}{4}v^2_{(e)} \\ v^3_{(h)} &= v^2_{(e)} \end{aligned} \qquad R_{h\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{6} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(zmiana bazy z $\mathbf{e}_i$ na $\mathbf{h}_i$). Zatem

$$Q^{(h)} = R^T_{e\leftarrow h} \cdot Q^{(e)} \cdot R_{e\leftarrow h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{7}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5/2 \\ 3 & 5/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{7}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{24} \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}.$$

Jak widać liczby na diagonali się zmieniły, ale sygnatura - nie.

Na koniec znajdźmy takie wektory $\mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_-$ oraz $\mathbf{v}_0$, że $Q(\mathbf{v}_+) > 0$, $Q(\mathbf{v}_-) < 0$ i $Q(\mathbf{v}_0) = 0$. Ich postać w bazie $\mathbf{f}_i$ jest oczywista[62] (wynika z diagonalnej postaci macierzy formy w tej bazie):

$$\mathbf{v}_+ = a'\,\mathbf{f}_1 + b'\,\mathbf{f}_3\,, \qquad \mathbf{v}_- = c'\,\mathbf{f}_2\,, \qquad \mathbf{v}_0 = a\,\mathbf{f}_1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{16}b^2}\,\mathbf{f}_2 + b\,\mathbf{f}_3\,.$$

a', b', c' oraz a, b i c są tu dowolnymi liczbami; postacie wektorów $\mathbf{v}_+$ i $\mathbf{v}_-$ nie są oczywiście jedynymi możliwymi - np. druga składowa $\mathbf{v}_+$ nie musi być zupełnie zerowa, żeby wartość formy na tym wektorze była dodatnia. Działając na kolumienki utworzone ze składowych tych wektorów macierzą $R_{(e\leftarrow f)}$ można podać postać tych wektorów w wyjściowej bazie $\mathbf{e}_i$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_+ &= (a' + \frac{1}{2}b')\,\mathbf{e}_1 - \frac{7}{4}b'\,\mathbf{e}_2 + b'\,\mathbf{e}_3\,, \\
\mathbf{v}_- &= -2c'\,\mathbf{e}_1 + c'\,\mathbf{e}_2\,, \\
\mathbf{v}_0 &= \left(a + \frac{1}{2}b \mp 2\sqrt{\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{16}b^2}\right)\mathbf{e}_1 + \left(-\frac{7}{4}b \pm \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{16}b^2}\right)\mathbf{e}_2 + b\,\mathbf{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że wypisana w treści zadania forma $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz$ jest równa $a'^2 + \frac{1}{8}b'^2$, gdy $x = a' + \frac{1}{2}b'$, $y = -\frac{7}{4}b'$, $z = b'$, równa $-2c'^2$, gdy $x = -2c'$, $y = c'$, $z = 0$ i zerowa, gdy x, y, z są równe składowym w bazie $\mathbf{e}_i$ wektora $\mathbf{v}_0$. Powinno być też jasne, że to, że można znaleźć takie wektory, na których wartość formy Q jest dodatnia, ujemna i zerowa wynika z tego, że ma ona sygnaturę mieszaną; gdyby jej sygnatura była np. $(+,+,+)$, ujemnych wartości nie dałoby się uzyskać, a zerową tylko na wektorze zerowym.

Zadanie 62

Sprowadzić do formy diagonalnej formę kwadratową

$$Q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\,.$$

Jeśli to możliwe, podać przykłady trójek liczb x_1, x_2, x_3 takich, że $Q > 0$, takich, że $Q < 0$ i takich, że $Q = 0$.

Rozwiązanie: Akurat tu nie da się zastosować metody Lagrange'a od razu bo - jak mówią komentatorzy meczów siatkarskich - "niema z czego uderzyć". Trzeba więc najpierw "ruszyć z posad bryłę" formy kwadratowej (a nie, jak kiedyś chcieli niektórzy - "the commies" pod przewodem Ziutka Słoneczko, jak o nich mówił swoim niezrównanie

[62] W bazie $\mathbf{h}_i$ też, ale podajmy je w bazie $\mathbf{f}_i$.

bezpośrednim językiem Marek Hłasko - bryłę świata). Podstawmy zatem $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Forma przyjmie wtedy postać

$$Q = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 \, .$$

i teraz już można przejść do zmiennych $z_1 = y_1 + y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$, czyli $y_1 = z_1 - z_3$, $y_2 = z_2$, $y_3 = z_3$. Ostatecznie więc zamiana zmiennych diagonalizująca formę kwadratową ma postać

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 - z_2 - z_3 \, , \\ x_2 &= z_1 + z_2 - z_3 \, , \\ x_3 &= z_3 \, , \end{aligned}$$

i w nowych zmiennych z_i forma ma postać

$$Q = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 \, .$$

Ma ona zatem sygnaturę $(+, -, -)$. Postępujemy dalej jak w poprzednim zadaniu. Powyższa transformacja wyrażająca stare zmienne (składowe w starej bazie) przez nowe (a nie jak w poprzednim zadaniu nowe przez stare!) daje nam od razu potrzebną macierz zmiany bazy $R_{e\leftarrow f}$:

$$R_{e\leftarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Macierz ta rzeczywiście diagonalizuje macierz $Q^{(e)}$ formy Q:

$$R^T_{e\leftarrow f} \cdot Q^{(e)} \cdot R_{e\leftarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Jeśli uznać, że $x_1 \equiv v^1_{(e)}$, $x_2 \equiv v^2_{(e)}$, $x_3 \equiv v^3_{(e)}$, są składowymi wektora $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{e}_i$, to $z_1 \equiv v^1_{(f)}$, $z_2 \equiv v^2_{(f)}$, $z_3 \equiv v^3_{(f)}$, są składowymi tego samego wektora w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_k (R_{e\leftarrow f})^k{}_i$:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Macierz odwrotną, $R_{f\leftarrow e}$, też można znaleźć: wystarczy wyrazić zmienne z_i przez x_i. Wtedy $\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_k [R_{f\leftarrow e}]^k{}_i$, czyli

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Znów, ponieważ sygnatura formy jest mieszana, można podać takie wektory $\mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_-$ oraz $\mathbf{v}_0$ że $Q(\mathbf{v}_+) > 0$, $Q(\mathbf{v}_-) < 0$ i $Q(\mathbf{v}_0) = 0$:

$$\mathbf{v}_+ = a'\,\mathbf{f}_1\,, \qquad \mathbf{v}_- = b'\,\mathbf{f}_2 + c'\,\mathbf{f}_3\,, \qquad \mathbf{v}_0 = \pm\sqrt{b^2+c^2}\,\mathbf{f}_1 + b\,\mathbf{f}_2 + c\,\mathbf{f}_3\,.$$

a', b', c' oraz a, b i c są tu dowolnymi liczbami; także i tu postacie wektorów $\mathbf{v}_+$ i $\mathbf{v}_-$ nie są jedynymi możliwymi. Działając na kolumienki utworzone ze składowych tych wektorów macierzą $R_{(e\leftarrow f)}$ można podać postać tych wektorów w wyjściowej bazie $\mathbf{e}_i$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_+ &= a\,\mathbf{e}_1 + a\,\mathbf{e}_2\,,\\
\mathbf{v}_- &= -(b+c)\,\mathbf{e}_1 + (b-c)\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3\,,\\
\mathbf{v}_0 &= \left(\pm\sqrt{b^2+c^2} - b - c\right)\mathbf{e}_1 + \left(\pm\sqrt{b^2+c^2} + b - c\right)\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że przyjmując w formie $Q(x_1, x_2, x_3)$ za x_1, x_2 i x_3 składowe w bazie $\mathbf{e}_i$ wypisanych powyżej wektorów dostaje się $Q > 0$, $Q < 0$ i $Q = 0$.

Przypomnienie
Forma kwadratowa $Q(x_1, \dots, x_n)$ jest *dodatnio (ujemnie) określona*, jeśli jej wartość na dowolnym wektorze $(x_1, \dots, x_n)$ jest dodatnia (ujemna). Ustalenie tego jest w wielu zagadnieniach, np. przy szukaniu ekstremów funkcji wielu zmiennych, istotne. Oczywiście jeśli sygnaturą formy są same plusy (same minusy), to jest ona dodatnio (ujemnie) określona. Innym użytecznym narzędziem pozwalającym badać określoność macierzy bez jawnego jej diagonalizowania jest "kryterium minorowe":
Jeśli dodatnie są wszystkie jej minory M_{11}, M_{22} ... M_{nn} (minor M_{kk} jest wyznacznikiem macierzy $k \times k$ wyjętej z lewego górnego rogu macierzy formy Q), to forma Q jest dodatnio określona.
(Alternatywnie zamiast żądać dodatniości kolejnych minorów wyjmowanych z lewego górnego rogu, można żądać dodatniości kolejnych minorów wyjmowanych z prawego dolnego rogu). Forma jest ujemnie określona, gdy *dodatnio* określona jest forma $-Q$, której macierz ma wszystkie elementy ze zmienionym znakiem; inaczej, Q jest ujemnie określona gdy $(-1)^k M_{kk} > 0$.

Przykład
W przypadku formy kwadratowej

$$Q(x, y) = a\,x^2 + b\,y^2 + 2d\,xy = (x, y)\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dwu zmiennych regułę tę można natychmiast sprawdzić: warunki $M_{11} = a > 0$, $M_{22} = ab - d^2 >$ zapewniają, że forma ta

$$Q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2dxy = a(x + \frac{d}{a}y)^2 + \frac{ab - d^2}{a}\,y^2$$

ma sygnaturę $(+, +)$, co jest równoważne jej dodatniej określoności.

Zadanie 63
Dla jakich rzeczywistych wartości parametru λ forma

$$Q(x,y,z) = 5x^2 + y^2 + \lambda z^2 + 4xy - 2xz - 2yz = (x,y,z)\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

jest dodatnio określona?
Rozwiązanie: Kryterium "minorowe" daje warunki

$$M_{11} = 5 > 0, \qquad M_{22} = 1 > 0, \qquad M_{33} = \lambda - 2 > 0\,,$$

czyli forma jest dodatnio określona gdy $\lambda > 2$. To samo można zobaczyć stosując metodę Lagrange'a:

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= 5(x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}z)^2 - 5(\frac{2}{5}y - \frac{1}{5}z)^2 + y^2 + \lambda z^2 - 2yz \\ &= 5(x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}z)^2 + \frac{1}{5}y^2 - \frac{6}{5}yz + (\lambda - \frac{1}{5})z^2 \\ &= 5(x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}z)^2 + \frac{1}{5}(y - 3z)^2 + (\lambda - 2)z^2, \end{aligned}$$

co pokazuje, że gdy $\lambda > 2$, forma ma sygaturę $(+,+,+)$, czyli jest dodatnio określona.[63]

Zadanie 64
Dla jakich rzeczywistych wartości parametru λ forma

$$Q = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2\lambda xy + 10xz + 6yz = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

jest dodatnio określona?
Rozwiązanie: Kryterium "minorowe" daje warunki

$$M_{11} = 1 > 0, \qquad M_{22} = 4 - \lambda^2 > 0, \qquad M_{33} = -105 + 30\lambda - \lambda^2 > 0\,,$$

Z ostatniego z nich, rozwiązując równanie kwadratowe $M_{33}(\lambda) = 0$ mamy pierwiastki $\lambda_1 = 15 - 2\sqrt{30}$ oraz $\lambda_2 = 15 + 2\sqrt{30}$; pomiędzy λ_1, a λ_2 minor $M_{33} > 0$. Ponieważ jednak $\lambda_1 > 3$, warunek $M_{33} > 0$ jest sprzeczny z warunkiem $M_{22} > 0$, który jest spełniony tylko gdy $|\lambda| < 2$. Zatem forma ta nigdy nie jest dodatnio określona.

To samo można zobaczyć stosując diagonalizację Lagrange'a (zaczynając od końca)

$$\begin{aligned} Q &= (z + 5x + 3y)^2 - 24x^2 - 5y^2 - (30 - 2\lambda)xy \\ &= (z + 5x + 3y)^2 - 5[y + (3 - \frac{1}{5}\lambda)x]^2 + \frac{1}{5}(15 - \lambda)^2 x^2 - 24x^2. \end{aligned}$$

[63] Uważnie patrząc można dostrzec, że współczynniki pojawiające się w metodzie Lagrange'a (stosowanej sukcesywnie do x, y i z) przed kolejnymi pełnymi kwadratami mają coś wspólnego z minorami M_{11}, M_{22}, ... Na tym w istocie rzeczy polega dowód kryterium "minorowego".

Stąd już widać, że sygnatura formy jest mieszana, niezależnie od wartości λ.

Zadanie 65
Zbadać określoność i podać sygnaturę formy kwadratowej

$$Q = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\lambda xy + 2xz\,,$$

w zależności od wartości parametru λ.
Rozwiązanie: Aby ustalić dla jakich wartości λ forma jest dodatnio określona, można posłużyć się metodą wyznacznikową, tj. zażądać by dodatnie były minory

$$|2| > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} > 0\,.$$

Dostaje się stąd warunki $\lambda^2 < 2$ i $\lambda^2 < \frac{5}{3}$, z których drugi jest oczywiście silniejszy. Metodą tą można jeszcze ustalić, dla jakich wartości λ forma jest ujemnie określona (oczywiście nigdy, bo minor M_{11} jest dodatni, a nie ujemny), ale nie można ustalić jej sygnatury, gdy nie jest ona ani dodatnio ani ujemnie określona. W tym celu trzeba ją zdiagonalizować, np. metodą Lagrange'a. Zaczynając od x-a:

$$\begin{aligned} Q &= 2\left(x + \frac{\lambda}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) y^2 - \lambda yz + \frac{5}{2}z^2 \\ &= 2\left(x + \frac{\lambda}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \left[y - \frac{\lambda}{2-\lambda^2}\,z\right]^2 + \left[\frac{5}{2} - \frac{\lambda^2}{4-2\lambda^2}\right] z^2\,. \end{aligned}$$

Jeśli tylko $\lambda^2 \neq 2$, mamy stąd dodatni znak pierwszego wyrazu, dodatni (jeśli $\lambda^2 < 2$) bądź ujemny (jeśli $\lambda^2 > 2$) drugiego i znak współczynnika trzeciego wyraz wyznaczony przez

$$\frac{5}{2} - \frac{\lambda^2}{4-2\lambda^2} \equiv \frac{5-3\lambda^2}{2-\lambda^2}\,.$$

Zatem gdy (sygnatura tej formy zależy tylko od λ^2, a nie od λ) $\lambda^2 < \frac{5}{3}$ forma ma sygnaturę $(+,+,+)$, gdy $\lambda^2 = \frac{5}{3}$ sygnaturę $(+,+,0)$, gdy $\frac{5}{3} < \lambda^2 < 2$ sygnaturę $(+,+,-)$ i wreszcie, gdy $\lambda^2 > 2$ znów (kolejność plusów i minusów nie gra tu roli!) sygnaturę $(+,+,-)$ (bo wprawdzie ujemny robi się współczynnik drugiego wyrazu, ale z kolei dodatni staje się współczynnik trzeciego). Przez ciągłość (cokolwiek by to pojęcie tu miało znaczyć!) wynika, że gdy $\lambda^2 = 2$, sygnaturą formy powinno być $(+,-,+)$. Można to ustalić wracając do przekształceń: jeśli $\lambda = \pm\sqrt{2}$, to

$$\begin{aligned} Q &= 2\left(x + \frac{\lambda}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 \mp \sqrt{2}\,yz + \frac{5}{2}z^2 \\ &= 2\left(x + \frac{\lambda}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{5}{2}\left(z \mp \frac{1}{5}\sqrt{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{5}y^2\,. \end{aligned}$$

zgodnie z oczekiwaniami.

Nakomplikowaliśmy sobie, podczas gdy stosując metodę Lagrange'a w innej kolejności otrzymalibyśmy:

$$Q = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\lambda xy + 2xz = 3(z + \frac{1}{3}x)^2 + \frac{5}{3}x^2 + 2\lambda xy + y^2\,,$$
$$= 3(z + \frac{1}{3}x)^2 + (y + \lambda x)^2 + (\frac{5}{3} - \lambda^2)x^2\,,$$

co od razu (tak jak metoda minorowa) pokazuje, że forma jest dodatnio określona, gdy $\lambda^2 < \frac{5}{3}$, itd. Morał z tego jest taki, że przed zastosowaniem metody Lagrange'a dobrze jest czujnie popatrzyć, jak ją zastosować...

Zadanie 66

Zdiagonalizować jednocześnie dwie formy kwadratowe

$$Q_1(x,y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2\,, \qquad Q_2(x,y) = 3x^2 + 8xy + 6y^2\,.$$

Rozwiązanie: Przyjmując, że macierzami tych form w pewnej bazie $\mathbf{e}_i$ są macierze

$$Q_1^{(e)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad Q_2^{(e)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

należy przejść do takiej bazy $\mathbf{f}_j$, w której obie macierze $Q_1^{(f)}$ i $Q_2^{(f)}$ będą diagonalne. Nietrudno sprawdzić, że obie podane macierze (formy) są dodatnio określone. Możemy zatem dowolną z nich, np. Q_1 sprowadzić do postaci

$$Q_1^{(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stosując metodę Lagrange'a czyli, mówiąc mniej górnolotnie, zwijając do pełnych kwadratów, otrzymujemy

$$Q_1 = \left(\sqrt{2}\,x + \frac{3}{\sqrt{2}}\,y\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Odczytujemy więc, że $v^1_{(f)} = \sqrt{2}\,v^1_{(e)} + \frac{3}{\sqrt{2}}\,v^2_{(e)}$ i $v^2_{(f)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,v^2_{(e)}$, czyli że

$$R_{f\leftarrow e} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad R_{e\leftarrow f} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Sprawdzamy:

$$R^T_{e\leftarrow f} \cdot Q_1^{(e)} \cdot R_{e\leftarrow f} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ -3/\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście po tej zmianie bazy druga forma nadal pozostaje niediagonalna:

$$Q_2^{(f)} = R_{e\leftarrow f}^T \cdot Q_2^{(e)} \cdot R_{e\leftarrow f} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ -3/\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Powstaje teraz pytanie, jakich dalszych zmian bazy możemy jeszcze dokonać, tak by nie popsuć diagonalności formy Q_1? Odpowiedź (oczywista dla fizyka) jest taka, że wciąż dopuszczalne są *przekształcenia ortogonalne* bazy, tj. takie, których macierze O (to są normalne macierze zmiany bazy $\mathbf{f}_i$ na jakąś bazę $\mathbf{f}'_i$, które dotąd oznaczaliśmy $R_{f'\leftarrow f}$, ale teraz, aby podkreślić ich specjalną formę oznaczymy O, albo bardziej precyzyjnie $O_{f'\leftarrow f}$) są takie, że $O \cdot O^T = O^T \cdot O = I$. Z oczywistych powodów takie przekształcenia nie zepsują diagonalności Q_1:

$$Q_1^{(f')} = O_{f\leftarrow f'}^T \cdot Q_1^{(f)} \cdot O_{f\leftarrow f'} = O_{f\leftarrow f'}^T \cdot I \cdot O_{f\leftarrow f'} = O_{f\leftarrow f'}^T \cdot O_{f\leftarrow f'} = I.$$

Pytanie jednak, czy przekształcenia ortogonalne wystarczają do zdiagonalizowania dowolnej formy kwadratowej? Na szczęście tak! Dowodzi się[64] że tak właśnie jest. Wszystkie dwuwymiarowe macierze ortogonalne można ująć jednym wzorem: zależą one od jednego kąta $\alpha \in [0, 2\pi)$ (kąt ten odpowiada kątowi o jaki obracamy w przestrzeni złączone sztywno razem dwa wektory bazy $\mathbf{f}_i$ - oczywiście jeśli wektory te są "strzałkami", a nie np. wielomianami, bo jak tu interpretować kąt o jaki obracamy razem dwa wielomiany?...). Piszemy zatem ($c_\alpha \equiv \cos\alpha$, $s_\alpha \equiv \sin\alpha$):

$$Q^{(f')} = O_{f\leftarrow f'}^T \cdot Q^{(f)} \cdot O_{f\leftarrow f'} \begin{pmatrix} c_\alpha & s_\alpha \\ -s_\alpha & c_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha & -s_\alpha \\ s_\alpha & c_\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} c_\alpha & s_\alpha \\ -s_\alpha & c_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ac_\alpha + ds_\alpha & -as_\alpha + dc_\alpha \\ dc_\alpha + bs_\alpha & -ds_\alpha + bc_\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ac_\alpha^2 + bs_\alpha^2 + 2dc_\alpha s_\alpha & (a-b)c_\alpha s_\alpha - d(c_\alpha^2 - s_\alpha^2) \\ (a-b)c_\alpha s_\alpha - d(c_\alpha^2 - s_\alpha^2) & as_\alpha^2 + bc_\alpha^2 - 2dc_\alpha s_\alpha \end{pmatrix}.$$

W przypadku formy $Q_2^{(f)}$ oczywiście $a = b = \frac{3}{2}$ i $d = -\frac{1}{2}$. Widać, że dla dowolnych elementów a, b, d symetrycznej macierzy $Q_2^{(f)}$ można uzyskać macierz diagonalną wybierając kąt α taki, że

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2d}{a-b},$$

przy czym, gdy $a = b$ kąt powinien być równy $\frac{\pi}{4} + n\,\frac{\pi}{2}$.

Widać, że aby podany tu chwyt zadziałał, przynajmniej jedna z form musi być dodatnio (lub ujemnie - wtedy $Q^{(f)} = -I$ i metoda dalej działa) określona. W n wymiarowej

[64]Nie wiem gdzie i kiedy, bo to jest jak pytanie o to, gdzie dowiedziono, że $1 + 1 = 2$. (A to, akurat wiem: w *Principia Mathematicae* A.Whiteheade'a i B.Russela; dowód zajmuje maczkiem, specjalnie wprowadzonymi symbolami ze dwie lub trzy strony - czyste szaleństwo!)

przestrzeni macierz ortogonalna O zależy od $\frac{1}{2}n(n-1)$ kątów.[65] W trzech wymiarach mogą to być np. trzy kąty Eulera, z którymi zapewne studenci spotkają się przy okazji zgłębiania zawiłości ruchu tak przez nich ulubionej bryły sztywnej.

Przypomnienie
Wektorem własnym (po angloniemiecku *eigenvector*) odwzorowania liniowego (które fizyk zwykł, zwłaszcza w kontekście mechaniki kwantowej, nazywać *operatorem*) $F: V \to V$ przestrzeni wektorowej V o $\dim V = n$ w nią samą, nazywa się taki wektor $\mathbf{w} \in V$, że

$$F(\mathbf{w}) \ = \ \lambda\, \mathbf{w}\,.$$

Oczywiście wskutek liniowości F wektor taki jest wyznaczony tylko z dokładnością do pomnożenia go przez dowolną liczbę. Liczba λ (też należąca do ciała $\mathbb{K}$, nad którym rozpięta jest przestrzeń wektorowa V) nazywa się wartością własną (po angloniem. *eigenvalue*) operatora (odwzorowania) F na wektorze $\mathbf{w}$. Jeśli $[F_{(e)(e)}]^i{}_j$ jest macierzą odwzorowania F w bazie[66] $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3\dots$, a $w^i_{(e)}$ są składowymi $\mathbf{w}$ w tej samej bazie, to wtedy

$$[F_{(e)(e)}]^i{}_j w^j_{(e)} \ = \ \lambda\, w^i_{(e)}\,.$$

czyli, zapisując to samo inaczej,[67]

$$\left[F_{(e)(e)} - \lambda I\right]^i{}_j\, w^j_{(e)} \equiv \left([F_{(e)(e)}]^i{}_j - \lambda\, \delta^i{}_j\right) w^j_{(e)} = 0\,,$$

(zero po prawej stronie należy rozumieć jako wektor o zerowych składowych, czyli wektor zerowy). Powyższy wzór jest po prostu linowym, jednorodnym układem n równań na n współczynników $w^j_{(e)}$. Taki układ równań ma niezerowe rozwiązania $w^j_{(e)}$ tylko wtedy, gdy zeruje się wyznacznik jego macierzy, tj. gdy

$$W_F(\lambda) \equiv \det\left(F_{(e)(e)} - \lambda\, I\right) = 0\,.$$

Wyrażenie po lewej stronie jest wielomianem, który nazywa się *wielomianem charakterystycznym* macierzy (odwzorowania) F, a wypisane wyżej równanie - *równaniem charakterystycznym.* Niezerowe wektory własne (może być ich więcej niż jeden; maksymalnie n), tj. rozwiązania na ich współczynniki $w^j_{(e)}$ w bazie $\mathbf{e}_j$, istnieją tylko dla tych wartości λ, dla których wielomian charakterystyczny zeruje się. Wartości własne λ odwzorowania liniowego F są więc pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $W_F(\lambda)$ macierzy

[65] Zbiór wszystkich macierzy O wymiaru $n \times n$ spełniających warunki $O^T \cdot O = 1$, $\det O = 1$ tworzy grupę (specjalną ortogonalną) $SO(n)$.

[66] Ponieważ F odwzorowuje V w V, w tekście będziemy zawsze przyjmować, iż obraz $F(\mathbf{v})$ wektora $\mathbf{v} \in V$ jest rozpisany w tej samej bazie co sam wektor $\mathbf{v}$. Jak już było wcześniej wspomniane, w zasadzie nic nie zabrania, by obraz $F(\mathbf{v})$ był rozpisywany w bazie innej niż $\mathbf{e}_i$, lecz prowadziłoby to do niepotrzebnych komplikacji rachunkowych.

[67] Macierz I jest tu macierzą odwzorowania identycznościowego Id. Jeśli - tak jak zawsze przyjmujemy w tego typu zagadnieniach - macierz odwzorowania F jest zapisana "z obu stron" w tej samej bazie, to tak samo zapisana macierz I odwzorowania Id jest niezależna od bazy $\mathrm{Id}_{(e)(e)} = \mathrm{Id}_{(f)(f)} \equiv I$ i $I^i{}_j = \delta^i{}_j$.

tego odwzorowania. Pierwiastki wielomianu charakterystycznego nie zależą od wyboru bazy,[68] od której zależy postać macierzy F; charakteryzują one odwzorowanie F jako takie. Wektory własne macierzy odpowiadające *różnym* wartościom własnym są liniowo niezależne. Istotnie, niech bowiem np. $F(\mathbf{v}_1) = \lambda_1\mathbf{v}_1$, $F(\mathbf{v}_2) = \lambda_2\mathbf{v}_2$ i $F(\mathbf{v}_3) = \lambda_3\mathbf{v}_3$ i niech $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ będą liniowo niezależne; gdyby $\mathbf{v}_3$ był liniowo zależny od $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$, czyli gdyby $\mathbf{v}_3 = \xi_1\mathbf{v}_1 + \xi_2\mathbf{v}_2$ to z liniowości F mielibyśmy z jednej strony

$$F(\mathbf{v}_3) = \lambda_3\mathbf{v}_3 = \lambda_3(\xi_1\mathbf{v}_1 + \xi_2\mathbf{v}_2)\,,$$

a z drugiej

$$F(\mathbf{v}_3) = F(\xi_1\mathbf{v}_1 + \xi_2\mathbf{v}_2) = \xi_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \xi_2\lambda_2\mathbf{v}_2\,.$$

Przyrównując te dwa wyrażenia na $F(\mathbf{v}_3)$ do siebie i przenosząc wszystko na jedną stronę otrzymalibyśmy

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\xi_1\mathbf{v}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\xi_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}\,,$$

i z założonej liniowej niezależności wektorów $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ (która pociąga za sobą liniową niezależność wektorów $\xi_1\mathbf{v}_1$ i $\xi_2\mathbf{v}_2$) otrzymalibyśmy $\lambda_3 = \lambda_1 = \lambda_2$.

Jeśli przestrzeń wektorowa V o $\dim V = n$ jest nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych, to możliwe są trzy różne sytuacje:

- $W_F(\lambda)$ może mieć n różnych pierwiastków rzeczywistych λ_a, $a = 1, \dots, n$. Każdemu z nich odpowiada wtedy wektor własny $\mathbf{w}_a$ (tj. jedno rozwiązanie na składowe $w^i_{a(e)}$) i zbiór tych n wektorów jest liniowo niezależny. Macierz F jest wtedy diagonalizowalna (tzn. przyjmuje postać diagonalną z wartościami własnymi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ na diagonali) w bazie tworzonej przez wektory własne $\mathbf{w}_a$, $a = 1, \dots, n$. Jest teże oczywiste, że $\det(F_{(e)(e)}) = \det(F_{(w)(w)}) = \prod_{a=1}^n \lambda_a$.

- $W_F(\lambda)$ może mieć n różnych pierwiastków ale tylko r rzeczywistych, a pozostałe $n - r$ pierwiastków są parami zespolone sprzężone. Ciało $\mathbb{R}$, nad którym rozpięta jest przestrzeń V można wtedy formalnie rozszerzyć do ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Istnieje wtedy n liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy F z tym, że mają one zespolone składowe (są kombinacjami liniowymi wektorów bazy $\mathbf{e}_i$, ale z zespolonymi współczynnikami $w^i_{(e)}$). W rozszerzonej przestrzeni wektorowej macierz F jest diagonalizowalna. (I oczywiście $\det(F_{(e)(e)})$ jest iloczynem wartości własnych - jeśli macierz $F_{(e)(e)}$ była rzeczywista, muszą one być parami sprzężone więc wyznacznik jest liczba rzeczywistą).

---

[68] Dowód sprowadza się do zauważenia, że $\det\left(F_{(e)(e)} - \lambda\, I\right) = \det\left[R_{e\leftarrow f} \cdot (F_{(f)(f)} - \lambda\, I) \cdot R_{f\leftarrow e}\right] = \det(R_{e\leftarrow f}) \cdot \det\left(F_{(f)(f)} - \lambda\, I\right) \cdot \det(R_{f\leftarrow e}) = \det\left(F_{(f)(f)} - \lambda\, I\right)$, bo $\det(R_{f\leftarrow e}) = \det(R^{-1}_{e\leftarrow f}) = [\det(R_{e\leftarrow f})]^{-1}$. Bardziej ogólnie (ale to już mącenie w głowach studentom!) gdyby bazy "z dwu stron" były jednak różne (bazy tej samej p.w. V - więc to szaleństwo i nieodpowiedzialność!) np. $\mathbf{f}_i$ z prawej "strony" i $\mathbf{e}_i$ z lewej "strony", warunek wyznaczający wartości własne by miał postać $\det\left(F_{(e)(f)} - \lambda\, I_{(e)(f)}\right) = \det(R_{e\leftarrow f}) \cdot \det\left(F_{(f)(f)} - \lambda\, I\right) = 0$ i wobec nieosobliwości macierzy zmiany bazy $R_{e\leftarrow f}$ (tj. wobec tego, iż $\det(R_{e\leftarrow f}) \neq 0$), byłby równoważny warunkowi $\det\left(F_{(f)(f)} - \lambda\, I\right) = 0$.

- Niektóre pierwiastki $W_F(\lambda)$ (rzeczywiste, lub zespolone) są pierwiastkami wielokrotnymi: mamy wtedy r pierwiastków λ_a, $a = 1, \ldots, r$ o krotnościach n_a (oczywiście $n_1 + \ldots + n_r = n$). Każdej z wartości własnych może wtedy odpowiadać k_a, gdzie $1 \leq k_a \leq n_a$, liniowo niezależnych wektorów własnych. Macierz F jest diagonalizowalna tylko wtedy, gdy każdej z wartości własnych λ_a odpowiada dokładnie n_a odpowiadających jej wektorów własnych. Jeśli choćby jednej z wartości własnych λ_a odpowiada mniej wektorów własnych niż krotność n_a tej wartości własnej, to macierz F jest niediagonalizowalna. Mimo to wyznacznik macierzy $F_{(e)(e)}$ jest równy iloczynowi jej n wartości własnych (gdy $n_a > 1$ liczymy λ^{n_r} jako iloczyn n_r czynników).

Jeśli od początku przestrzeń wektorowa V jest rozpięta nad ciałem liczb zespolonych, to oczywiście możliwości są dwie: macierz jest diagonalizowalna (gdy wszystkie pierwiastki $W_F(\lambda)$ są różne lub gdy, mimo występowania pierwiastków wielokrotnych, istnieje n liniowo niezależnych wektorów własnych) lub niediagonalizowalna (gdy $W_F(\lambda)$ ma pierwiastki wielokrotne i mniej wektorów własnych niż n).

Ważnym i, jak zobaczymy, niezmiernie użytecznym faktem jest *twierdzenie Cayleya-Hamiltona* głoszące, że

$$W_F(F) = 0\,,$$

tj., że każda macierz kwadratowa wymiarów $n \times n$ sama spełnia swoje równanie charakterystyczne. Ponieważ (nad ciałem $\mathbb{C}$)

$$W_F(\lambda) = (-1)^n \prod_{a=1}^{r} (\lambda - \lambda_a)^{n_a} \equiv (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{n_r},$$

$(n_1 + \ldots + n_r = n)$, tw. C-H można zapisać w postaci (pomijamy nieistotny czynnik $(-1)^n$)

$$\prod_{a=1}^{r} (F - \lambda_a I)^{n_a} \equiv (F - \lambda_1 I)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (F - \lambda_r I)^{n_r} = 0\,.$$

gdzie I jest macierzą jednostkową $n \times n$.

Użyteczne też będzie wiedzieć, że jeśli wartości własnej λ_a o krotności n_a odpowiada k_a liniowo niezależnych wektorów własnych to dodatkowo

$$\tilde{W}_F(F) \equiv (F - \lambda_1 I)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (F - \lambda_a I)^{n_a - k_a + 1} \cdot \ldots \cdot (F - \lambda_r I)^{n_r} = 0\,.$$

Wielomian $\tilde{W}_F(\lambda)$ będziemy dalej nazywać *zredukowanym* wielomianem charakterystycznym.[69] Oczywiście podobne obniżenie potęgi odpowiedniego czynnika (o jeden na każdy dodatkowy wektor własny) stosuje się do wszystkich czynników wielomianu. Może się

[69]Koledzy matematycy nazywają zdaje się taki wielomian zredukowany najniższego możliwego stopnia *wielomianem minimalnym*.

jednak zdarzyć (zob. Zadanie 70), że F spełnia równanie z obniżoną potęgą czynnika $(F-\lambda I)$ odpowiadającego jakiejś wartości własnej, a mimo to wektorów własnych jest mniej; pokazuje to, ze związek potęgi czynnika $(F-\lambda I)$ z tym, ile jest wektorów własnych odpowiadających tej wartości własnej jest jednokierunkowy: każdy dodatkowy wektor własny obniża potęgę $(F-\lambda I)$, ale możliwość obniżenia potęgi nie oznacza koniecznie istnienia dodatkowego wektora własnego.

Oczywistym, a ważnym i użytecznym wnioskiem wynikającym z powyższych rozważań jest to, że wyznacznik macierzy F jest iloczynem jej wartości własnych. Wynika to bezpośrednio z porównania definicji wielomianu charakterystycznego i jego postaci iloczynowej: $W_F(\lambda)=\det(F-\lambda I)$, więc $W_F(0)=\det F$.

Zadanie 67
Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne macierzy

$$F=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzić, że $\det(F)=12+3-6-10=-1$ jest równy iloczynowi wartości własnych.
Rozwiązanie: Znajdujemy najpierw pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$W_F(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=-(\lambda+1)^3\,.$$

Jest więc tylko jeden pierwiastek $\lambda_1=-1$, ale za to trzykrotny ($n_1=3$). Oczywiście $\det F=\lambda_1^3$. Zgodnie z tym, co powiedziane było wyżej, mogą istnieć trzy, dwa lub jeden wektor własny odpowiadający $\lambda_1=-1$. Aby sprawdzić ile ich jest, rozwiązujemy układ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}=0\,.$$

Ostatni rządek mówi, że $w^1+w^3=0$, co wykorzystane sprowadza pierwszy i drugi rządek do tego samego równania $w^1-w^2=0$. Rozwiązaniem tych dwu niezależnych równań jest każdy wektor proporcjonalny do

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Jest więc tylko jeden wektor własny. Sprawdźmy twierdzenie C-H:

$$W_F(F)=(F+I)^3=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ jak widać ani $F + I$ ani $(F + I)^2$ nie są macierzami zerowymi, więc zgodnie z tym, co było powiedziane wyżej, może być[70] tylko jeden liniowo niezależny wektor własny F odpowiadający wartości własnej $\lambda_1 = -1$.

Zadanie 68
Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne macierzy

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Znajdujemy najpierw pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$W_F(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^3 .$$

Jak w poprzednim zadaniu równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek $\lambda_1 = 2$ trzykrotny ($n_1 = 3$). Szukamy wektora(ów) własnego(ych):

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = 0 .$$

Gołym okiem widać, że są dwa liniowo niezależne (proporcjonalne do):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zobaczmy, jak to się ma do twierdzenia C-H:

$$(F - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tak jak należało oczekiwać. Widać też, że $\det F = 8$ (obliczony "po skosach") jest równy iloczynowi wartości własnych macierzy F: $\det F = \lambda_1^3$.

[70] Jak już podkreślaliśmy, gdyby się było okazało, że np. $(F + I)^2 = 0$, nie oznaczałoby to, że musi być dodatkowy wektor własny; jednak gdyby taki dodatkowy wektor był, to jego istnienie implikowałoby $(F + I)^2 = 0$.

Zadanie 69
Jak poprzednio tylko

$$F = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Znajdujemy, że $W_F(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 1)$. Powinien być więc jeden wektor własny odpowiadający $\lambda_1 = 1$ i jeden lub dwa wektory odpowiadające wartości własnej $\lambda_2 = 0$. Sprawdźmy twierdzenie C-H:

$$\begin{aligned} F^2 \cdot (F - I) &= \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ponieważ $F \cdot (F - I) \neq 0$, może być tylko jeden wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_2 = 0$. Rozwiązując odpowiednie układy liniowe znajdujemy, że

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{odpowiada } \lambda_1 = 1\,, \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{odpowiada } \lambda_2 = 0\,.$$

Skoro jedna wartość własna jest zerem, to wyznacznik znika. I rzeczywiście: $\det F = 0$.

Zadanie 70
Jak poprzednio tylko

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Obliczamy wyznacznik $F - \lambda I$ stosując rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5-\lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\qquad = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & -3 \\ -1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & -3 \\ 4 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\qquad = (3-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Zatem $W_F(\lambda) = [(3-\lambda)(1-\lambda)+1][(5-\lambda)(-1-\lambda)+9] = (\lambda-2)^4$. Jest więc tylko jeden pierwiastek $\lambda_1 = 2$, za to poczwórny ($n_1 = 4$). Sprawdzamy twierdzenie C-H

$$W_F(F) = (F-2I)^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skoro już $(F-2I)^2 = 0$, to mogą (ale nie muszą!) być aż trzy wektory własne odpowiadające $\lambda_1 = 2$. Rozwiązując układ

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

czyli

$$\begin{aligned} w^1 - w^2 \qquad\qquad\qquad &= 0\,, \\ w^1 \qquad\quad + w^3 - w^4 &= 0\,, \\ 4w^1 - w^2 + 3w^3 - 3w^4 &= 0\,, \end{aligned}$$

czyli dwa niezależne równania (bo wstawienie $w^3 - w^4 = -w^1$ z drugiego do czwartego sprowadza to ostatnie do pierwszego): $w^1 - w^2 = 0$ oraz $w^1 + w^3 - w^4 = 0$ na cztery składowe w^i. Mimo więc iż potęgę czynnika $(F - \lambda I)$ dało się obniżyć aż o dwa, jest tylko jeden dodatkowy wektor własny, a nie dwa. Za dwa liniowo niezależne wektory własne możemy wziąć np

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście $\det F = 16 = \lambda_1^4$.

Zadanie 70′

Obliczyć wyznacznik macierzy cyklicznej C wymiaru $N \times N$ postaci

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ a_N & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_N & a_1 & \dots & a_{N-3} & a_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_N & a_1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Wyznacznik jest iloczynem wartości własnych macierzy. Okazuje się, że można zgadnąć wszystkie wektory własne macierzy cyklicznej i w ten sposób wyznaczyć także odpowiadające im wartości własne. Jeden wektor własny jest oczywisty - jest nim wektor składający się z samych jedynek, a odpowiadającą mu wartością własną jest oczywiście $a_1 + \ldots + a_N$. Nietrudno jednak zobaczyć, że pozostałymi wektorami własnymi są wektory postaci[71]

$$\mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} \varepsilon_k \\ \varepsilon_k^2 \\ \varepsilon_k^3 \\ \ldots \\ \varepsilon_k^{N-1} \\ \varepsilon_k^N \end{pmatrix},$$

gdzie ε_k jest k-tym pierwiastkiem (jak wiemy, $k = 0, 1, \ldots, N-1$) N-tego stopnia z 1:

$$\varepsilon_k = \exp\left(i\, \frac{2\pi}{N}\, k \right).$$

Istotnie: macierz cykliczna C działając na taki wektor daje

$$\begin{pmatrix} a_1\,\varepsilon_k + a_2\,\varepsilon_k^2 + a_3\,\varepsilon_k^3 + \ldots + a_{N-1}\,\varepsilon_k^{N-1} + a_N\,\varepsilon_k^N \\ a_N\,\varepsilon_k + a_1\,\varepsilon_k^2 + a_2\,\varepsilon_k^3 + \ldots + a_{N-2}\,\varepsilon_k^{N-1} + a_{N-1}\,\varepsilon_k^N \\ a_{N-1}\,\varepsilon_k + a_N\,\varepsilon_k^2 + a_1\,\varepsilon_k^3 + \ldots + a_{N-3}\,\varepsilon_k^{N-1} + a_{N-2}\,\varepsilon_k^N \\ \ldots \\ a_3\,\varepsilon_k + a_4\,\varepsilon_k^2 + a_5\,\varepsilon_k^3 + \ldots + a_1\,\varepsilon_k^{N-1} + a_2\,\varepsilon_k^N \\ a_2\,\varepsilon_k + a_3\,\varepsilon_k^2 + a_4\,\varepsilon_k^3 + \ldots + a_N\,\varepsilon_k^{N-1} + a_1\,\varepsilon_k^N \end{pmatrix}.$$

Widać, że na l-tym "pięterku" a_1 jest mnożone przez ε_k^l, z kolei $a_2\varepsilon_k$ jest też mnożone przez ε_k^l etc. Ogólnie, dzięki właściwości pierwiastków N-tego stopnia z jedności:

$$\varepsilon_k^r = \varepsilon_k^{r+N},$$

każdy z wierszy tego wektora jest proporcjonalny do odpowiedniego wiersza wektora wyjściowego, a współczynnikiem proporcjonalności jest w każdym wierszu ta sama liczba λ_k

$$\lambda_k = a_1 + a_2\,\varepsilon_k + a_3\,\varepsilon_k^2 + \ldots + a_{N-1}\,\varepsilon_k^{N-2} + a_N \varepsilon_k^{N-1}, \qquad k = 0, \ldots, N-1,$$

będąca zatem k-tą wartością własną ($\varepsilon_0 = 1$, więc λ_0 jest wartością własną odgadniętą na początku) macierzy cyklicznej C.

Trzeba tylko jeszcze się upewnić, że wszystkie wektory własne $\mathbf{w}_k$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, są liniowo niezależne. Tworzyłyby one w takiej sytuacji bazę całej N-wymiarowej

[71] Wektory te mają oczywiście zespolone składowe. W przypadku konkretnych macierzy cyklicznych mających wartości własne o krotnościach większych niż 1 może się okazać możliwe skonstruowanie wektorów własnych o rzeczywistych składowych - zob. Zadanie 74.

przestrzeni i w tworzonej przez nie bazie badana macierz miałaby postać diagonalną z liczbami λ_k na diagonali, co by oznaczało, że jej wyznacznik jest równy $\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{N-1}$. W celu udowodnienia liniowej niezależności wektorów $\mathbf{w}_k$, tworzymy z nich macierz $N\times N$ stawiając je kolejno "na sztorc":

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_{N-2} & \varepsilon_{N-1} \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \ldots & \varepsilon_{N-2}^2 & \varepsilon_{N-1}^2 \\ 1 & \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \ldots & \varepsilon_{N-2}^3 & \varepsilon_{N-1}^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \\ 1 & \varepsilon_1^{N-1} & \varepsilon_2^{N-1} & \ldots & \varepsilon_{N-2}^{N-1} & \varepsilon_{N-1}^{N-1} \\ 1 & \varepsilon_1^{N} & \varepsilon_2^{N} & \ldots & \varepsilon_{N-2}^{N} & \varepsilon_{N-1}^{N} \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $\varepsilon_2=\varepsilon_1^2$, ..., $\varepsilon_{N-1}=\varepsilon_1^{N-1}$, lub ogólniej, $\varepsilon_k^p=\varepsilon_p^k$, nietrudno się zorientować, że jest to wyznacznik Vandermonda obliczony w zadaniu 46, w którym to wyznaczniku teraz $x_1=\varepsilon_1$, $x_2=\varepsilon_2$, etc. Jest on zatem równy

$$\prod_{k>l=0}^{N-1}(\varepsilon_k-\varepsilon_l)\neq 0\,,$$

bo wszystkie pierwiastki ε_k są różne. Zatem wszystkie znalezione wektory własne macierzy cyklicznej są liniowo niezależne i stąd mamy wniosek, że jej wyznacznik jest równy

$$\det C=\prod_{k=0}^{N-1}\left(a_1+a_2\,\varepsilon_k+a_3\,\varepsilon_k^2+\ldots+a_{N-1}\,\varepsilon_k^{N-3}+a_N\varepsilon_k^{N-1}\right)\,.$$

Zadanie 71

Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy

$$F=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Jeśli to możliwe przejść do bazy, w której macierz odwzorowania F jest diagonalna. Napisać także jawnie macierz F^n, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną

Rozwiązanie: Obliczamy wyznacznik macierzy $F-\lambda I$:

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(-1-\lambda)-1=\lambda^2-2=(\lambda-\sqrt{2}\,)(\lambda+\sqrt{2}\,)\,.$$

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są dwa. Są one rzeczywiste i różne. Macierz jest więc diagonalizowalna nad ciałem $\mathbb{R}$. Szukamy wektorów własnych odpowiadających $\lambda_1=\sqrt{2}$ i $\lambda_2=-\sqrt{2}$.

$$\lambda_1=\sqrt{2}:\qquad \begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & 1\\ 1 & -1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Ponieważ wyznacznik znika, tylko jedno z dwu wynikających stąd równań jest niezależne. Kładąc np. $a_1 = 1$, znajdujemy $b_1 = -1 + \sqrt{2}$. Podobnie dla λ_2 mamy

$$\lambda_2 = -\sqrt{2}: \qquad \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

i stąd, kładąc np. $b_2 = 1$ mamy $a_2 = 1 - \sqrt{2}$. Sprawdzamy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście wektory własne nie są wyznaczone jednoznacznie, a tylko z dokładnością do pomnożenia przez liczbę (w przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym można by było dodatkowo narzucić na nie warunek unormowania - ale po co wprowadzać zbędne dla naszego celu struktury?).

Dana w zadaniu macierz jest oczywiście macierzą odwzorowania F w jakiejś bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, tj. powinna być oznaczona $F_{(e)(e)}$, a znalezione wektory są składowymi wektorów własnych w tej bazie. Przejdźmy teraz do bazy $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ tworzonej przez znalezione wektory własne $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 - (1-\sqrt{2}\,)\,\mathbf{e}_2$ oraz $\mathbf{w}_2 = (1-\sqrt{2}\,)\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ odwzorowania F (mogą one być bazą bo są liniowo niezależne). Mamy więc $\mathbf{w}_i = \mathbf{e}_j [R_{(e\leftarrow w)}]^j{}_i$ czyli

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz $R_{(e\leftarrow w)}$ tworzą jak zwykle postawione "na sztorc" składowe znalezionych wektorów własnych macierzy F. Odwracamy $R_{(e\leftarrow w)}$ by dostać macierz $R_{(w\leftarrow e)}$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2(2-\sqrt{2})}.$$

Sprawdzamy, że macierz $F_{(w)(w)} = R_{(w\leftarrow e)} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{(e\leftarrow w)}$ odwzorowania F w nowej bazie jest macierzą diagonalną:

$$\begin{aligned} F_{(w)(w)} &= \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} -4+4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4-4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Macierz F można teraz łatwo podnieść do n-tej potęgi pisząc

$$\begin{aligned} F^n_{(e)(e)} &= R_{(e\leftarrow w)} \cdot (R_{(w\leftarrow e)} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{(e\leftarrow w)})^n \cdot R_{(w\leftarrow e)} = R_{(e\leftarrow w)} \cdot \left(F_{(w)(w)}\right)^n \cdot R_{(w\leftarrow e)} \\ &= \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2^{n/2}}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1+(-1)^n(1-\sqrt{2})^2 & [(-1)^n-1](1-\sqrt{2}) \\ [(-1)^n-1](1-\sqrt{2}) & (-1)^n+(1-\sqrt{2})^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Gdy $n = 1$, daje to oczywiście znowu wyjściową macierz $F_{(e)(e)}$.

Macierz F^n można też znaleźć sposobem, który nie wymaga użycia macierzy diagonalizujących. W tym celu zapisujemy dowolny wektor w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych macierzy F

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Współczynniki α i β nietrudno znaleźć:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Działamy teraz macierzą F^n na dowolny wektor

$$F^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha\, 2^{n/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} + \beta\, (-1)^n 2^{n/2} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że macierz F działając na wektor własny mnoży go przez odpowiadającą mu wartość własną; działanie F^n daje wtedy n-tą potęgę wartości własnej. Mamy więc

$$\begin{aligned} F^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{2^{n/2}}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} [a + b(-1+\sqrt{2})] + (-1)^n[(1-\sqrt{2})a + b](1-\sqrt{2}) \\ (-1+\sqrt{2})[a + b(-1+\sqrt{2})] + (-1)^n[(1-\sqrt{2})a + b] \end{pmatrix} \\ &= \frac{2^{n/2}}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^n(1-\sqrt{2})^2 & [(-1)^n - 1](1-\sqrt{2}) \\ [(-1)^n - 1](1-\sqrt{2}) & (-1)^n + (-1+\sqrt{2})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W ostatnim kroku zapisaliśmy ponownie wynik w postaci działania macierzy na dowolny wektor; macierz ta jest właśnie poszukiwaną macierzą F^n.

Zauważmy, że obie przedstawione metody podnoszenia macierzy do n-tej potęgi stosują się, gdy macierz jest diagonalizowalna, tj. gdy jej wektorów własnych jest maksymalna liczba, dzięki czemu rozpinają one całą przestrzeń V.

Na zakończenie sprawdźmy twierdzenie Cayleya-Hamiltona mówiące, że macierz spełnia swoje równanie charakterystyczne, tj., że $W_F(F) = 0$ (zero w sensie macierzy zerowej oczywiście). Mieliśmy $W_F(\lambda) = \lambda^2 - 2$ więc $W_F(F) = F^2 - 2\,I$, czyli jawnie:

$$W_F(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tak, jak być powinno. W zadaniu 73 pokażemy, jak twierdzenie to można wykorzystać do znalezienia F^n jeszcze innym sposobem, również nie wymagającym użycia macierzy diagonalizujących.

Zadanie 72 (ciąg Fibonacciego)

Podać wzór na n-ty wyraz ciągu zadanego warunkami:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\,, \qquad a_0 = 0\,, \quad a_1 = 1\,.$$

Rozwiązanie: Wzór rekurencyjny definiujący ciąg możemy przepisać w postaci macierzowej:[72]

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \equiv F \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Z postaci tej od razu wynika, że

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = F^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix},$$

gdzie F jest macierzą występującą we wzorze powyżej. Jej wielomian charakterystyczny

$$W_F(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1\,,$$

ma dwa pierwiastki różne i, co za tym idzie, istnieją dwa wektory własne, jako które można wybrać

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,$$
$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Aby znaleźć działanie $n-1$ potęgi macierzy F na wektor warunku początkowego zapisujemy tenże w postaci kombinacji liniowej $\alpha\,\mathbf{w}_1 + \beta\,\mathbf{w}_2$ wektorów własnych macierzy F. Współczynniki α i β znajduje się łatwo i otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Działając teraz na lewą stronę macierzą (fizyk by powiedział raczej “operatorem”) F^{n-1} dostajemy

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = F^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix},$$

[72] F oczywiście bo ciąg Fibonacciego; nie mylić Fibonacciego z Wojciechem Fibakiem!

gdyż działanie F^{n-1} na wektory $\mathbf{w}_{1,2}$ daje $\lambda_{1,2}^{n-1}\mathbf{w}_{1,2}$. Dodając do siebie dwa wektory występujące po prawej stronie odczytujemy z górnej składowej, że

$$a_n = \frac{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].$$

Oczywiście a_{n-1} otrzymane z dolnego pięterka zgadza się z tym, co się dostanie wstawiając $n-1$ zamiast n w otrzymanym wyżej a_n.

Zadanie to można rozwiązać także bez użycia macierzy (zobacz Zadanie 47′): postulujemy po prostu, że $a_n = A\lambda^n$ i wstawiamy to do związku rekurencyjnego. Dostajemy na λ równanie kwadratowe, które jest po prostu tym samym równaniem, co $W_F(\lambda) = 0$. Ponieważ są dwie różne lambdy, a wzór rekurencyjny jest liniowy w a_k, najogólniejsze rozwiązanie ma postać

$$a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n.$$

Stałe A_1 i A_2 można wyznaczyć z warunków, że $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$. Daje to oczywiście ten sam wzór na a_n, co otrzymany wyżej.

Zadanie 73

Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jeśli to możliwe przejść do bazy, w której macierz odwzorowania F jest diagonalna. Znaleźć F^n oraz e^{tF}, dla dowolnej wartości parametru $t \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie: Mamy

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2\,.$$

Pierwiastkami wielomianu charakterystycznego są $\lambda_1 = 1+i$ oraz $\lambda_1 = 1-i$. Są to dwie liczby zespolone wzajemnie sprzężone (bo współczynniki wielomianu charakterystycznego są rzeczywiste). Macierz jest więc diagonalizowalna ale nad ciałem $\mathbb{C}$.

Szukamy jej wektorów własnych

$$\begin{pmatrix} \mp i & 1 \\ -1 & \mp i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ wyznacznik macierzy znika, tylko jedno równanie jest niezależne. Wektory można wybrać w postaci

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{dla} \quad \lambda_1 = 1+i\,, \qquad\qquad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dla} \quad \lambda_2 = 1-i\,.$$

Wybierając jako nową bazę (*skompleksyfikowanej*) przestrzeni wektorowej wektory własne $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ macierzy $F_{(e)(e)}$ (jak zwykle przyjmujemy, że dana w zadaniu macierz jest zapisana w jakiejś bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$) mamy macierz $R_{(e\leftarrow w)}$ zbudowaną jak zwykle z postawionych "na sztorc" składowych wektorów własnych macierzy F w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz odwrotna ma postać

$$R_{(w\leftarrow e)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście

$$F_{(w)(w)} = R_{(w\leftarrow e)} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{(e\leftarrow w)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Posługując się macierzami $R_{(w\leftarrow e)}$ i $R_{(e\leftarrow w)}$ łatwo podnieść F do n-tej potęgi:

$$\begin{aligned} F^n &= R_{(e\leftarrow w)} \cdot [R_{(w\leftarrow e)} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{(e\leftarrow w)}]^n \cdot R_{(w\leftarrow e)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+i)^n & 0 \\ 0 & (1-i)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+i)^n + (1-i)^n & -i(1+i)^n + i(1-i)^n \\ i(1+i)^n - i(1-i)^n & (1+i)^n + (1-i)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Oczywiście gdy $n = 1$, otrzymuje się, jak łatwo sprawdzić, wyjściową macierz F. Zauważmy też, że wszystkie elementy macierzy F^n są rzeczywiste, tak jak być powinno, mimo, że macierze diagonalizujące $R_{(w\leftarrow e)}$ i $R_{(e\leftarrow w)}$ miały elementy zespolone. W podobny sposób znajdujemy e^{tF}:

$$\begin{aligned} e^{tF} = R_{(e\leftarrow w)} \cdot \begin{pmatrix} e^{t(1+i)} & 0 \\ 0 & e^{t(1-i)} \end{pmatrix} \cdot R_{(w\leftarrow e)} &= \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Możemy też sprawdzić że spełnione jest twierdzenie Cayleya-Hamiltona:

$$F^2 - 2F + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie to można wykorzystać do znalezienia F^n innym sposobem (bez posługiwania się macierzami diagonalizującymi). W tym celu rozkładamy jednowyrazowy wielomian (czyli tzw. *monomian*) λ^n na iloczyn wielomianu charakterystycznego $W_F(\lambda)$ i jakiegoś wielomianu $Q(\lambda)$ oraz resztę $r(\lambda)$, która, z uwagi na to, że $W_F(\lambda)$ jest stopnia 2, musi być wielomianem stopnia nie wyższego niż pierwszy:

$$\lambda^n = W_F(\lambda)Q(\lambda) + a_1\lambda + a_0$$

(ogólnie, gdy macierz odwzorowania F jest macierzą wymiaru $p \times p$, a wielomian charakterystyczny $W_F(\lambda)$ jest stopnia p, reszta $r(\lambda)$ jest wielomianem stopnia $p-1$, mającym p współczynników $a_{p-1}, \ldots, a_0$). Współczynniki reszty $a_1\lambda + a_0$ można znaleźć obliczając wartość lewej i prawej strony dla wartości własnych λ_1 i λ_2 macierzy F:

$$\begin{aligned}\lambda_1^n &\equiv (1+i)^n = a_1\lambda_1 + a_0 = a_1(1+i) + a_0\,,\\ \lambda_2^n &\equiv (1-i)^n = a_1\lambda_2 + a_0 = a_1(1-i) + a_0\,,\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że $W_F(\lambda_{1,2}) = 0$. Stąd

$$\begin{aligned}a_1 &= -\frac{i}{2}\left[(1+i)^n - (1-i)^n\right],\\ a_0 &= \ \ \frac{i}{2}\left[(1-i)(1+i)^n - (1+i)(1-i)^n\right],\end{aligned}$$

Mając a i b, możemy teraz wyzyskać twierdzenie Cayleya-Hamiltona podstawiając F do będącego tożsamością wielomianową wzoru $\lambda^n = W_F(\lambda)Q_F(\lambda) + a_1\lambda + a_0$. Daje to

$$F^n = W_F(F)\cdot Q(F) + a_1F + a_0I = a_1F + a_0I\,,$$

ponieważ $W_F(F) = 0$. Zatem

$$F^n = \begin{pmatrix} a_1 + a_0 & a_1 \\ -a_1 & a_1 + a_0 \end{pmatrix},$$

i nietrudno sprawdzić, że $a_1 + a_0 = \frac{1}{2}\left[(1+i)^n + (1-i)^n\right]$, czyli otrzymujemy w ten sposób ten sam wynik co poprzednio. W taki sam sposób można znaleźć e^{tF}, tj. pisząc[73]

$$e^{tF} = \tilde{a}_1F + \tilde{a}_0I\,,$$

i znajdując $\tilde{a}_1$ i $\tilde{a}_0$ przez podstawienie w miejsce F wartości własnych F.

Metoda sformułowana w powyższy sposób działa oczywiście tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny stopnia p ma dokładnie p różnych pierwiastków; jeśli bowiem miałby on jakieś pierwiastki wielokrotne, czyli macierz F miałaby mniej różnych wartości własnych niż p, to byłaby niewystarczająca liczba równań, by wyznaczyć wszystkie p współczynników $a_{p-1}, \ldots, a_0$. Metodę daje się na szczęście (dla studentów to może na nieszczęście?) rozciągnąć zarówno na macierze diagonalizowalne mające mniej różnych wartości własnych ale nadal tyle wektorów własnych, ile wynosi ich wymiar (zobacz Zadanie 74 poniżej), jak też i na macierze niediagonalizowalne, czyli mające mniej wektorów własnych niż ich wymiar (zobacz zadanie 77).

Dygresja.
Metody opartej na wyzyskaniu twierdzenia Cayleya-Hamiltona nie daje się zastosować do obliczania funkcji od macierzy w przypadku, gdy funkcja taka (potraktowana jak funkcja

[73]Pytanie-test: skoro e^{tF} nie jest monomianem, to dlaczego można to tak zrobić?

$x \in \mathbb{R}$) nie ma rozwinięcia w szereg Taylora wokół $x = 0$. Narzuca się myśl, by taką funkcję f (np. pierwiastek) z macierzy $F_{(e)(e)}$ odwzorowania liniowego F (zapisanej w jakiejś bazie $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$), przynajmniej w tych przypadkach, w których $F_{(e)(e)}$ jest diagonalizowalna, *zdefiniować* wzorem

$$f(F_{(e)(e)}) = R_{(e\leftarrow w)} \cdot f(F_{(w)(w)}) \cdot R_{(w\leftarrow e)} ,$$

w którym $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ są wektorami własnymi odwzorowania F, a $F_{(w)(w)}$ jest macierzą diagonalną $F_{(w)(w)} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, mającą na diagonali n (a nie r, jak może sugerować zapis, bo niektóre lambdy się powtarzają) wartości własnych F ($r \leq n$, bo niektóre z nich mogą być pierwiastkami wielokrotnymi W_F; zakładamy jednak, że mimo to macierz $F_{(e)(e)}$ jest diagonalizowalna!); w takiej sytuacji możnaby przyjąć, że (kropki w macierzy oznaczają zera - zapis jest dzięki temu bardziej przejrzysty)

$$f(F_{(e)(e)}) = R_{(e\leftarrow w)} \cdot \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & f(\lambda_2) & \dots & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & f(\lambda_r) \end{pmatrix} \cdot R_{(w\leftarrow e)} .$$

Jakkolwiek przepis ten definiuje coś, co można uznać za $f(F_{(e)(e)})$, to jeśli funkcja jest określona tak jak pierwiastek - znaleźć taką macierz X, że $X^2 = F_{(e)(e)}$, czyli $X = \sqrt{F_{(e)(e)}}$ - może się okazać, że macierzy X spełniających warunek definiujący jest więcej niż można otrzymać z podanego wyżej przepisu.

Np. w przypadku funkcji pierwiastek przekonaliśmy się w Zadaniu 44, że macierzy, które po podniesieniu do kwadratu dają zadaną macierz proporcjonalną do macierzy jednostkowej jest "dużo" - tyle ile możliwych rzutów w przestrzeni n wymiarowej, gdzie n jest wymiarem tej zadanej macierzy proporcjonalnej do jednostkowej. Sytuacja przedstawia się w tym przypadku następująco. Jeśli macierz diagonalna $F_{(w)(w)}$ wymiaru $n \times n$ (powstała z jakiejś macierzy $F_{(e)(e)}$ przez "postawienie tejże na wektorach własnych") ma n różnych wartości własnych (tj. żadna z jej wartości własnych nie ma krotności większej niż 1), to różnych macierzy, które po podniesieniu do kwadratu dadzą $F_{(w)(w)}$ (a po obłożeniu z dwu stron macierzami $R_{e\leftarrow w}$ i $R_{w\leftarrow e}$ i podniesieniu do kwadratu dadzą wyjściową macierz $F_{(e)(e)}$) jest dokładnie 2^n (wyciągając pierwiastki z elementów diagonalnych $F_{(w)(w)}$ możemy na 2^n sposobów wybrać ich znaki). Jeśli jednak któraś wartość własna λ_i ma krotność r_i (ale macierz jest jednak diagonalizowalna), to macierz dającą po podniesieniu do kwadratu macierz $F_{(w)(w)}$ (a po obłożeniu macierzami $R_{e\leftarrow w}$ i $R_{w\leftarrow e}$ i podniesieniu do kwadratu macierz $F_{(e)(e)}$) można też otrzymać, wstawiając w odpowiedni blok wymiaru $r_i \times r_i$ macierz skonstruowaną z jakiegoś rzutu (przestrzeni r_i wymiarowej) według przepisu z Zadania 44.

Pozostaje oczywiście kwestia, jak zdefiniować (i kiedy jest to w ogóle możliwe) funkcję od macierzy, która nie jest diagonalizowalna. Np. w przypadku pierwiastka można się odwołać do twierdzenia (o tzw. rozkładzie Jordana) mówiącego, że (w p.w. nad ciałem $\mathbb{C}$) zawsze istnieje baza, w której macierz niediagonalizowalnego odwzorowania F (tj. takiego, które ma wielokrotne wartości własne i nie wszystkim z nich odpowiada maksymalna liczba wektorów własnych) ma postać jordanowską, czyli składa się z kawałka diagonalnego wymiaru $k \times k$, gdzie k jest liczbą wektorów własnych (niektóre z nich mogą odpowiadać tej samej wartości własnej - do tych kwałków macierzy przy wyciąganiu pierwiastka stosuje się konstrukcja z rzutem z Zadania 44) i rozmieszczonych na pozostałej długości diagonali "klatek Jordana", tj. podmacierzy mających na diagonali jakąś wartość własną i ponad nią jedynki:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Jeśli tylko $\lambda_i \neq 0$, to nietrudno się przekonać bezpośrednim rachunkiem, że daje się znaleźć macierz górnotrójkątną (przynajmniej w przypadku klatki jordanowskiej 2×2 i 3×3 się daje, ale wydaje się, że można to stwierdzenie rozciągnąć na dowolny wymiar klatki) tego samego wymiaru, która po podniesieniu do kwadratu da daną klatkę Jordana. Można więc wtedy nadal zdefiniować pierwiastek z macierzy. (Pozostaje tylko kwestia, czy otrzyma się tak wszystkie możliwe "pierwiastki" z danej macierzy). Np. w przypadku klatki Jordana wymiaru 2×2 łatwo w ten sposób znaleźć wszystkie klatki będące jej pierwiastkami. Warunek (tu, to że macierz po lewej musi być górnotrójkątna wyszłoby i tak z rachunku)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

daje $a^2 = d^2 = \lambda$ oraz $(a + d)b = 1$. Zatem jeśli tylko $\lambda \neq 0$, pierwiastkami ze stojącej po prawej klatki Jordana są macierze

$$\begin{pmatrix} \lambda^{1/2} & \frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \\ 0 & \lambda^{1/2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\lambda^{1/2} & -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \\ 0 & -\lambda^{1/2} \end{pmatrix}$$

(znaki a i d muszą być takie same, żeby można było spełnić drugie równanie). Jak się wydaje,[74] można to rozciągnąć na klatki Jordana dowolnego wymiaru (byle wartość własna, której odpowiada klatka była niezerowa). Konieczna korelacja znaków pierwiastków (z takiego samego, jak w powyższym przykładzie powodu) powoduje, że jest teraz "mniej" klatek pierwiastkowych niż dwa podniesione do potęgi równej wymiarowi klatki.

Zadanie 74

Dana jest macierz F i wektor (wszystko jak zwykle w jakiejś bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$)

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[74]Pewien historyk o królach Francji napisał: "Niektórzy królowie mieli kochanki, niektórzy - *jak się wydaje* - ich nie mieli". Przypuszczam, że miał na myśli Ludwika XI (raczej nie Ludwika IX, bo tu sprawa jest jasna: ten był święty).

Znaleźć wektory własne i wartości własne macierzy F oraz działanie e^{tF}, gdzie $t \in \mathbb{R}$, na podany wektor.
Rozwiązanie: Znajdujemy jak zwykle najpierw wielomian charakterystyczny

$$W_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4\,.$$

Łatwo zauważyć, że jednym z pierwiastków $W_F(\lambda)$ jest $\lambda = 1$. Można więc wydzielić czynnik $(\lambda - 1)$:

$$W_F(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)\,.$$

Równanie charakterystyczne ma zatem dwa pierwiastki: pojedyńczy ($n_1 = 1$) $\lambda_1 = 4$ i podwójny $\lambda_2 = 1$ ($n_2 = 2$). Nie jest więc jeszcze jasne, czy macierz $F \equiv F_{(e)(e)}$ jest diagonalizowalna. Możemy sprawdzić twierdzenie Cayleya-Hamiltona. Mamy

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad F^3 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix},$$

i w macierzowym wyrażeniu $-F^3+6F^2-9F+4I$ mamy na diagonali $-22+6\cdot6-9\cdot2+4\cdot1 = 0$, a poza nią $-21 + 6\cdot5 - 9\cdot1 + 4\cdot0 = 0$. Co więcej, można też zauważyć, że także $F^2 - 5F + 4I = 0$ (na diagonali: $6 - 5\cdot2 + 4\cdot1 = 0$, poza: $5 - 5\cdot1 + 4\cdot0 = 0$). Świadczy to o tym, że macierz może jednak być diagonalizowalna mimo, iż jeden z jej pierwiastków jest podwójny.

Szukamy wektorów własnych macierzy F:

$$\lambda_1 = 4 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

W przypadku λ_1 widać gołym okiem, że rozwiązaniem jest $a_1 = b_1 = c_1$. Dla λ_2 zaś mamy tylko jedno niezależne równanie na trzy współczynniki a_2, b_2, i c_2. Można zatem znaleźć dwa liniowo niezależne wektory własne odpowiadające podwójnemu pierwiastkowi λ_2. Możemy więc jako wektory własne wybrać[75]

$$\lambda_1 = 4: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

[75]Rozpatrywana tu macierz jest przykładem macierzy cyklicznej z Zadania 70′. Jej wartości własne można więc było od razu otrzymać ze wzoru $\lambda_a = 2+\varepsilon_{a-1}+\varepsilon^2_{a-1}$, $a = 1, 2, 3$, gdzie $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$. Przepis podany w Zadaniu 70′ dałby wektory własne odpowiadające dwóm takim samym wartościom własnym λ_2 i λ_3 o zespolonych składowych, które można otrzymać jako dwie kombinacje liniowe (o zespolonych współczynnikach) rzeczywistych wektorów wybranych tutaj.

Jeśli macierz F była macierzą $F_{(e)(e)}$ odwzorowania F w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, to wektory własne $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ odpowiadające λ_1 $(\mathbf{w}_1)$ oraz λ_2 $(\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3)$ mają następujące jawne postacie

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\,, \\
\mathbf{w}_3 &= \phantom{\mathbf{e}_1 +{}} \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\,,
\end{aligned}$$

Możemy też odwrócić te związki (pierwsze po dodaniu doń trzeciego wraz z drugim da układ równań na $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, który już łatwo rozwikłać):

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{3}\left(\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3\right), \\
\mathbf{e}_2 &= \frac{1}{3}\left(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3\right), \\
\mathbf{e}_3 &= \frac{1}{3}\left(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 - 2\mathbf{w}_3\right).
\end{aligned}$$

Mamy zatem potrzebne do diagonalizacji macierze $R_{e\leftarrow w}$ i $R_{w\leftarrow e}$:

$$R_{e\leftarrow w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R_{w\leftarrow e} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

i oczywiście $R_{w\leftarrow e} \cdot R_{e\leftarrow w} = R_{e\leftarrow w} \cdot R_{w\leftarrow e} = I$ oraz $F_{(w)(w)} = R_{w\leftarrow e} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{e\leftarrow w}$:

$$F_{(w)(w)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Znajdziemy teraz wektor

$$e^{tF}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(bo takie rzeczy są często potrzebne do rozwiązania równań różniczkowych). Jeśli tylko to wyrażenie jest potrzebne, można je znaleźć szybkim sposobem, który daje od razu wynik, ale nie pozwala znaleźć samej macierzy e^{tF}. W tym celu rozkładamy podany wektor na wektory własne macierzy F (tj. zapisujemy go w postaci kombinacji liniowej tych wektorów):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(znalezienie współczynników tej kombinacji liniowej jest sprawą prostego rachunku). Następnie działamy:

$$
\begin{aligned}
e^{tF}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}e^{tF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}e^{tF}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}e^{tF}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{4t}+2e^t\\e^{4t}-e^t\\e^{4t}-e^t\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Skorzystaliśmy tu z liniowości e^{tF} i tego, że e^{tF} działając na wektor własny F o wartości własnej λ daje ten sam wektor razy $e^{t\lambda}$.

Możemy też znaleźć samą macierz e^{tF} korzystając z macierzy diagonalizujących $R_{e\leftarrow w}$ i $R_{w\leftarrow e}$:

$$
\begin{aligned}
e^{tF} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}F^n &= R_{e\leftarrow w}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(R_{w\leftarrow e}\cdot F_{(e)(e)}\cdot R_{e\leftarrow w}\right)^n\right]\cdot R_{w\leftarrow e} \\
&= \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{4t}&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^t\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wymnażając macierze znajdujemy

$$
e^{tF} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{4t}+2e^t & e^{4t}-e^t & e^{4t}-e^t\\ e^{4t}-e^t & e^{4t}+2e^t & e^{4t}-e^t\\ e^{4t}-e^t & e^{4t}-e^t & e^{4t}+2e^t\end{pmatrix}.
$$

Alternatywną metodą jest znalezienie działania e^{tF} na dowolny wektor

$$
\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(a+b+c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}(2a-b-c)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}(a+b-2c)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},
$$

rozłożony na wektory własne macierzy F (znalezienie współczynników tego rozkładu jest znów sprawą nietrudnego - gdy ma się już wprawę w rozwiązywaniu standardowych problemów liniowych - rachunku). Działając na obie strony e^{tF} otrzmujemy

$$
\begin{aligned}
e^{tF}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}(a+b+c)\,e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}(2a-b-c)\,e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}(a+b-2c)\,e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}(a+b+c)\,e^{4t}+(2a-b-c)\,e^t\\(a+b+c)\,e^{4t}+(-a+2b-c)\,e^t\\(a+b+c)\,e^{4t}+(-a-b+2c)\,e^t\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Prawą stronę możemy teraz zapisać w postaci macierzy M działającej na wektor o składowych (a,b,c): elementem M_{11} musi wtedy być współczynnik przy a w pierwszej składowej wektora stojącego po prawej stronie ostatniego wzoru, elementem M_{12} jest współczynnik przy b, etc.:

$$e^{tF}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{4t}+2e^{t} & e^{4t}-e^{t} & e^{4t}-e^{t}\\ e^{4t}-e^{t} & e^{4t}+2e^{t} & e^{4t}-e^{t}\\ e^{4t}-e^{t} & e^{4t}-e^{t} & e^{4t}+2e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}.$$

Macierz M jest oczywiście tą samą macierzą e^{tF}, co znaleziona wyżej.

Na koniec spróbujmy znaleźć e^{tF} metodą opartą na twierdzeniu C-H. Ponieważ wielomian charakterystyczny $W_F(\lambda)$ stopnia 3 ma tu pierwiastek podwójny i, co zatem idzie, są tylko dwie różne wartości własne, nie można - jak to już było wyjaśnione - wykorzystać samego wielomianu $W_F(\lambda)$, gdyż wtedy reszta $r(\lambda)$ będąc wielomianem stopnia 2 miałaby 3 współczynniki, na które dałoby się wypisać tylko dwa równania. Na szczęście, w takim przypadku dla $\lambda=\lambda_2$ zeruje się nie tylko $W_F(\lambda)\equiv(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^2$, ale także zredukowany wielomian charakterystyczny niższego stopnia $\tilde{W}_F(\lambda)\equiv(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$ mający tym przypadku postać $\tilde{W}_F(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+4$. Dzięki temu w rozkładzie

$$\lambda^n=\tilde{W}_F(\lambda)\tilde{Q}(\lambda)+\tilde{r}(\lambda),$$

reszta $\tilde{r}(\lambda)$ jest już wielomianem stopnia 1 postaci $\tilde{r}(\lambda)=a_1\lambda+a_0$ mającym tylko dwa współczynniki.[76] W przypadku rozpatrywanej tu macierzy F możemy więc napisać

$$\begin{aligned}e^{t\lambda_1}&=e^{4t}=a_1\lambda_1+a_0=4a_1+a_0\,,\\ e^{t\lambda_2}&=e^{t}\ \ =a_1\lambda_2+a_0=\ \ a_1+a_0\,,\end{aligned}$$

czyli $a_1=\frac{1}{3}(e^{4t}-e^{t})$, $a_0=-\frac{1}{3}e^{4t}+\frac{4}{3}e^{t}$, a stąd mamy

$$e^{tF}=a_1F+a_0I=\begin{pmatrix}2a_1+a_0 & a_1 & a_1\\ a_1 & 2a_1+a_0 & a_1\\ a_1 & a_1 & 2a_1+a_0\end{pmatrix},$$

co oczywiście znów daje tę samą macierz, co poprzednio.

Uzupełnienie

Weźmy "kanoniczny" iloczyn skalarny w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V rozpatrywanej w Zadaniu 74, tj. przyjmijmy, że na wektorach $\mathbf{e}_i$ $(i=1,2,3)$ bazy, w której dana jest badana tam macierz $F\equiv F_{(e)(e)}$ daje on

$$(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)=\delta_{ij}\,.$$

Oznacza to, że iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{w}=\mathbf{e}_i w^i_{(e)}$ i $\mathbf{v}=\mathbf{e}_i v^i_{(e)}$ jest dany wzorem

$$(\mathbf{w}|\mathbf{v})=(\mathbf{e}_i w^i_{(e)}|\mathbf{e}_j v^j_{(e)})=(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)w^i_{(e)}v^j_{(e)}=\delta_{ij}w^i_{(e)}v^j_{(e)}\,.$$

[76] Ogólnie, gdy suma pomniejszonych o jeden krotności wszystkich pierwiastków wielomianu charakterystycznego $W_F(\lambda)$ macierzy wymiaru $p\times p$ wynosi k, to zredukowany wielomian charakterystyczny jest stopnia $p-k$, a reszta $\tilde{r}(\lambda)$ jest wielomianem stopnia $p-k-1$ mającym $p-k$ współczynników, czyli akurat tyle, ile można wyznaczyć wykorzystując $p-k$ różnych wartości własnych.

Przeprowadźmy ortonormalizację Gramma-Schmidta trzech wektorów własnych $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$ (są one liniowo niezależne) macierzy $F \equiv F_{(e)(e)}$.

Jeśli do utworzenia bazy ortonormalnej jako pierwszy weźmiemy wektor $\mathbf{w}_1$, to wystarczy podzielić go przez $\sqrt{3}$, tj. przyjąć, że $\mathbf{w}'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$, by mieć $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1) = 1$. Podobnie dzieląc wektor $\mathbf{w}_2$ przez $\sqrt{2}$ otrzymujemy wektor $\mathbf{w}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ o jednostkowej długości, który jest od razu prostopadły do $\mathbf{w}'_1$:

$$(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_2) = 1\,, \qquad (\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_1) = 0\,.$$

Jednakże wektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$ otrzymany przez podzielenie $\mathbf{w}_3$ przez $\sqrt{2}$ nie jest prostopadły do $\mathbf{w}'_2$. Aby otrzymać taki wektor trzeba zastosować przedstawioną już wcześniej procedurę Gramma-Schmidta:

$$\mathbf{w}'_3 = \frac{1}{N}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{N}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix},$$

(uwzględniliśmy już, że $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3) = 0$), gdzie

$$N^2 = \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 = \frac{3}{2}\,.$$

Tak więc mamy ostatecznie trzy ortonormalne wektory

$$\mathbf{w}'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

które są nadal wektorami własnymi macierzy F. Kluczowe dla tego stwierdzenia jest to, że $\mathbf{w}'_2$ (czyli i $\mathbf{w}_2$) był prostopadły do $\mathbf{w}'_1$ i że stworzyliśmy $\mathbf{w}'_3$ jako kombinację liniową $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$, tj. tylko wektorów własnych $F_{(e)(e)}$ odpowiadających *tej samej* wartości własnej $\lambda_2 = 1$. Gdyby bowiem iloczyny skalarne $(\mathbf{w}_1|\mathbf{w}_2)$ i $(\mathbf{w}_1|\mathbf{w}_3)$ nie znikały, procedura Gramma-Schmidta spowodowałaby pomieszanie wektorów własnych i wektor $\mathbf{w}'_3$ nie byłby już wektorem własnym macierzy $F_{(e)(e)}$. Powstaje więc ważne pytanie, co ma piernik do wiatraka, tj. dlaczego arbitralnie przyjęty przez nas iloczyn skalarny $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ okazał się dobry, tj. dlaczego wektory własne macierzy $F_{(e)(e)}$ odpowiadające *różnym* wartościom własnym okazały się być w tym iloczynie skalarnym wzajemnie do siebie ortogonalne?

Enigmatyczna odpowiedź na to pytanie brzmi: jest tak dlatego, że odwzorowanie F połączone z użytym iloczynem skalarnym $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)_S = \delta_{ij}$, dzięki symetryczności macierzy $F_{(e)(e)}$, daje uczciwą *symetryczną* formę bilinową $B(\mathbf{w},\mathbf{v}) = B(\mathbf{v},\mathbf{w})$ zadaną wzorem $B(\mathbf{w},\mathbf{v}) = (\mathbf{w}|F(\mathbf{v}))_S$, co oznacza, że macierz F jako macierz tej formy można uznać za macierz formy kwadratowej, a każda forma kwadratowa, co już wiemy, jest diagonalizowalna. Ogólniej, jeśli rzeczywista macierz F (niekoniecznie symetryczna) jest diagonalizowalna nad ciałem $\mathbb{R}$, to zawsze można w przestrzeni wektorowej, w której ona działa wprowadzić taki iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_S$, że $(\mathbf{w}|F(\mathbf{v}))_S$ jest symetryczną formą biliniową i w tym iloczynie skalarnym wektory własne F odpowiadające różnym wartościom własnym są wzajemnie ortogonalne.

Patrząc na to inaczej, jeśli dane jest odwzorowanie liniowe F przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{R}$ w nią samą i na tej przestrzeni zadany jest iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_S$, to można zdefiniować odwzorowanie $F^\dagger$ sprzężone do F względem tego iloczynu skalarnego. Działanie $F^\dagger$ na wektory przestrzeni V jest zdefiniowane wzorem (mającym zachodzić dla wszystkich $\mathbf{v}$ i wszystkich $\mathbf{w}$):

$$(\mathbf{w}|F^\dagger(\mathbf{v}))_S := (F(\mathbf{w})|\mathbf{v})_S\,.$$

Ogólne stwierdzenie można teraz wyrazić nastepująco: jeśli odwzorowanie F jest diagonalizowalne nad $\mathbb{R}$ (tj. wartości i wektory własne macierzy tego odwzorowania są rzeczywiste), to istnieje iloczyn skalarny, w którym F jest odwzorowaniem *samosprzężonym* (tj. symetrycznym) w takim sensie, że $F^\dagger = F$, czyli

$$(\mathbf{w}|F(\mathbf{v}))_S = (F(\mathbf{w})|\mathbf{v})_S\,,$$

a więc, tak jak było powiedziane wyżej, forma biliniowa $B(\mathbf{w}|\mathbf{v}) \equiv (\mathbf{w}|F(\mathbf{v}))_S$ jest symetryczna:

$$B(\mathbf{w},\mathbf{v}) \equiv (\mathbf{w}|F(\mathbf{v}))_S = (\mathbf{w}|F^\dagger(\mathbf{v}))_S = (F(\mathbf{w})|\mathbf{v})_S = (\mathbf{v}|F(\mathbf{w}))_S = B(\mathbf{v},\mathbf{w})\,.$$

Wykorzystana tu została najpierw samosprzeżoność F i warunek wyznaczający działanie $F^\dagger$ na wektory, a potem obowiązkowa symetryczność iloczynu skalarnego.[77] I odwrotnie: jeśli istnieje iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_S$, przy którym F jest odwzorowaniem samosprzężonym, to jest ono diagonalizowalne nad $\mathbb{R}$ i jego wektory własne odpowiadające różnym wektorom własnym są nawzajem ortogonalne w $(\cdot|\cdot)_S$. Jeśli w jakiejś bazie $\mathbf{e}_i$ iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_S$ jest kanoniczny, tj. $S^{(e)}_{il} = \delta_{il}$ (zawsze można taką bazę znaleźć), to w tej bazie macierz $[F^\dagger_{(e)(e)}]^l{}_i$ odwzorowania sprzężonego do F jest transpozycją macierzy $[F_{(e)(e)}]^l{}_i$

[77] To samo w notacji wskaźnikowej, tj. rozpisując wszystko w bazie $\mathbf{e}_i$, w której macierzą iloczynu skalarnego $(\cdot|\cdot)_S$ jest $S^{(e)}_{ij}$ (należy zwrócić uwagę na położenie wskaźników!). Warunek wyznaczający działanie $F^\dagger$ to

$$w^k_{(e)} S^{(e)}_{kl} [F^\dagger_{(e)(e)}]^l{}_i v^i_{(e)} = [F_{(e)(e)}]^l{}_k w^k_{(e)} S^{(e)}_{li} v^i_{(e)}\,,$$

czyli, po uwolnieniu się od dowolnych $w^k_{(e)}$ i $v^i_{(e)}$, związek $S^{(e)}_{kl}[F^\dagger_{(e)(e)}]^l{}_i = [F_{(e)(e)}]^l{}_k S^{(e)}_{li}$. Ponadto, ponieważ $F = F^\dagger$, więc $[F^\dagger_{(e)(e)}]^l{}_i = [F_{(e)(e)}]^l{}_i$, czyli $S^{(e)}_{kl}[F_{(e)(e)}]^l{}_i = [F_{(e)(e)}]^l{}_k S^{(e)}_{li}$. Wykorzystujemy teraz ten związek w definicji macierzy $B^{(e)}_{ki}$ formy biliniowej, by wykazać jej symetryczność:

$$B^{(e)}_{ki} \equiv S^{(e)}_{kl}[F_{(e)(e)}]^l{}_i = [F_{(e)(e)}]^l{}_k S^{(e)}_{li} = S^{(e)}_{il}[F_{(e)(e)}]^l{}_k = B^{(e)}_{ik}\,.$$

W drugiej równości wykorzystana została obowiązkowa symetryczność macierzy iloczynu skalarnego, tj. równość $S^{(e)}_{li} = S^{(e)}_{il}$.

tegoż odwzorowania, tzn. $[F^{\dagger}_{(e)(e)}]^l{}_i = [F_{(e)(e)}]^i{}_l$, a macierz odwzorowania F samosprzężonego względem tego iloczynu skalarnego jest w tej bazie oczywiście macierzą symetryczną $[F_{(e)(e)}]^l{}_i = [F_{(e)(e)}]^i{}_l$.

Wszystko to można przenieść na przestrzenie wektorowe nad ciałem $\mathbb{C}$. Jeśli macierz H odwzorowania przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{C}$ w tę samą przestrzeń V jest diagonalizowalna, to istnieje półtoraliniowy iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_S$, przy którym H jest odwzorowaniem *samosprzężonym*, albo inaczej[78] *hermitowskim* tzn. takim, że $H^{\dagger} = H$, gdzie działanie $H^{\dagger}$ na wektory przestrzeni V jest zdefiniowane wzorem (mającym zachodzić dla wszystkich $\mathbf{v}$ i wszystkich $\mathbf{w}$):

$$(\mathbf{w}|H^{\dagger}(\mathbf{v}))_S := (H(\mathbf{w})|\mathbf{v})_S\,.$$

Wektory własne H odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne w tym iloczynie skalarnym. Złożenie $(\cdot|\cdot)_S$ z H daje wtedy uczciwą hermitowską formę półtoraliniową $D(\mathbf{w},\mathbf{v}) \equiv (\mathbf{w}|H(\mathbf{v}))_S$. Jej hermitowskość wynika z równości:

$$D(\mathbf{w},\mathbf{v}) \equiv (\mathbf{w}|H(\mathbf{v}))_S = (\mathbf{w}|H^{\dagger}(\mathbf{v}))_S = (H(\mathbf{w})|\mathbf{v})_S = (\mathbf{v}|H(\mathbf{w}))^*_S = (D(\mathbf{v},\mathbf{w}))^*\,,$$

w których wykorzystana została równość $(\mathbf{u}|\mathbf{v})_S = (\mathbf{v}|\mathbf{u})^*_S$, jaką musi obowiązkowo spełniać iloczyn skalarny zadany na przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{C}$. Ponownie pouczające jest rozpisanie tego samego w dowolnej bazie $\mathbf{e}_i$ przestrzeni V, w której macierzą iloczynu skalarnego $(\cdot|\cdot)_S$ jest $S^{(e)}_{kl}$, a macierzą odwzorowania H samosprzężonego wzgledem tego iloczynu skalarnego jest $[H_{(e)(e)})]^l{}_i = [H^{\dagger}_{(e)(e)})]^l{}_i$:

$$D^{(e)}_{ki} = S^{(e)}_{kl}[H_{(e)(e)})]^l{}_i = S^{(e)}_{kl}[H^{\dagger}_{(e)(e)})]^l{}_i = [H_{(e)(e)})]^{l*}{}_k S^{(e)}_{li} = S^{(e)*}_{il}[H_{(e)(e)})]^{l*}{}_k = D^{(e)*}_{ik}\,.$$

Wykorzystany tu został rozpisany w bazie $\mathbf{e}_i$ związek będący definicją odwzorowania sprzężonego

$$w^{k*}_{(e)} S^{(e)}_{kl}[H^{\dagger}_{(e)(e)}]^l{}_i v^i_{(e)} = ([H_{(e)(e)}]^l{}_k w^k_{(e)})^* S^{(e)}_{li} v^i_{(e)} = [H_{(e)(e)}]^{l*}{}_k w^{k*}_{(e)} S^{(e)}_{li} v^i_{(e)}\,.$$

czyli, po uwolnieniu się od składowych dowolnych wektorów $\mathbf{w}$ i $\mathbf{v}$, związek $S^{(e)}_{kl}[H^{\dagger}_{(e)(e)}]^l{}_i = [H_{(e)(e)}]^{l*}{}_k S^{(e)}_{li}$. Jeśli w bazie $\mathbf{e}_i$ iloczyn skalarny ma postać kanoniczną, tj. $S^{(e)}_{ij} = \delta_{ij}$ (tzn. $(\mathbf{w}|\mathbf{v})_S = w^{i*}_{(e)}\delta_{ij}v^j_{(e)}$), to w tej bazie macierz $[H^{\dagger}_{(e)(e)}]^l{}_k$ odwzorowania sprzężonego do H o macierzy $[H_{(e)(e)}]^l{}_k$ jest dana przez $[H^{\dagger}_{(e)(e)}]^l{}_k = [H_{(e)(e)}]^{k*}{}_l$, a macierz samosprzężonego odwzorowania H jest hermitowska, tj. $[H_{(e)(e)}]^l{}_k = [H_{(e)(e)}]^{k*}{}_l$.

Dodatkowym wnioskiem, jaki otrzymuje się w przypadku odwzorowań przestrzeni wektorowych nad ciałem $\mathbb{C}$ jest ten, że jeśli odwzorowanie H jest w jakimś iloczynie skalarnym $(\cdot|\cdot)_S$ hermitowskie (samosprzężone, symetryczne), to jego wartości własne są rzeczywiste. Wynika to natychmiast z równości

$$(\mathbf{w}|H(\mathbf{w}))_S = (H(\mathbf{w})|\mathbf{w})_S\,.$$

[78]W przestrzeniach skończeniewymiarowych określenia te, jak i określenie odwzorowanie symetryczne, są synonimami. Przestają one takimi być w przestrzeniach nieskończeniewymiarowych, kiedy to rolę zaczynają odgrywać dziedziny odwzorowań.

zastosowanej do wektora własnego $\mathbf{w}$ odwzorowania H. Z półtoraliniowości iloczynu skalarnego wynikają wtedy bowiem równości:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{w}|H(\mathbf{w}))_S &= (\mathbf{w}|\lambda\mathbf{w})_S = \lambda(\mathbf{w}|\mathbf{w})_S\,,\\
(H(\mathbf{w})|\mathbf{w})_S &= (\lambda\mathbf{w}|\mathbf{w})_S = \lambda^*(\mathbf{w}|\mathbf{w})_S\,,
\end{aligned}
$$

które oznaczają, że $\lambda^* = \lambda$.

Po tej długiej, ale dla fizyka niezwykle ważnej dygresji, wracamy do rozpatrywanego przykładu. Mając nowe wektory własne $\mathbf{w}'_i$ możemy powtórzyć diagonalizację macierzy F. Mamy nową macierz $R_{e\leftarrow w'}$

$$
(\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \mathbf{w}'_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},
$$

Potrzebna do diagonalizacji F macierz $R_{w'\leftarrow e}$ jest teraz dana "od ręki" przez transpozycję macierzy $R_{e\leftarrow w'}$.

$$
R_{w'\leftarrow e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.
$$

Musi tak być, bo obie macierze $R_{e\leftarrow w'}$ i $R_{w'\leftarrow e}$ są zbudowane ze składowych wektorów, które są wzajemnie ortonormalne (tj. ortogonalne i unormowane w iloczynie skalarnym, który właśnie w używanej tu bazie ma postać kanoniczną, tj. $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$). Stąd iloczyn $R_{w'\leftarrow e}\cdot R_{e\leftarrow w'}$ można zapisać w poglądowej postaci (przez tłuste $\mathbf{w}'_i$ rozumiemy tu oczywiście nie żywe wektory tylko ich składowe w bazie $\mathbf{e}_i$)

$$
\begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{w}'_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_2 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_3 \rightarrow \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w}'_1 & \mathbf{w}'_2 & \mathbf{w}'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1) & (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_2) & (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_3) \\ (\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_1) & (\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_2) & (\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_3) \\ (\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_1) & (\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_2) & (\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

W taki sam sposób jest oczywiste, że macierze $R_{w'\leftarrow e}$ i $R_{e\leftarrow w'}$ diagonalizują $F \equiv F_{(e)(e)}$:

$$
\begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{w}'_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_2 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_3 \rightarrow \end{pmatrix}\cdot F \cdot\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w}'_1 & \mathbf{w}'_2 & \mathbf{w}'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{w}'_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_2 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_3 \rightarrow \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1\mathbf{w}'_1 & \lambda_2\mathbf{w}'_2 & \lambda_2\mathbf{w}'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1) & \lambda_2(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_2) & \lambda_2(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_3) \\ \lambda_1(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_1) & \lambda_2(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_2) & \lambda_2(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_3) \\ \lambda_1(\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_1) & \lambda_2(\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_2) & \lambda_2(\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.
$$

Oczywiście wykorzystanie powyższych macierzy $R_{w'\leftarrow e}$ i $R_{e\leftarrow w'}$ do znalezienia e^{tF} daje ten sam wynik, co poprzednio:

$$
\begin{aligned}
e^{tF} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} F^n &= R_{e\leftarrow w'} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (R_{w'\leftarrow e} \cdot F \cdot R_{e\leftarrow w'})^n \right] \cdot R_{w'\leftarrow e} \\
&= \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w}'_1 & \mathbf{w}'_2 & \mathbf{w}'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{w}'_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_2 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_3 \rightarrow \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{4t} + 2e^t & e^{4t} - e^t & e^{4t} - e^t \\ e^{4t} - e^t & e^{4t} + 2e^t & e^{4t} - e^t \\ e^{4t} - e^t & e^{4t} - e^t & e^{4t} + 2e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Zadanie 75

Zdiagonalizować formę kwadratową $Q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ raz metodą Lagrange'a, a raz metodą szukania wektorów własnych jej macierzy

$$
Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Rozwiązanie: Aby wygenerować jakieś "x^2" przejdźmy najpierw do zmiennych

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - y_2\,, \\
x_2 &= y_1 + y_2\,, \\
x_3 &= y_3\,,
\end{aligned}
$$

w których forma ma postać $Q = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2(y_1 - y_2)y_3 = 2(y_1 + \frac{1}{2}y_3)^2 - 2(y_2 + \frac{1}{2}y_3)^2$. Wynika stąd, że w zmiennych

$$
\begin{aligned}
z_1 &= y_1 + \frac{1}{2}y_3\,, \\
z_2 &= y_2 + \frac{1}{2}y_3\,, \\
z_3 &= y_3\,,
\end{aligned}
$$

forma ma postać diagonalną $Q = 2z_1^2 - 2z_2^2$. Wyrażając zmienne x_i przez z_i

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_1 - z_2\,, \\
x_2 &= z_1 + z_2 - z_3\,, \\
x_3 &= \phantom{z_1 + z_2 -{}} z_3\,,
\end{aligned}
$$

mamy macierz diagonalizującą $R_{e\leftarrow f}$ ($R_{e\leftarrow f}$ bo daje ona stare zmienne w funkcji nowych - zakładamy, że x_1, x_2 i x_3 są składowymi wektora w bazie $\mathbf{e}_i$, a z_1, z_2 i z_3 jego składowymi w bazie $\mathbf{f}_i$) - tę jedyną potrzebną do diagonalizowania formy kwadratowej. Jak łatwo sprawdzić

$$(R_{e\leftarrow f})^T \cdot Q \cdot R_{e\leftarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Forma kwadratowa jest więc diagonalna w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{f}_i$ związane z wyjściową bazą $\mathbf{e}_i$ wzorem $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j [R_{e\leftarrow f}]^j{}_i$, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\ \mathbf{f}_2 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\ \mathbf{f}_3 &= \quad\quad - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Możemy jednak zdiagonalizować Q inaczej. Możemy uznać, że forma Q powstała z odwzorowania F połączonego z iloczynem skalarnym, takim, że w bazie $\mathbf{e}_i$, w której zadana jest macierz F ma on postać $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$. Przy takim iloczynie skalarnym macierz F w bazie $\mathbf{e}_i$ (czyli w naszej niekonwencjonalnej, ale za to pozwalającej izbieżać niedorozumienija notacji, macierz $F_{(e)(e)}$) jest tożsama z macierzą Q (czyli $Q^{(e)}$):

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}|F(\mathbf{v})) &= v^l_{(e)}(\mathbf{e}_l|\mathbf{e}_j[F_{(e)(e)}]^j{}_i v^i_{(e)}) \\ &= v^l_{(e)}(\mathbf{e}_l|\mathbf{e}_j)[F_{(e)(e)}]^j{}_i v^i_{(e)} = \delta_{lj}[F_{(e)(e)}]^j{}_i v^l_{(e)} v^i_{(e)} \equiv Q^{(e)}_{li} v^l_{(e)} v^i_{(e)}\,. \end{aligned}$$

Ponieważ z macierzowego punktu widzenia δ_{lj} jest macierzą jednostkową, czyli nic nie zmieniającą[79] możemy diagonalizować Q szukając wektorów własnych F

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2)\,,$$

i wartościami własnymi F są $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ oraz $\lambda_3 = 0$. Nietrudno znaleźć odpowiadające im wektory własne

$$\lambda_1 = \sqrt{2}: \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = -\sqrt{2}: \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Wybraliśmy je od razu tak, by były ortonormalne (ponieważ istnieją trzy różne wartości własne macierzy F, jej wektory własne są ortogonalne bez konieczności uciekania się do

[79] To co się zmienia przez macierz $\delta_{lj} = (\mathbf{e}_l|\mathbf{e}_j)$ to jest interpretacja drugiego wektora, czyli $v^l_{(e)}$: staje się on de facto kowektorem (było już o nich wcześniej), ale nie musimy się tu tym przejmować.

procedury Gramma-Schmidta). Macierz F, czyli także macierz formy kwadratowej Q jest zatem diagonalna w ortonormalnej bazie wektorów własnych $\mathbf{w}_i$ macierzy F

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_3\,,\\
\mathbf{w}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_3\,,\\
\mathbf{w}_3 &= \qquad\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e}_3\,,
\end{aligned}$$

która jest zupełnie inna, niż baza wektorów $\mathbf{f}_i$ znaleziona w pierwszej części zadania. W bazie wektorów własnych $\mathbf{w}_i$ mamy

$$Q^{(w)} = F_{(w)(w)} = [R_{e\leftarrow w}]^T \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{e\leftarrow w} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Warto zauważyć, że jakkolwiek w ogólności wzory na diagonalizację formy kwadratowej i macierzy odwzorowania są inne (pierwsze diagonalizują się przez macierze $[R_{e\leftarrow w}]^T$ i $R_{e\leftarrow w}$, a drugie przez $R_{w\leftarrow e}$ i $R_{e\leftarrow w}$), to są one w tym przypadku zgodne bo $[R_{e\leftarrow w}]^T = R_{w\leftarrow e}$.

Przykład ten pokazuje, że dowolność w wyborze bazy, w której forma kwadratowa jest diagonalna nie sprowadza się jedynie do przeskalowania wektorów: bazy wektorów $\mathbf{f}_i$ i $\mathbf{w}_i$ są istotnie różne; różne są też diagonalne postacie formy Q (ale oczywiście sygnatura formy jest zawsze taka sama, tak jak to gwarantuje twierdzenie Sylvestra).

Zadanie 75′
Znaleźć wszystkie iloczyny skalarne, w których wektory własne macierzy

$$F_{(f)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4/3 \\ 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.
Rozwiązanie: Podana macierz ma dwie wartości własne: podwójną $\lambda_1 = 1$ i pojedynczą $\lambda_2 = -1$ oraz wektory własne

$$\mathbf{w}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

z których $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_3$ odpowiadają λ_1, a $\mathbf{w}_2$ odpowiada λ_2. Wektory te są liniowo niezależne, więc można przyjąć je jako bazę przestrzeni wektorowej, w której cała sprawa się rozgrywa. Mamy więc

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

co daje macierz zmiany bazy $R_{f\leftarrow w}$ (wektory $\mathbf{f}_i$ tworzą bazę w której jest dana wyjściowa macierz, której wartości i wektory własne są przedmiotem tego zadania), oraz

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2/3 \\ 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Stojąca tu macierz jest macierzą $R_{w\leftarrow f}$.

Iloczyn skalarny, w którym wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{w}_3$ i $\mathbf{w}_2$ (czyli pary wektorów odpowiadających różnym wartościom własnym) są parami ortogonalne najłatwiej zadać podając jego macierz $S^{(w)}$ (tj. macierz formy biliniowej) w bazie wektorów $\mathbf{w}_i$. W tej bazie każda macierz postaci

$$S^{(w)} = \begin{pmatrix} A & 0 & E \\ 0 & D & 0 \\ E & 0 & B \end{pmatrix},$$

jeśli tylko $A > 0$, $D > 0$ i $AB - E^2 > 0$ (warunek dodatniej określoności) jest dobrym iloczynem skalarnym, spełniającym warunki zadania. Macierz $S^{(f)}$ tego iloczynu skalarnego w bazie wektorów $\mathbf{f}_i$ otrzymujemy mnożąc $S^{(w)}$ przez macierze zmiany bazy:

$$S^{(f)} = R^T_{w\leftarrow f} \cdot S^{(w)} \cdot R_{w\leftarrow f} = \begin{pmatrix} A & 2A & (2A-E)/3 \\ 2A & 4A+D & (4A+D-2E)/3 \\ (2A-E)/3 & (4A+D-2E)/3 & (4A+2B-6E)/9 \end{pmatrix}.$$

Nietrudno sprawdzić, że wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{w}_3$ i $\mathbf{w}_2$ są w tym iloczynie skalarnym parami ortogonalne. Widać też, że taki iloczyn skalarny nie może być "kanoniczny", tj. mieć (w tej bazie) macierzy propocjonalnej do macierzy jednostkowej. Co więcej (patrz Wnioski poniżej), mnożąc macierz F z lewej przez macierz tego iloczynu skalarnego otrzymujemy macierz symetryczną, która jest zatem macierzą formy kwadratowej: $S^{(f)}_{ik}[F_{(f)(f)}]^k{}_j = Q^{(f)}_{ij}$; jawnie

$$\begin{pmatrix} A & 2A & (2A-E)/3 \\ 2A & 4A+D & (4A+D-2E)/3 \\ (2A-E)/3 & (4A+D-2E)/3 & (4A+2B-6E)/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4/3 \\ 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & 2A & (2A-E)/3 \\ 2A & 4A-D & (4A-D-2E)/3 \\ (2A-E)/3 & (4A-D-2E)/3 & (4A+2B-2D-8E)/9 \end{pmatrix}.$$

Przyjmując $A = 1$, $D = 1$, $E = -1$, $B = 9/2$, otrzymuje się iloczyn skalarny, który był użyty do skonstruowania tego przykładu: macierz

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dana w bazie $\mathbf{e}_i$, w której iloczyn skalarny był postaci $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \delta_{ij}u^i_{(e)}v^j_{(e)}$ została "przekręcona" do bazy $\mathbf{f}_i$ za pomocą macierzy

$$R_{f\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{e\leftarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

co dało macierz $F_{(f)(f)} = R_{f\leftarrow e}\cdot F_{(e)(e)}\cdot R_{f\leftarrow e}$ i macierz iloczynu skalarnego

$$S^{(f)} = R^T_{e\leftarrow f}\cdot S^{(e)}\cdot R_{e\leftarrow f} = R^T_{e\leftarrow f}\cdot R_{e\leftarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 7/3 \\ 1 & 7/3 & 19/9 \end{pmatrix}.$$

Wnioski.

1. Symetryczna rzeczywista macierz F jest zawsze diagonalizowalna, bo zawsze można uważać, że jest ona macierzą formy kwadratowej powstałej (jak w Zadaniu 75) z połączenia kanoniczego (kanonicznego w bazie, w której dana jest ta macierz) iloczynu iloczynu skalarnego i macierzy F, a formy kwadratowe są zawsze diagonalizowalne.

2. Jeśli macierz F nie jest symetryczna, ale okazuje się być diagonalizowalna (nad $\mathbb{R}$), to tak jak w Zadaniu 76 można znaleźć jakiś iloczyn skalarny S, w którym wektory własne F odpowiadające jej różnym wartościom własnym są ortogonalne, a wektory odpowiadające tym samym wartościom własnym można w takim iloczynie skalarnym zortogonalizować. Macierz F można wtedy uważać za powstałą z połączenia pewnej formy kwadratowej Q z odwrotnością tego iloczynu skalarnego: $F = S^{-1}\cdot Q$.

3. Uwagi te mają zastosowanie w mechanice klasycznej w teorii małych drgań. Lagrangian wykonującego małe drgania układu o n stopniach swobody ma ogólną postać

   $$L = \frac{1}{2}\,\dot{q}^i T_{ij}\dot{q}^j - \frac{1}{2}\,q^i V_{ij} q^j\,,$$

   przy czym obie (stałe) macierze, T_{ij} oraz V_{ij}, są symetryczne, a macierz energii kinetycznej T_{ij} musi być dodatnio określona (spełnia więc ona konieczny warunek, by być macierzą iloczynu skalarnego). Lagrangian taki prowadzi do równań ruchu

   $$T_{ij}\,\frac{d^2}{dt^2}\,q^j + V_{ij}q^j = 0\,.$$

   Rozwiązania tego układu równań szuka się w postaci $q^j(t) = A^j\exp(i\omega t)$, co prowadzi do warunku

   $$(V - \omega^2 T)_{ij}A^j = 0\,,$$

   równoważnego warunkowi

   $$(T^{-1}\cdot V - \omega^2 I)_{ij}A^j \equiv (F - \omega^2 I)_{ij}A^j = 0\,.$$

Jak widać jest to zagadnienie własne: wektory A^j są wektorami własnymi macierzy $F = T^{-1}\cdot V$, która w ogólności nie jest symetryczna. Ponieważ jednak powstała ona z połączenia iloczynu skalarnego T z formą kwadratową V, jest ona diagonalizowalna, a jej wektory własne A^i_a, gdzie dolny wskaźnik a numeruje różne wektory własne, można wybrać tak, by były ortonormalne w iloczynie skalarnym T: $A^i_a T_{ij} A^j_b = \delta_{ab}$ Zamiana zmiennych $q^i(t) = A^i_a Q^a(t)$ pozwala wtedy sprowadzić Lagrangian do postaci kanonicznej

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\,\dot{Q}^a(t) A^i_a T_{ij} A^j_b \dot{Q}^b(t) - \frac{1}{2}\,Q^a(t) A^i_a V_{ij} A^j_b Q^b(t) \\ &= \frac{1}{2}\,\dot{Q}^a(t)\dot{Q}^a(t) - \frac{1}{2}\,\omega_a^2\,Q^a(t)Q^a(t)\,, \end{aligned}$$

(w drugim członie wykorzystane zostało to, że $V_{ij}A^j_b = \omega_b^2 T_{ij} A^j_b$, a następnie, podobnie jak w pierwszym członie, ortonormalność wektorów A_a w iloczynie skalarnym T).

Przypomnienie
Twierdzenie o rozkładzie na *podprzestrzenie niezmiennicze* zwane też *podprzestrzeniami pierwiastkowymi* względem odwzorowania. Każde odwzorowanie liniowe $F : V \to V$ przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{C}$ ($\mathrm{dim}V = n$) w nią samą zadaje rozkład tej przestrzeni na podprzestrzenie niezmiennicze X_a:

$$V = \oplus_{a=1}^r X_a\,,$$

gdzie r jest liczbą *różnych* pierwiastków równania charakterystycznego $W_F(\lambda) = 0$, przy czym $\mathrm{dim}X_a = n_a$, gdzie n_a jest krotnością a-tego pierwiastka $W_F(\lambda)$, tak że $\mathrm{dim}V = n_1 + \ldots + n_r$. Przestrzenie X_a mają tę właściwość, że dla $\mathbf{v} \in X_a$ zachodzi[80]

$$F(\mathbf{v}) \in X_a\,, \qquad \text{oraz} \qquad (F - \lambda_a I)^{n_a}\cdot\mathbf{v} = 0\,.$$

Symbol $\oplus$ oznacza sumę prostą podprzestrzeni X_a tj. $X_a \cap X_b = \{\mathbf{0}\}$, gdy $a \neq b$; każdy wektor $\mathbf{u} \in V$ można wtedy *jednoznacznie* napisać w postaci $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_r$, gdzie $\mathbf{v}_a \in X_a$.

Zadanie 76
Znaleźć wartości i wektory własne macierzy górnotrójkątnej

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[80] W przypadku odwzorowań liniowych stosuje się zapis $F(\mathbf{v}) \equiv F\cdot\mathbf{v}$; drugi ze wzorów należy więc rozumieć jako n_a-krotne działanie $(F - \lambda_a I)$ na $\mathbf{v}$.

Znaleźć także macierze F^n oraz e^{tF}.

Rozwiązanie: Równanie charakterystyczne ma postać

$$W_F(\lambda) = -(\lambda - 1)^3 = 0\,.$$

Ma ono jeden pierwiastek potrójny (tj. o $n_1 = 3$) $\lambda_1 = 1$. Mamy

$$F - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (F - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (F - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona jest więc spełnione, ale ani $(F - I)^2$ ani $F - I$ nie jest macierzą zerową, co oznacza, że macierz F nie jest z gatunku diagonalizowalnych bo nie znajdzie się trzech liniowo niezależnych wektorów własnych. Niemniej, F^n lub e^{tF} są dobrze określonymi macierzami i powinien być jakiś sposób znalezienia ich (inny od bezpośredniego podnoszenia macierzy do dowolnie wysokiej potęgi).

Rozwiązując równanie $(F - I)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$, tj.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

znajduje się, że w rzeczy samej jest tylko jeden wektor własny

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(czyli po prostu $F\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$) odpowiadający $\lambda_1 = 1$.

By znaleźć F^n lub e^{tF}, możemy wykorzystać twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie niezmiennicze, które w tym przypadku jest dość trywialne, bo $(F - I)^3$ jest po prostu macierzą zerową (jest tak dlatego, że jest tylko jedna wartość własna i cała przestrzeń V jest jedną wielką podprzestrzenią niezmienniczą; skoro więc zgodnie z twierdzeniem $(F - I)^3$ ma dawać zero na każdym wektorze z całej przestrzeni V, to musi być po prostu macierzą zerową). Dla każdego wektora $\mathbf{v} \in V$ wykorzystując rozwinięcie dwumianowe Newtona możemy zatem napisać (oczywiście tu $\lambda = 1$)

$$\begin{aligned} F^n \cdot \mathbf{v} &= [\lambda I + (F - \lambda I)]^n \cdot \mathbf{v} \\ &= \left[\lambda^n I + n\lambda^{n-1}(F - \lambda I) + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2}(F - \lambda I)^2 + \dots\right] \cdot \mathbf{v}\,. \end{aligned}$$

Ponieważ $(F - \lambda I)^3$ zeruje się na każdym wektorze $\mathbf{v}$, wyrazy (zaznaczone kropkami), w których występują potęgi $(F - I)$ wyższe niż druga są macierzami zerowymi. Całe rozwinięcie sprowadza się więc do trzech wyrazów:

$$F^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}(F - \lambda I) + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2}(F - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(w ostatniej postaci wzoru wstawiliśmy już $\lambda = 1$). Nietrudno obliczyć F^2, czy F^3 mnożąc bezpośrednio macierz F przez siebie i sprawdzić, że to co wychodzi, zgadza się z powyższym ogólnym wzorem.

Aby znaleźć e^{tF} postępujemy podobnie i piszemy:

$$e^{tF} = e^{t\lambda I} \cdot e^{t(F-\lambda I)} = e^{t\lambda} \left[I + t(F - \lambda I) + \frac{1}{2} t^2 (F - \lambda I)^2 + \dots \right].$$

Znów, ponieważ $(F - \lambda I)^3$ i wyższe potęgi zerują się na każdym wektorze z V, wyrazy zaznaczone kropkami nic nie wnoszą. Otrzymujemy więc ($\lambda = 1$)

$$e^{tF} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uwaga. Należy podkreślić, że wykorzystany w tym zadaniu trick (a po polsku "chwyt")

$$e^{A+B} = e^A \, e^B \, ,$$

nie jest (!!!) prawdziwy w przypadku dowolnych dwu macierzy A i B. Jest on jednak prawdziwy jeśli $A = \lambda I$ czyli, gdy macierz A (lub macierz B) jest proporconalna do macierzy jednostkowej, która jest *przemienna* (tj. *komutuje* - jak to się mówi w języku mechaniki kwantowej) z dowolną macierzą B, tzn. spełnia $[A, B] \equiv A \cdot B - B \cdot A = 0$.

Zadanie 77

Dana jest macierz F i wektor $\mathbf{u}$ (wszystko jak zwykle w jakiejś bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$):

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć działanie e^{tF} na podany wektor.

Rozwiązanie: Wielomian charakterystyczny ma jeden łatwy do zgadnięcia pierwiastek $\lambda = 1$:

$$W_F(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)\,.$$

Mamy więc dwa pierwiastki $W_F(\lambda)$: pojedyńczy $\lambda_1 = 2$ i podwójny $\lambda_2 = 1$. Wektor własny odpowiadający $\lambda_1 = 2$ można wybrać w postaci

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(jest on jednoznaczny z dokładnością do mnożenia przez liczbę). Szukając wektora własnego odpowiadającego $\lambda_2 = 1$ rozwiązujemy układ równań

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dwa z tych równań są niezależne (inaczej niż w przykładzie z diagonalizowalną macierzą, która też miała pierwiastek podwójny) i wyznaczają ten wektor z dokładnością do mnożenia przez liczbę, np.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Szukamy teraz drugiego wektora pierwiastkowego odpowiadającego $\lambda_2 = 1$: powinien być on taki, że działanie nań $(F - \lambda_2 I)^2 = (F - I)^2$ daje zero, tj.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jak widać, tylko jedno z otrzymywanych z tego warunku równań jest niezależne. Nie wyznaczają więc one tego wektora jednoznacznie, co jednak nie jest zaskoczeniem: podprzestrzeń niezmiennicza związana z $\lambda_2 = 1$ jest dwuwymiarowa (bo $\lambda_2 = 1$ jest pierwiastkiem podwójnym $W_F(\lambda)$). Jednym z należących do niej wektorów jest już jednak znaleziony wyżej wektor własny odpowiadający $\lambda_2 = 1$ (istotnie, powyższe równanie jest spełnione przez $a = 2$, $b = -3$ i $c = 1$); trzeba więc dobrać drugi wektor, na którym zeruje się $(F - I)^2$, tak by był on liniowo niezależny od wektora własnego. Warunki te spełnia np.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(oczywiście zawsze można do niego dodać wektor własny odpowiadający $\lambda_2 = 1$ pomnożony przez jakąkolwiek liczbę). Mamy więc rozkład przestrzeni V na dwie podprzestrzenie niezmiennicze

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dowolny wektor można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową powyższych wektorów rozpinających podprzestrzenie X_1 i X_2:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie tego układu daje $x = a + 2b + 4c$, $y = -a - 2b - 3c$ i $z = a + b + c$. Np. rozkład podanego w zadaniu wektora ma postać

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz podziałać e^{tF} na ten lub, lepiej, dowolny wektor

$$e^{tF}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+2b+4c)\, e^{tF}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-a-2b-3c)\, e^{tF}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + (a+b+c)\, e^{tF}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= (a+2b+4c)\, e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-a-2b-3c)\, e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$+(a+b+c)\, e^{t}\left[I + t(F-I) + \ldots\right]\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wykorzystaliśmy tu to, że dwa pierwsze wektory są wektorami własnymi F i, co za tym idzie, działanie e^{tF} na nie sprowadza się do pomnożenia ich przez $e^{t\lambda_i}$ z odpowiadającą danemu wektorowi wartością własną λ_i. W ostatnim wyrazie, jak poprzednio, wydzieliliśmy czynnik $e^{t\lambda_2 I} = e^t$ i rozwinęliśmy $e^{t(F-\lambda_2 I)}$ w szereg potęgowy. Wprawdzie teraz macierz $(F-\lambda_2 I)^2$ i wyższe potęgi $(F-\lambda_2 I)$ nie są macierzami zerowymi, niemniej dają one zawsze zero w działaniu na stojący za nimi wektor (bo jest on właśnie tak wybrany). Można zatem, jak poprzednio, je opuścić. Zapisujemy teraz poszczególne składniki sumy w postaci macierzy działających na składowe a, b i c naszego dowolnego wektora:

$$e^{tF}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
$$+ e^{t}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t\, e^{t}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

i łącząc na koniec wszystkie występujące tu macierze w jedną znajdujemy

$$e^{tF} = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^t & 2e^{2t} - 2e^t - 2te^t & 4e^{2t} - 4e^t - 2te^t \\ -2e^{2t} + 2e^t + 3te^t & -4e^{2t} + 5e^t + 3te^t & -8e^{2t} + 8e^t + 3te^t \\ e^{2t} - e^t - te^t & 2e^{2t} - 2e^t - te^t & 4e^{2t} - 3e^t - te^t \end{pmatrix}.$$

Jeśli z jakichś powodów potrzebny jest tylko wynik działania e^{tF} na podany w zadaniu wektor, to można go uzyskać szybko bez znajdowania całej macierzy e^{tF}. Wykorzystując znaleziony jawnie rozkład tego wektora na wektory pierwiastkowe mamy

$$e^{tF}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4e^{t}\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 2t \\ t & 1-t & -5t \\ 0 & t & 1+3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(macierz w ostatnim członie po prawej to $I + t(F-I)$). Wykonując operacje po prawej stronie znajdujemy

$$e^{tF}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t} + 6e^t - 8te^t \\ 2e^{2t} - e^t + 12te^t \\ -e^{2t} - e^t - 4te^t \end{pmatrix},$$

co jest oczywiście tym, samym wynikiem, który dostaniemy działając na podany w zadaniu wektor znalezioną wyżej całą macierzą e^{tF}.

Zadanie 78
Znaleźć wartości i wektory własne macierzy

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć e^{tF} metodą rozkładu na podprzestrzenie pierwiastkowe oraz metodą wykorzystującą twierdzenie C-H.
Rozwiązanie: Równanie charakterystyczne ma postać

$$W_F(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0\,.$$

Nietrudno zobaczyć (zgadnąć), że jednym z jego pierwiastków jest -1, a wiedząc już to, że

$$W_F(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 3)\,.$$

Zatem wartości własne są tylko dwie: $\lambda_1 = -1$ - dwukrotna oraz $\lambda_2 = 3$ - jednokrotna.
Szukamy następnie wektorów własnych macierzy F:

$$\lambda_1 = -1\ : \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0\,.$$

Ponieważ pierwsze równanie jest po prostu drugim przemnożonym przez 2, bierzemy dwa ostatnie i kładąc $a = 1$ (bo "normalizacja" wektorów własnych jest i tak nie ważna) rozwiązujemy równania

$$\begin{aligned} 4 - 6b + 8c &= 0\,, \\ 6 - 7b + 8c &= 0\,, \end{aligned}$$

które dają $b = 2$, $c = 1$. Podobnie dla

$$\lambda_2 = 3\ : \qquad \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0\,,$$

biorąc pierwsze dwa równania i kładąc $a = 1$ znajdujemy, że $b = 2$ i $c = 2$. Mamy zatem tylko dwa wektory własne:

$$\lambda_1 = -1\ : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 3\ : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Macierz F jest z gatunku niediagonalizowalnych, więc aby znaleźć e^{tF} trzeba użyć rozkładu na podprzestrzenie pierwiastkowe, lub sposobu. Najpierw sprawdźmy, że się nie pomyliliśmy: gdyby były dwa wektory własne odpowiadające $\lambda_1 = -1$, to macierz $(F - \lambda_1 I)\cdot(F - \lambda_2 I)$ byłaby macierzą zerową. Ale nie jest:

$$(F + I) \cdot (F - 3I) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Oczywiście $(F - \lambda_1 I)^2\cdot(F - \lambda_2 I) = 0$, tak jak tego wymaga twierdzenie C-H:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z twierdzeniem o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe istnieje zatem jeszcze wektor $\mathbf{w} = (x, y, z)$ liniowo niezależny od wektora własnego odpowiadającego wartości własnej $\lambda_1 = -1$, na którym to wektorze $\mathbf{w}$ zeruje się macierz $(F - \lambda_1 I)^2$:

$$(F - \lambda_1 I)^2 \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 16 \\ 32 & -32 & 32 \\ 32 & -32 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Oczywiście wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_1 = -1$ spełnia to równanie, ale nie oń tu teraz chodzi!). Jako $\mathbf{w}$ możemy wziąć np.

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aby znaleźć e^{tF} wyobrażamy sobie jakiś ogólny wektor, na który macierz e^{tF} mogłaby sobie działać i rozkładamy go na dwa wektory własne i wektor $\mathbf{w}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a - b + c) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (b - c) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2a + b) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i działamy nań macierzą e^{tF}:

$$e^{tF} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a - b + c)\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (b - c)\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2a + b)\, e^{-t} e^{t(F+I)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

W pierwszym i drugim składniku kombinacji liniowej wykorzystaliśmy to, że są to wektory własne F i zastąpiliśmy w nich e^{tF} odpowiednio przez e^{3t} i e^{-t}. W ostatnim składniku jak zwykle wykorzystujemy to, że $(F+I)^2$, a zatem i wszystkie wyższe potegi $F+I$, zerują się na wektorze **w** i mamy

$$e^{-t}e^{t(F+I)}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=e^{-t}\left[I+t(F+I)\right]\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=e^{-t}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right].$$

Łącząc to wszystko znajdujemy, że

$$e^{tF}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}(a-b+c)+e^{-t}(b-c)+t\,e^{-t}(-2a+b)\\ e^{3t}(2a-2b+2c)+e^{-t}(2b-2c)+e^{-t}(-2a+b)+t\,e^{-t}(-4a+2b)\\ e^{3t}(2a-2b+2c)+e^{-t}(b-c)+e^{-t}(-2a+b)+t\,e^{-t}(-2a+b)\end{pmatrix}.$$

Grupując w każdym wierszu wyrazy proporcjonalne do a, b i c możemy to w koću zapisać w jako macierz działającą na wektor (a,b,c):

$$e^{tF}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}-2t\,e^{-t} & -e^{3t}+e^{-t}+t\,e^{-t} & e^{3t}-e^{-t}\\ 2e^{3t}-2e^{-t}-4t\,e^{-t} & -2e^{3t}+3e^{-t}+2t\,e^{-t} & 2e^{3t}-2e^{-t}\\ 2e^{3t}-2e^{-t}-2t\,e^{-t} & -2e^{3t}+2e^{-t}+t\,e^{-t} & 2e^{3t}-e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

Macierz stojąca po prawej stronie jest właśnie szukaną macierzą e^{tF}.

Na koniec otrzymamy tę samą macierz wykorzystując chytrze twierdzenie C-H. Zgodnie z regułami gry, możemy każdy monomian λ^n, a zatem także i $e^{t\lambda}$ (bo funkcja exponens jest co prawda nieskończoną, ale zawsze tylko sumą takich monomianów) napisać w postaci

$$e^{t\lambda}=W_F(\lambda)Q(\lambda)+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0\,,$$

w której $Q(\lambda)$ jest jakąś funkcją (która jest nieskończoną sumą jakichś wielomianów otrzymywanych w tym wzorze wtedy, gdy po lewej jego stronie stoi monomian λ^n), a "reszta" $r(\lambda)=a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$ jest wielomianem stopnia mniejszego niż stopień $W_F(\lambda)$. Gdy macierz F ma trzy wartości własne, to podstawiając je jako λ-y w powyższym wzorze uzyskujemy trzy niezależne równania pozwalające wyznaczyć współczynniki a_2, a_1 i a_0. Gdy są tylko dwie wartości własne, ale macierz jest mimo to diagonalizowalna, to w powyższym wzorze zamiast $W_F(\lambda)$ używamy zredukowanego wielomianu charakterystycznego $\tilde{W}_F(\lambda)$ i reszta jest wtedy wielomianem niższego stopnia tak, iż znów mamy dość lambd by wyznaczyć wszystkie jego współczynniki (patrz zadanie 58). Tu jednak mamy jeszcze inny przypadek i musimy się wykazać sprytem: Skoro

$$W_F(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)\,,$$

to nie tylko $W_F(\lambda_1)=W_F(\lambda_2)=0$, ale także

$$\frac{d}{d\lambda}W_F(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1}\equiv W_F'(\lambda_1)=0\,.$$

Możemy więc napisać następujące równania

$$\begin{aligned} e^{t\lambda_{1,2}} &= W_F(\lambda_{1,2})Q(\lambda_{1,2}) + r(\lambda_{1,2}) = r(\lambda_{1,2})\,, \\ t\,e^{t\lambda_1} &= W_F'(\lambda_1)Q(\lambda_1) + W_F(\lambda_1)Q'(\lambda_1) + r'(\lambda_1) = r'(\lambda_1)\,. \end{aligned}$$

Mamy więc znów trzy równania pozwalające wyznaczyć trzy współczynniki a_2, a_1 i a_0 reszty $r(\lambda)$! W naszym przypadku równania te mają postać

$$\begin{aligned} e^{-t} &= a_2 - a_1 + a_0\,, \\ e^{3t} &= 9a_2 + 3a_1 + a_0\,, \\ t\,e^{-t} &= -2a_2 + a_1\,, \end{aligned}$$

i dają

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{16}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) - \frac{1}{4}\,t\,e^{-t}\,, \\ a_1 &= \frac{1}{8}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) + \frac{1}{2}\,t\,e^{-t}\,, \\ a_0 &= \frac{1}{16}\left(e^{3t} + 15\,e^{-t}\right) + \frac{3}{4}\,t\,e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -10 & 8 \\ 24 & -19 & 16 \\ 20 & -18 & 17 \end{pmatrix},$$

można znaleźć łatwo (no, względnie łatwo...) całą macierz $e^{tF} = a_2F^2 + a_1F + a_0I$. Mamy np.

$$\begin{aligned} \left(e^{tF}\right)_{11} &= 13 \cdot \left[\frac{1}{16}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) - \frac{1}{4}\,t\,e^{-t}\right] \\ &+ 1 \cdot \left[\frac{1}{8}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) + \frac{1}{2}\,t\,e^{-t}\right] \\ &+ 1 \cdot \left[\frac{1}{16}\left(e^{3t} + 15\,e^{-t}\right) + \frac{3}{4}\,t\,e^{-t}\right] = e^{3t} - 2t\,e^{-t}\,, \end{aligned}$$

albo

$$\begin{aligned} \left(e^{tF}\right)_{21} &= 24 \cdot \left[\frac{1}{16}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) - \frac{1}{4}\,t\,e^{-t}\right] \\ &+ 4 \cdot \left[\frac{1}{8}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) + \frac{1}{2}\,t\,e^{-t}\right] = 2e^{3t} - 2e^{-t} - 4t\,e^{-t}\,, \end{aligned}$$

etc. Widać, że dostajemy w ten sposób tę samą macierz, którą już znaleźliśmy stosując rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe.

Powstaje pytanie, co by się stało, gdybyśmy w przypadku macierzy F, której wielomian charakterystyczny ma wielokrotne pierwiastki (tzn. gdy, tak jak tu, niektóre wartości własne mają krotności większe nież 1) ale diagonalizowalnej lub częściowo diagonalizowalnej (tzn. mającej więcej niż jeden wektor własny odpowiadający jakimś wielokrotnym wartościom własnym) "zapomnieli" o tym, że przy wykorzystywaniu twierdzenia C-H do znalezienia F^n lub e^{tF} można zamiast $W_F(\lambda)$ posłużyć się zredukownym wielomianem charakterystycznym $\widetilde{W}_F(\lambda)$ i zamiast tego skorzystali z chwytu z pochodnymi takiego jak wyżej? Odpowiedź jest taka, że dostalibyśmy oczywiście te same macierze F^n lub e^{tF}, tylko byśmy się więcej napracowali. Mielibyśmy bowiem wtedy resztę $r(\lambda)$ wyższego stopnia niż gdybyśmy użyli wielomianu zredukowanego i tym samym więcej współczynników a_0, $a_1, \dots$ do wyznaczenia; co więcej (w przypadku wyznaczania e^{tF}) współczynniki te zależałyby od t nie tylko poprzez czynniki $e^{t\lambda_i}$, ale także wielomianowo. Na końcu jednak, po złożeniu reszty $a_0 I + a_1 F + \dots$ "do kupy" okazałoby się, że wielomianowa zależność od t powstała wskutek nieużycia wielomianu zredukowanego by znikła. Zalecam sprawdzić to samemu znajdując w taki sposób e^{tF} w przypadku macierzy F z Zadania 74.

Zadanie J (konstrukcja bazy Jordanowskiej)
Dowodzi się (np. w "kultowym" podręczniku J. Komorowskiego *Od liczb zespolonych do ...*), że przez wybór bazy można każde odwzorowanie F przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{C}$ w nią samą sprowadzić do kanonicznej postaci Jordanowskiej, tj. takiej, w której macierz odwzorowania F składa się z r kwadratowych klatek rozmieszczonych wzdłuż głównej swojej diagonali; klatki te są wymiaru $n_i \times n_i$, gdzie $n_i, \dots, n_r$ są krotnościami (różnych) pierwiastków $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ wielomianu charakterystycznego $W_F(\lambda)$, a i-ta klatka ma na swojej diagonali n_i-krotnie powtórzoną wartość własną λ_i, a nad nią pojedyńczy rząd jedynek. Podać konstrukcję takiej bazy.
Rozwiązanie: Konstrukcja jest bardzo prosta i opiera się na zadawanym przez odwzrowanie F (przedstawionym tu już wcześniej) rozkładzie przestrzeni V na podprzestrzenie niezmiennicze (pierwiastkowe) X_i, $i = 1, \dots, r$. Przestrzenie te są niezmiennicze w tym sensie, że jeśli $\mathbf{v} \in X_i$, to $F \cdot \mathbf{v} \in X_i$. Wobec tego, jest jasne (z samej konstrukcji macierzy odwzorowania w danej bazie), że jeśli baza przestrzeni V jest wybrana tak, że każdy jej wektor należy całkowicie do którejś z podprzestrzeni X_i (inaczej mówiąc: bazę przestrzeni V tworzą połączone bazy wszystkich r podprzestrzeni X_i), to macierz odwzorowania zapisana (z "obu stron") w takiej bazie ma strukturę klatkową: składa się ona z r klatek o rozmiarach $n_i \times n_i$ rozmieszczonych wzdłuż jej głównej diagonali. Wystarczy więc tylko dobrać odpowiednio bazę w każdej z podprzestrzeni X_i.

W tym celu przypominamy sobie, że podprzestrzenie X_i są takie, że jeśli $\mathbf{v} \in X_i$, to

$$(F - \lambda_i I)^{n_i} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}\,.$$

Wiemy też, że w każdej podprzestrzeni X_i jest jeden (lub więcej, ale załóżmy, że tylko jeden) wektor własny $\mathbf{w}_i$, czyli taki, że $(F - \lambda_i I) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Nietrudno się zorientować, że n_i wektorów bazy podprzestrzeni X_i można wybrać tak, iż

$$(F - \lambda_i I) \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0}\,,$$

$$
\begin{aligned}
&(F - \lambda_i I) \cdot \mathbf{r}_{i_1} = \mathbf{v}_i \,, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&(F - \lambda_i I) \cdot \mathbf{r}_{i_{n_i-1}} = \mathbf{r}_{i_{n_i-2}} \,.
\end{aligned}
$$

Wektory $\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_{n_i-1}}$ są wektorami pierwiastkowymi. $(F - \lambda_i I)^{n_i}$ działając na każdy z nich daje zero. Zostały tu one jednak wybrane tak, by tworzyć "matrioszkę": na $\mathbf{v}_i$ zeruje się $(F-\lambda_i I)$, na $\mathbf{r}_{i_1}$ zeruje się $(F-\lambda_i I)^2$, itd. aż do $\mathbf{r}_{i_{n_i-1}}$, na którym zeruje się $(F-\lambda_i I)^{n_i}$. Jeśli powyższe związki przepisze się w postaci

$$
\begin{aligned}
&F \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \,, \\
&F \cdot \mathbf{r}_{i_1} = \lambda_i \mathbf{r}_{i_1} + \mathbf{v}_i \,, \\
&F \cdot \mathbf{r}_{i_2} = \lambda_i \mathbf{r}_{i_2} + \mathbf{r}_{i_1} \,, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&F \cdot \mathbf{r}_{i_{n_i-1}} = \lambda_i \mathbf{r}_{i_{n_i-1}} + \mathbf{r}_{i_{n_i-2}} \,,
\end{aligned}
$$

to stanie się jasne, że w bazie przestrzeni X_i tworzonej przez wektory $(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_{n_i-1}})$ macierz odwzorowania F ma właśnie kanoniczną postać Jordana. I już...

Geometria analityczna (czyli przestrzenie afiniczne)

Przypomnienie
Przestrzeń afiniczna jest to taka przestrzeń bez "pępka świata" jakim w przestrzeni wektorowej jest wektor zerowy. Dokładniej, jest to zbiór A punktów i przestrzeń wektorowa, przy czym określona jest operacja dodawania wektora $\mathbf{v}$ z przestrzeni wektorowej do punktu $p_1 \in A$, której wynikiem jest inny punkt $p_2 \in A$. Inaczej mówiąc, dwa punkty p_1 i p_2 przestrzeni A można od siebie (tzn. jeden od drugiego) odejmować i rezulatem takiego odejmowania jest wektor: $p_2 - p_1 = \mathbf{v}$.

Do uprawiania zwykłej geometrii analitycznej (n-wymiarowej) wystarcza model przestrzeni afinicznej, w którym punkty A są reprezentowane przez kolumienki n liczb (zapisywane w obłych nawiasach i nazywane dalej *współrzędnymi* punktu), a przestrzenią wektorową jest $\mathbb{R}^n$, czy lepiej, żeby się nie putało ("putanica" po rosyjsku to nie córka Putina, co zresztą w zapisie może się Francuzom niewłaściwie kojarzyć z czymś jeszcze gorszym, tylko właśnie plątanina), $V\mathbb{R}^n$, przy czym operacja dodawania (żywego) wektora do punktu zbioru A jest tu określona wzorem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + v_n \end{pmatrix}.$$

Jeśli w takiej przestrzeni wprowadzimy kanoniczny iloczyn skalarny

$$(\mathbf{v}|\mathbf{w}) \equiv \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v^1 w^2 + \ldots + v^n w^n\,,$$

to taką przestrzeń afiniczną będziemy oznaczać $A\mathbb{E}^n$. Można w niej z powodzeniem uprawiać "szkolną" (n-wymiarową) geometrię analityczną.

Przypomnienie
k-płaszczyzną w przestrzeni afinicznej A nazywa się zbiór jej punktów

$$p(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = p + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k\,, \qquad \text{gdzie} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\,,$$

p jest ustalonym punktem A, a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ jest ustalonym zbiorem k liniowo niezależnych wektorów (można to nazwać *zadaniem k-płaszczyzny w sposób parametrycznym*). k-płaszczyznę można też zadać układem $n-k$ równań liniowych spełnianych przez współrzędne należących do niej punktów (jest to jej tzw. opis uwikłany). Jednopłaszczyznę będziemy (zgodnie ze zdrowym rozsądkiem) nazywać prostą, a dwu-płaszczyznę, po prostu płaszczyzną. Reszta to k-płaszczyzny (o $k > 2$) lub hiperpłaszczyzny.

Dwa twory: k-płaszczyzna i l-płaszczyzna są do siebie równoległe jeśli (zakładając bez straty ogólności, że $k \leq l$) każdy z k wektorów definiujących k-płaszczyzna jest pewną kombinacją liniową wektorów rozpinających l-płaszczyznę.

Przykład
Dwie proste (1-płaszczyzny) w czterowymiarowej p. afinicznej zadane wzorami

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 99 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R},$$

są do siebie nawzajem równoległe bo wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix},$$

są jeden do drugiego proporcjonalne.

Podobnie pierwsza z podanych wyżej prostych jest równoległa do płaszczyzny (2-płaszczyzny) zadanej wzorem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s,$$

bo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład
Podając wektor i jakiś punkt w $A\mathbb{R}^3$ zadać prostą wyznaczoną w sposób uwikłany równaniami

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + 2y + 3z &= 3. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Należy w tym celu znaleźć najpierw jakiś jeden (dowolny) punkt spełniający te równania (czyli jedno szczególne rozwiązanie układu równań niejednorodnych). Tu np. może to być punkt o współrzędnych $x = -1$, $y = 2$, $z = 0$. Następnie podstawiamy to do definiujących prostą równań

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

i żądamy, by były one spełnione dla dowolnego t (inaczej mówiąc szukamy rozwiązania układu jednorodnych liniowych równań (bo część niezależna od t spełnia te równania i skasuje się zatem z ich prawą stroną):

$$\begin{aligned} a + \ b + \ c &= 0\,, \\ a + 2b + 3c &= 0\,. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest np. $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, a zatem prostą definiuje wzór

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 79
Znaleźć zbiór punktów będących przecięciem w $A\mathbb{E}^4$ dwu płaszczyzn P_1 i P_2 zdefiniowanych warunkami

$$P_1: \quad \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A\mathbb{E}^4 : \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1\right\},$$

$$P_2: \quad \left\{(t_1 + t_2,\ t_1 - t_2,\ 4t_1 + 2t_2,\ 2t_1 + 4t_2) \in A\mathbb{E}^4, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

$A\mathbb{E}_4$ oznacza tu czterowymiarową przestrzeń euklidesową, tj. afiniczną przestrzeń nad ciałem $\mathbb{R}$ z (kanonicznym) iloczynem skalarnym.
Rozwiązanie: Płaszczyzna P_1 jest tu zadana (w sposób uwikłany) dwoma liniowymi warunkami (ich liniowość jest tym, co powoduje, że jest to płaszczyzna, a nie jakaś inna "krzywa" - cokolwiek by to mogło tu znaczyć - powierzchnia), a druga zadana jest parametrycznie. Płaszczyznę zadaną parametrycznie łatwo przedstawić w postaci równań: wystarczy wyeliminować parametry. Np. w przypadku płaszczyzny P_2 zadanej wzorami:

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 + t_2\,, \\ x_2 &= t_1 - t_2\,, \\ x_3 &= 4t_1 + 2t_2\,, \\ x_4 &= 2t_1 + 4t_2\,, \end{aligned}$$

można to zrobić następująco: wstawiając $2t_1 = x_1 + x_2$, $2t_2 = x_1 - x_2$ z pierwszych dwu związków do pozostałych dwu dostajemy

$$\begin{aligned} x_3 &= 3x_1 + x_2\,, \\ x_4 &= 3x_1 - x_2\,, \end{aligned}$$

i tym samym otrzymujemy dwa równania zadające (w sposób uwikłany) płaszczyznę P_2.

Równania definiujące P_1 można uprościć (odejmując od pierwszego drugie) do $x_1 = 1$ oraz $x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Parametryczne jej przedstawienie można (choć nie będzie nam potrzebne) dostać kładąc np. $x_2 = \tau_1$ i $x_3 = \tau_2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1\,, \\ x_2 &= \tau_1\,, \\ x_3 &= \tau_2\,, \\ x_4 &= 1 - \tau_1 - \tau_2\,. \end{aligned}$$

Przecięcie dwu płaszczyzn są to punkty należące i do P_1 i P_2. Muszą więc one być postaci takiej jak punkty P_2 (tzn. muszą być otrzymywane dla jakichś wartości t_1 i t_2), a zarazem spełniać równania definiujące P_1. Zatem muszą dla nich zachodzić równości

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= 1\,, \\ (t_1 - t_2) + (4t_1 + 2t_2) + (2t_1 + 4t_2) &= 1\,, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= 1\,, \\ 7t_1 + 5t_2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Równania te łatwo rozwiązać: $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. Wstawiając te wartości parametrów do związków zadających P_2 dowiadujemy się, że przecięciem w $A\mathbb{E}^4$ płaszczyzn P_1 i P_2 jest tylko jeden punkt p o współrzędnych

$$p = (1, -5, -2, 8)\,.$$

Może się wydawać niezgodnym z intuicją, że przecięciem dwu płaszczyzn jest tylko punkt: w $A\mathbb{E}^3$ przecięciem dwu płaszczyzn jest zwykle prosta. Niema tu jednak błędu: w $A\mathbb{E}^4$ płaszczyznę definiują dwa równania liniowe, a w $A\mathbb{E}^3$ tylko jedno. Dlatego w $A\mathbb{E}^4$ punkty należące do przecięcia dwu płaszczyzn spełniają cztery liniowe równania na cztery zmienne (a $\mathbb{E}_3$ dwa równania na trzy zmienne). Jak wiemy z teorii równań liniowych może się też zdarzyć, że układ taki nie ma wcale rozwiązań (płaszczyzny się wtedy nie przecinają wcale) lub, że wymiar przestrzeni rozwiązań jest większy niż zero (wtedy przecięciem płaszczyzn jest prosta lub nawet płaszczyzna). Ale najbardziej typowym przecięciem dwu płaszczyzn w $A\mathbb{E}^4$ jest jeden punkt.

Zadanie 79′
Orzec, czy prosta w przestrzeni euklidesowej $A\mathbb{E}^3$ zadana w sposób uwikłany wzorami $x - z = 2$, $y = 2$ jest prostopadła do płaszczyzny

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \xi^1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \xi^2\,.$$

Rozwiązanie Najpierw trzeba znaleźć wektor wyznaczający prostą. Już to robiliśmy (w Zadaniu przykładowym). Tu punktem należącym do prostej jest np. $(1, 2, -1)$. Zatem podaną prostą można przedstawić w postaci

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t\,.$$

Następnie pytamy, jak się ma znaleziony wektor wyznaczający prostą do wektorów rozpinających podaną płaszczyzną, tzn. po prostu liczymy iloczyny skalarne:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = 0\,, \qquad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = 0\,.$$

Ponieważ oba iloczyny skalarne są równe zeru, czyli wektor wyznaczający prostą jest prostopadły do obu wektorów rozpinających płaszczyznę, prosta jest do tej płaszczyzny prostopadła. W $A\mathbb{E}^3$ musi więc być punkt, w którym prosta przecina płaszczyznę (w $A\mathbb{E}^n$ o $n \geq 4$ mimo prostopadłości do płaszczyzny prosta nie musiałaby jej przecinać, podobnie jak w $A\mathbb{E}^3$ dwie proste mogą być wzajemnie prostopadłe bez przecinanie się). Współrzędne tego punktu można znaleźć szukając parametrów ξ^1 i ξ^2 takich, by odpowiadający im punkt płaszczyzny

$$x = \xi^1 + 2\xi^2\,, \qquad y = \xi^2 + 1\,, \qquad z = -\xi^1 - 2\xi^2 + 2\,,$$

spełniał równania definiujące prostą:

$$\xi^1 + 2\xi^2 - (-\xi^1 - 2\xi^2 + 2) = 2\,, \qquad \xi^2 + 1 = 2\,.$$

Stąd $\xi^2 = 1$ i $\xi^1 = 0$. Współrzędnymi punktu przecięcia są więc $(2, 2, 0)$.

Zadanie We1

Znaleźć kąt $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ pomiędzy wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jeśli wiadomo, że wektor $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ jest prostopadły (w sensie zadanego iloczynu skalarnego) do wektora $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, a wektor $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ do wektora $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Rozwiązanie: Korzystając z definicji prostopadłości wektorów w sensie zadanego iloczynu skalarnego $(\cdot|\cdot)$, który tu i dalej będziemy zapisywać, tak jak w fizyce, tj. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \equiv (\mathbf{v}|\mathbf{w})$, oraz z biliniowości (i symetryczności) tegoż iloczynu, możemy napisać

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{a} + 3\mathbf{b})\cdot(7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 7\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - 15\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} + 16\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\,, \\ 0 &= (\mathbf{a} - 4\mathbf{b})\cdot(7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 7\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 8\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 30\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\,. \end{aligned}$$

Stąd ($\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^2$, etc.)

$$\begin{aligned} \frac{7}{16}\,\mathbf{a}^2 - \frac{15}{16}\,\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0\,, \\ \frac{7}{30}\,\mathbf{a}^2 + \frac{8}{30}\,\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0\,. \end{aligned}$$

Dodając te równości do siebie stronami, dowiadujemy się, iż po prostu $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$. Wykorzystując to w drugim z tych równań znajdujemy, że

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\,,$$

czyli

$$\cos\gamma(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}\,\sqrt{\mathbf{b}^2}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}^2} = \frac{1}{2}\,,$$

tj. $\gamma(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\pi}{3}$ lub $\frac{5\pi}{3}$.

Zadanie We2
Posługując się wektorami (a nie metodami wywodzącymi się z matematyki starożytnych Greków) pokazać, że trzy wysokości każdego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Rozwiązanie: Niech wierzchołkami trójkąta będą punkty A, B i C, a punkt O niech będzie punktem przecięcia się wysokości tego trójkąta spuszczonych z jego wierzchołków A i C. Wektor łączący np. punkt A z B będziemy tu oznaczać $\mathbf{AB}$ (przy czym oczywiście $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$) etc.

Ponieważ wysokość spuszczona z wierzchołka B jest (to ją właśnie definiuje!) prostopadła do boku AC, czyli do wektora $\mathbf{AC}$, wystarczy pokazać, że wektor ten jest prostopadły do wektora $\mathbf{OB}$. To zaś jest proste: piszemy oczywiste (zrobić rysunek!) równości

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \mathbf{AO} + \mathbf{OB}\,,\\ \mathbf{BC} &= \mathbf{BO} + \mathbf{OC}\,,\end{aligned}$$

i obliczamy iloczyny skalarne obu ich stron odpowiednio w wektorem $\mathbf{CO}$ (który jest prostopadły do $\mathbf{AB}$ na mocy definicji wysokości spuszczonej z wierzchołka C) i wektorem $\mathbf{AO}$ (który jest prostopadły do $\mathbf{BC}$ na mocy definicji wysokości spuszczonej z wierzchołka A). Mamy więc dwie równości

$$\begin{aligned}(\mathbf{AO})\cdot(\mathbf{CO}) + (\mathbf{OB})\cdot(\mathbf{CO}) &= 0\,,\\ (\mathbf{BO})\cdot(\mathbf{AO}) + (\mathbf{OC})\cdot(\mathbf{AO}) &= 0\,,\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}(\mathbf{AO})\cdot(\mathbf{CO}) &= (\mathbf{BO})\cdot(\mathbf{CO})\,,\\ (\mathbf{BO})\cdot(\mathbf{AO}) &= (\mathbf{CO})\cdot(\mathbf{AO})\,.\end{aligned}$$

Stąd $(\mathbf{BO})\cdot(\mathbf{CO}) = (\mathbf{BO})\cdot(\mathbf{AO})$, tj.

$$(\mathbf{BO})\cdot[\mathbf{AO} - \mathbf{CO}] \equiv (\mathbf{BO})\cdot[\mathbf{AO} + \mathbf{OC}] \equiv (\mathbf{BO})\cdot(\mathbf{AC}) = 0\,.$$

To kończy sprawę.

Zadanie We3
Pokazać, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym
Rozwiązanie: Romb jest to równoległobok rozpięty na dwóch wektorach $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ o równych długościach: $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$. Niech wierzchołkami rombu (obiegamy go po obwodzie) będą punkty A, B, C i D. $\mathbf{a} = \mathbf{AD}$, $\mathbf{b} = \mathbf{AB}$ w notacji z poprzedniego Zadania. Oczywiście wektory $\mathbf{AC}$ i $\mathbf{DB}$ będące przekątnymi rombu są dane przez

$$\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\,,$$
$$\mathbf{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}\,.$$

Zatem

$$(\mathbf{AC})\cdot(\mathbf{DB}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0\,.$$

Koniec dowodu.

Przypomnienie
Polem równoległoboku rozpinanego w przestrzeni[81] $A\mathbb{E}^n$ przez dwa wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jest nieujemna liczba

$$\mathrm{Area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathrm{Vol}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\,|\sin\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})|\,,$$

gdzie $\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ jest kątem pomiędzy wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Wzór ten można zapisać przez iloczyny skalarne

$$\mathrm{Area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sqrt{1 - \cos^2\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\,\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}\,.$$

Skorzystaliśmy tu z definicji $\cos\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})/\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$. Zatem

$$\mathrm{Area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathrm{Vol}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \end{pmatrix}} = \sqrt{\det(g_{ij})}\,.$$

$g \equiv \det(g_{ij})$ jest tu wyznacznikiem macierzy g_{ij} (macierz ta jest też znana jako macierz Grama) tzw. tensora metrycznego indukowanego na płaszczyźnie rozpinanej przez wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ przez iloczyn skalarny w $A\mathbb{E}^n$. Słuszny jest też ogólniejszy wzór[82]

$$\mathrm{Vol}_d(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d) = \sqrt{\det(g_{ij})}\,,$$

[81] Wszystko, co tu będzie o polach powierzchni i objętościach dotyczy również tworów rozpiętych na wektorach dowolnej przestrzeni wektorowej z zadanym iloczynem skalarnym. Oczywiście w przypadku np. przestrzeni wektorowej wielomianów pole powierzchni i objętość będą pojęciami dość abstrakcyjnymi...

[82] Wzór ten ma swój odpowiednik w geometrii różniczkowej. Jeśli w przestrzeni $A\mathbb{E}^n$ (naprawdę, przestrzeń afiniczna nie jest konieczna, ale, żeby nie komplikować...), której bazą (tj. bazą odpowiedniej p. wektorowej) są ortonormalne wektory $\mathbf{e}_i$ jest zanurzona d-wymiarowa *rozmaitość* M (to jest takie coś, co można jakoś matematycznie "obmacać"; M od ang. *manifold*, albo niem. *Manifaltigkeit*, albo *mnogoobrazije* po ros.) zadana (przynajmniej lokalnie) wzorami

$$x^1 = x^1(\xi^1, \ldots, \xi^d)\,,$$

w którym

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \,,$$

na objętość d-wymiarowego równoległościanu zbudowanego w n-wymiarowej przestrzeni $A\mathbb{E}^n$ z d wektorów $\mathbf{a}_1$, …, $\mathbf{a}_d$.

Przykład
Obliczymy objętość równoległościanu zbudowanego na trzech wektorach z $V\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Łatwo znaleźć macierz iloczynów skalarnych

$$g = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik (po skosach): $\det(g) = 160 - 16 - 4 \cdot 36 = 0$. Odpowiedź wydaje się sensowna, jeśli się zorientować, że $3\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_3$ - trzeci wektor jest liniowo zależny od dwu pierwszych, więc ten równoległościan jest zupełnie "płaski".

Powstaje tu natychmiast pytanie, jak zdefiniowana w ten sposób objętość równoległościanu zbudowanego na n wektorach $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ma się do objętości tego samego tworu

---

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^n = x^n(\xi^1, \ldots, \xi^d)\,,$$

gdzie ξ^1, …, ξ^d są rzeczywistymi parametrami (zmieniającymi się w jakimś zakresie), to w każdym punkcie p owej rozmaitości jest przyczepiona do niej wektorowa *przestrzeń styczna* T_pM, której naturalną bazę stanowią (stowarzyszone z układem współrzędnych ξ^i) wektory

$$\mathbf{i}_a = \mathbf{e}_i \,\frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \equiv \mathbf{e}_1 \,\frac{\partial x^1}{\partial \xi^a} + \ldots + \mathbf{e}_n \,\frac{\partial x^n}{\partial \xi^a}\,.$$

Wzór

$$d^d\mathrm{Vol}_d = d^d\xi \,\sqrt{g}\,,$$

w którym $g \equiv \det(g_{ab}) \equiv \det(\mathbf{i}_a \cdot \mathbf{i}_b)$ daje wtedy objętość infinitezymalnego kawałka tej rozmaitości mającego kszałt równoległościanu zbudowanego z d wektorów $\mathbf{i}_1 d\xi^1$, …, $\mathbf{i}_d d\xi^d$ wychodzących z punktu p. Całka z $d^d\xi\,\sqrt{g}$ po całej rozmaitości (lub jej kawałku) daje jej d-wymiarową objętość (jej kawałka). W przypadku d-płaszczyzny (która jest najprostszym rodzajem rozmaitości) rozpiętej w $A\mathbb{E}^n$ przez d wektorów $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \ldots, d$ i przechodzącej przez punkt p współrzędnymi są po prostu parametry ξ^i w definiującym ją wzorze $p(\xi^1, \ldots, \xi^d) = p + \mathbf{a}_i\xi^i$. Objętość obliczana w tekście odpowiada wtedy scałkowaniu $d^d\xi\,\sqrt{g}$ po "kostce" $0 < \xi^i < 1$, co daje właśnie objętość równoległościanu zbudowanego z wektorów $\mathbf{a}_1$, … $\mathbf{a}_d$.

zdefiniowanej w sposób “topologiczny”, przez wyróżnienie jednej całkowicie antysymetrycznej formy n-liniowej? Odpowiedź jest taka, że objętość tu zdefiniowana jest wartością bezwzględną objętości “topologicznej”, jeśli używany tu iloczyn skalarny ma macierz $S_{ij} = \delta_{ij}$ w bazie $\mathbf{f}_i$ dualnej do bazy, w której forma objętości “topologicznej” ma postać $\mathrm{Vol}_{(n)} = \hat{\mathbf{f}}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{f}}^n$. Rzeczywiście: jeśli wektory rozpinające równoległościan napisać w bazie $\mathbf{f}_i$, to (zobacz Zadanie pod definicją objętości topologicznej)

$$\mathrm{Vol}_{(n)}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det \begin{pmatrix} v^1_{(f)1} & v^1_{(f)2} & \cdots & v^1_{(f)n} \\ v^2_{(f)1} & v^2_{(f)2} & \cdots & v^2_{(f)n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v^n_{(f)1} & v^n_{(f)2} & \cdots & v^n_{(f)n} \end{pmatrix} \equiv \det \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \ldots & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \end{pmatrix}.$$

Z drugiej strony, skoro w tej bazie $\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_l = v^i_{(f)k} v^i_{(f)l}$, to macierz tensora metrycznego g_{ij} można napisać jako iloczyn dwu macierzy:

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{v}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{v}_2 \rightarrow \\ \ldots\ldots\ldots \\ \leftarrow \mathbf{v}_n \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \ldots & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \end{pmatrix}.$$

Zatem $g = J^T \cdot J$. Ponieważ jednak $\det(J^T \cdot J) = (\det J^T)(\det J) = (\det J)^2$, to podane wyżej stwierdzenie jest uzasadnione.

Wyrażenie pod pierwiastkiem we wzorze $\mathrm{Area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$ można także zapisać inaczej:

$$\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \sum_{i<j} (a^i b^j - a^j b^i)^2 .$$

Rzeczywiście: prawa strona po rozpisaniu daje

$$\sum_{i<j} (a^i a^i)(b^j b^j) + \sum_{i<j} (a^j a^j)(b^i b^i) - 2 \sum_{i<j} (a^i b^i)(a^j b^j) .$$

Dwie pierwsze sumy prawie dają

$$\sum_i (a^i a^i) \sum_j (b^j b^j) \equiv (a^1 a^1 + \ldots + a^n a^n)(b^1 b^1 + \ldots + b^n b^n) ,$$

brakuje tam tylko wyrazów $\sum_i (a^i a^i)(b^i b^i) = a^1 a^1 b^1 b^1 + \ldots + a^n a^n b^n b^n$. Zatem

$$\sum_{i<j} (a^i b^j - a^j b^i)^2 = \sum_i (a^i a^i) \sum_j (b^j b^j) - \sum_i (a^i a^i)(b^i b^i) - 2 \sum_{i<j} (a^i b^i)(a^j b^j) ,$$

a to już jest to, co trzeba, czyli $\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$. Otrzymujemy więc

$$\mathrm{Area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\sum_{i<j} (a^i b^j - a^j b^i)^2} .$$

Tej ostatniej postaci łatwo w dwóch i trzech wymiarach (tj. w $\mathbb{E}^2$ i $\mathbb{E}^3$) nadać geometryczną interpretację, jeśli wprowadzić *iloczyn wektorowy* (Zadanie niżej).

Zadanie

Znaleźć bilinowe odwzorowanie f określone na $V\mathbb{R}^3 \times V\mathbb{R}^3$ o wartościach w $V\mathbb{R}^3$ mające następujące właściwości: *i)* jeśli wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są liniowo niezależne, to wektor $\mathbf{c} = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ jest prostopadły (w sensie kanonicznego iloczynu skalarnego w $V\mathbb{R}^3$) zarówno do $\mathbf{a}$, jak i do $\mathbf{b}$; *ii)* $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$ (wektory $\mathbf{e}_i$ są tu ortonormalną bazą $V\mathbb{R}^3$). Co daje $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, jeśli $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są liniowo zależne?

Rozwiązanie: Z biliniowości f wynika, że jeśli $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i\, a^i_{(e)}$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_i\, b^i_{(e)}$, to $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\, a^i_{(e)} b^j_{(e)}$, czyli wystarczy zadać f na parach wektorów bazy. Co więcej, wektor $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ można zawsze napisać jako kombinację liniową wektorów bazy $\mathbf{e}_i$:

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{e}_k f^k(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\, a^i_{(e)} b^j_{(e)}\,,$$

więc zadanie całego odwzorowania wymaga podania "tablicy" $3^3 = 27$ liczb $f^k{}_{ij} \equiv f^k(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Wykorzystajmy teraz informację, że $\mathbf{a} \cdot f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ i $\mathbf{b} \cdot f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Skoro $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, warunki te dają równości:[83]

$$a^k f^k{}_{ij}\, a^i b^j = b^k f^k{}_{ij}\, a^i b^j = 0\,.$$

Ponieważ mają zachodzić one: pierwsze dla dowolnego wektora $\mathbf{a}$ (byle liniowo niezależnego od ustalonego, ale też dowolnego, $\mathbf{b}$), czyli dla niemal dowolnych trójek liczb (a^1, a^2, a^3), a drugie dla (niemal) dowolnych trójek liczb (b^1, b^2, b^3), to jest mniej więcej jasne[84] (to "mniej więcej" to jest różnica między matematyką matematyczną, a matematyką fizyczną...), że $f^k{}_{ij} = -f^i{}_{kj}$ oraz $f^k{}_{ij} = -f^j{}_{ik}$. Z tego można jednak wysnuć wniosek, że także $f^k{}_{ij} = -f^k{}_{ji}$:

$$f^k{}_{ij} = -f^i{}_{kj} = f^j{}_{ki} = -f^k{}_{ji}\,.$$

Symbol $f^k{}_{ij}$ jest więc całkowicie antysymetryczny względem transpozycji dowolnej pary wskaźników. Samo odwzorowanie jest zatem także antysymetryczne: $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -f(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Wynika stąd natychmiast odpowiedź na pytanie, co $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ daje, gdy $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są liniowo zależne: oczywiście zero, tj. wektor zerowy $\mathbf{0}$.

Wystarczy teraz skorzystać z drugiej informacji o odwzorowaniu f, czyli z tego, że $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$, by ustalić, że $f^3{}_{12} = 1$, a zatem, że

$$f^k{}_{ij} \equiv \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{gdy } ijk = 123,\ 312,\ 231 \text{ (parzyste permutacje)} \\ -1 & \text{gdy } ijk = 132,\ 321,\ 213 \text{ (nieparzyste permutacje)} \\ \ \ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}\,.$$

[83] Pominiemy już ten dopisek $_{(e)}$ na składowych wektorów - powoli wyrastamy już z przedszkola...

[84] No, jeśli ktoś nie widzi, to proszę: Oznaczmy na chwilę $f^i_{jk} b^k \equiv c_{ij}$. Jeśli $c_{ij} a^i a^j = 0$ dla dowolnych (a^1, a^2, a^3), to biorąc $a^1 = 1$, $a^2 = a^3 = 0$ widzimy, ze $c_{11} = 0$; potem bierzemy $a^2 = 1$, $a^1 = a^3 = 0$ i widzimy, ze $c_{22} = 0$ i podobnie $c_{33} = 0$; potem $a^1 = a^2 = 1$, $a^3 = 0$ da $c_{12} + c_{21} = 0$ itd. Czyli $c_{ij} = -c_{ji}$, co oznacza, że $f^i{}_{jk} b^k = -f^j{}_{ik} b^k$. Ale (b^1, b^2, b^3) też są dowolne, więc musi po prostu być $f^i{}_{jk} = -f^j{}_{ik}$.

Wprowadziliśmy tu tradycyjny symbol ϵ_{ijk} zwany tensorem Levi-Civity. Wprowadźmy także drugie tradycyjne oznaczenie $f(\mathbf{a},\mathbf{b}) \equiv \mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Znalezione odwzorowanie $f(\mathbf{a},\mathbf{b})$ jest bowiem znanym ze szkoły[85] iloczynem wektorowym dwu wektorów. Definiującą go (wraz z warunkiem biliniowości) wartość na wektorach bazy ortonormalnej można wtedy, korzystając z tensora Levi-Civity, zapisać w postaci

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_k\,.$$

Zadanko
Obliczyć $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, jeśli: a) $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, oraz b) $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w} = -2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.
Rozwiązanie: Można skorzystać z biliniowości, by napisać

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = (\mathbf{e}_i\,v^i)\times(\mathbf{e}_j\,w^j) = \mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j\,v^iw^j = \epsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_k\,v^iw^j = \mathbf{e}_k\,\epsilon_{kij}\,v^iw^j\,.$$

Skorzystaliśmy ponadto z tego, że $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$. Stąd jawnie

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \mathbf{e}_1(v^2w^3 - v^3w^2) + \mathbf{e}_2(v^3w^1 - v^1w^3) + \mathbf{e}_3(v^1w^2 - v^2w^1) = 3\,\mathbf{e}_1 - 5\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,.$$

Można też posłużyć się znanym "patentem":

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\,\mathbf{e}_1 - 5\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,.$$

Sprawdzamy wynik obliczając iloczyny skalarne:

$$\begin{aligned} (3\,\mathbf{e}_1 - 5\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{v} &= 3\cdot 2 - 5\cdot 2 + 1\cdot(-1) = 0\,,\\ (3\,\mathbf{e}_1 - 5\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{w} &= 3\cdot 1 - 5\cdot 1 + 1\cdot 2 = 0\,. \end{aligned}$$

W przypadku b) $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = 8\,\mathbf{e}_1 + 8\,\mathbf{e}_3$.

Uwaga: Patrząc na wzór na składowe wektora $\mathbf{c}$ będącego iloczynem wektorowym $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ widzimy, że w przestrzeni $V\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Area}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sqrt{(a^1b^2 - a^2b^1)^2 + (a^1b^3 - a^3b^1)^2 + (a^2b^3 - a^3b^2)^2} = \|\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,\|\,.$$

W $V\mathbb{R}^2$ oczywiście to nie działa, ale można sobie w myślach powiększyć $V\mathbb{R}^2$ do $V\mathbb{R}^3$, czyli wziąć iloczyn kartezjański $V\mathbb{R}^2\times V\mathbb{R}^1$, w którym wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ leżą w tej pierwszej podprzestrzeni (czyli mają zerowe składowe a^3 i b^3), i wtedy wzór

$$\mathrm{Area}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sqrt{(a^1b^2 - a^2b^1)^2} = |a^1b^2 - a^2b^1| = \|\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,\|\,,$$

[85] A może w szkolnym programie już iloczynu wektorowego niema? W końcu to chyba za trudne dla ministrów...

pozostaje słuszny, bo wtedy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ można zdefiniować.

W przypadku pola powierzchni rozpinanej przez wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ w $V\mathbb{R}^n$ o $n > 3$ z kanonicznym iloczynem skalarnym, można zawsze wybrać bazę $V\mathbb{R}^n$ tak, by wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (jeśli nie są do siebie proporcjonalne, ale jeśli są, to $\mathrm{Area}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ i jest to przypadek nieciekawy) były jej pierwszymi dwoma wektorami. Po zastosowaniu do takiej bazy uporządkowanej ortonormalizacji Grama-Schmidta dostajemy bazę ortonormalną $\mathbf{e}_i$, w której $\mathbf{e}_1 \propto \mathbf{a}$, a $\mathbf{e}_2$ jest kombinacją liniową $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, czyli $\mathbf{b}$ jest kombinacją liniową tylko $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$. Można wtedy zdefiniować wektor[86] "$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$"$= \mathbf{e}_3\, a^1 b_2$ i formalnie utrzymać powyższy wzór.

W $V\mathbb{R}^3$ można też zdefiniować objętość $\mathrm{Vol}_3(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ równoległościanu rozpiętego na trzech wektorach $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_3(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \mathrm{Area}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \cdot h = \|\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,\| \cdot \left|\mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\|\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,\|}\right| &= |\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})| \\ &= \left|c^1(a^2b^3 - a^3b^2) + c^2(a^3b^1 - a^1b^3) + c^3(a^1b^2 - a^2b^1)\right| .\end{aligned}$$

Ponieważ $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \epsilon_{ijk}a^i b^j c^k$, wzór ten jest w istocie symetryczny względem wszystkich permutacji wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$, tzn. $\mathrm{Vol}_3(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ $=\mathrm{Vol}_3(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b})$, etc. Można bezpośrednim rachunkiem pokazać, że jest to to samo, co

$$\mathrm{Vol}_3(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \sqrt{\det(g)} = \sqrt{\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\end{pmatrix}}.$$

---

[86] Jest to oczywiście konstrukcja sztuczna, bo do każdej pary wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ trzeba dobierać w opisany sposób odpowiednią bazę; w ustalonej jednej bazie przestrzeni $V\mathbb{R}^n$ nie można podać wzoru sensownie definiującego coś takiego, jak wektor "$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$". Z powierzchnią rozpiętą w $V\mathbb{R}^n$ na wektorach $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ można stowarzyszyć tylko tensor $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ należący do $V\mathbb{R}^n \otimes V\mathbb{R}^n$. W $V\mathbb{R}^3$ jednak każdemu takiemu tensorowi odpowiada jednoznacznie wektor, który właśnie nazywa się iloczynem wektorowym. Odpowiedniość ta jest przykładem ogólniejszej *dualności* tensorów kontrawariantnych rzędu p ($p \le n$) i tensorów kowariantnych rzędu $n-p$. (Wektor jest tensorem kontrawariantnym rzędu 1, a kowektor tensorem kowariantnym rzędu 1). Tensorowi $T^{(p)} = \mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_p}\, t^{i_1\ldots i_p}$ przyporządkowany jest jednoznacznie kowariantny tensor dualny

$$T^{(n-p)} = \hat{\mathbf{e}}^{j_1}\otimes\ldots\otimes\hat{\mathbf{e}}^{j_{n-p}}\epsilon_{j_1\ldots j_{n-p}i_1\ldots i_p}\, t^{i_1\ldots i_p} .$$

Symbol $\epsilon_{i_1\ldots i_n}$ jest uogólnieniem symbolu (tensora) Levi-Civity: $\epsilon_{12,\ldots n} = 1$ (albo -1, zależnie od gustu, byle się na coś zdecydować) i dalej przez permutacje parzyste i nieparzyste; jeśli dwa indeksy mają tę samą wartość, to symbol znika. (Można to jeszcze bardzieje abstrakcyjnie i bardziej ogólnie podefiniować, ale już na tym poprzestaniemy).

Zatem w $V\mathbb{R}^3$ tensorowi drugiego rzędu $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\, a^j b^j$ odpowiada jedno-forma, czyli kowektor $\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{e}}^k\,\epsilon_{kij}\, a^i b^j$, ale przez izomorfizm Frecheta-Riesza można go utożsamić z wektorem $\mathbf{e}_k\,\epsilon_{kij}\, a^i b^j = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Ogólnie, pod szumną nazwą "izomorfizm Frecheta-Riesza" kryje się utożsamienie kowektora $\hat{\mathbf{w}}$ z przestrzeni dualnej V^* z takim wektorem $\mathbf{w}$ z V, że przy dowolnym wektorze $\mathbf{v}$ z V zachodzi równość

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{w}|\mathbf{v})_S .$$

Jak stąd widać, izomorfizm ten jest zadany przez jakiś wyróżniony iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_S$ w przestrzeni V.

Najprościej jest w tym celu przyjąć bazę (związaną z wyjściową kanoniczną zero-jedynkową bazą $V\mathbb{R}^3$ macierzą ortogonalną, nie zmieniającą macierzy iloczynu skalarnego), w której $\mathbf{c}$ ma tylko pierwszą składową niezerową, $\mathbf{a}$ ma tylko dwie pierwsze składowe niezerowe, a $\mathbf{b}$ wszystkie. W takiej bazie $|\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|^2 = (c^1 a^2 b^3)^2$, a obliczenie $\det(g)$ też się trochę upraszcza (choć jest dalej nieco żmudne). Tak więc ta szkolna definicja objętości pokrywa się z tą opartą na wyznaczniku tensora metrycznego (macierzy Grama), a ta z kolei (z dokładnością do znaku) z definicją opartą na trój-formie objętości $\hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \hat{\mathbf{e}}^2 \wedge \hat{\mathbf{e}}^3$. Definicja oparta na wyznaczniku tensora metrycznego stosuje się jednak w dowolnej liczbie wymiarów.

Zadanie
Obliczyć objętość równoległoboku rozpiętego w $V\mathbb{R}^3$ na wektorach

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3\,,\\
\mathbf{b} &= 2\,\mathbf{e}_1 - 3\,\mathbf{e}_2 + 4\,\mathbf{e}_3\,,\\
\mathbf{c} &= 3\,\mathbf{e}_1 - 4\,\mathbf{e}_2 - 5\,\mathbf{e}_3\,,
\end{aligned}$$

jeśli trzy wektory $\mathbf{e}_i$ tworzą bazę ortonormalną.
Rozwiązanie: Najprościej skorzystać ze wzoru $\mathrm{Vol}_3(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = |\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|$. Ponieważ iloczyn wektorowy $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jest dany sztuczką z wyznacznikiem

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix},$$

a iloczyn skalarny jest kanoniczny, nietrudno zobaczyć, że

$$\mathrm{Vol}_3(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 78.$$

Sprawdźmy to metodą macierzy Grama (macierzy tensora metrycznego). Ma ona postać

$$\begin{pmatrix} 14 & 8 & -20 \\ 8 & 29 & -2 \\ -20 & -2 & 50 \end{pmatrix},$$

a jej wyznacznik jest równy $6084 = (78)^2$, tak jak być powinno.

Zadanie 80
Znaleźć odległość w $A\mathbb{E}^4$ punktu $A = (5,6,7,8)$ od hiperpowierzchni H (3-płaszczyzny) zdefiniowanej następująco

$$H = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{E}_4 : \;\; 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 30\}\,.$$

Rozwiązanie: Odległość punktu A od hiperpowierzchni H jest to najmniejsza odległość pomiędzy A i punktami $P_H \in H$ (minimalizujemy odległość ze względu na punkty P_H). Jest ona tym samym co odległość od A punktu przecięcia z H prostej l przechodzącej przez A i prostopadłej do H (tj. prostopadłej w sensie kanonicznego iloczynu skalarnego w $\mathbb{E}_4$ do wszystkich wektorów stycznych do H w punkcie przecięcia). Do rozwiązania problemu wystarczy zatem znaleźć wektor prostopadły do H oraz prostą przechodzącą przez A i mającą kierunek tego wektora.

Tu wygodnie jest zapomnieć o (nieistniejącym w rzeczywistości) podziale na analizę i algebrę (to, co istnieje rzeczywiście, to konkretny problem do rozwiązania) i skorzystać z tego, że gdy hiperpowierzchnia zadana jest ogólnym warunkiem

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\,,$$

(tu $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 30$), to wektor prostopadły do niej (w punkcie o współrzędnych (x_1, x_2, x_3, x_4)) jest gradientem f, tj. ma składowe

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4}\right).$$

W rozpatrywanym przypadku wektor prostopadły do H ma zatem postać[87]

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez A i mającej kierunek tego wektora możemy napisać "od ręki" ($t \in (-\infty, +\infty)$ jest tu parametrem)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Punkt jej przecięcia z hiperpowierzchnią H wyznacza równanie (tj. wyznacza wartość parametru t)

$$4(5 + 4t) + 3(6 + 3t) + 2(7 + 2t) + (8 + t) = 30\,,$$

[87] Można też ten wektor znaleźć czysto algebraicznie przechodząc najpierw do parametrycznego opisu hiperpowierzchni H:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \xi^1 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(Najpierw wybrane zostało jedno szczególne rozwiązanie ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 3$) równania $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 30$, a następnie wybrane trzy liniowo niezależne wektory, na których zeruje się macierz 1×4 $A = (4, 3, 2, 1)$ problemu). Szukany wektor musi być prostopadły do tych trzech wektorów rozpinających hiperpłaszczyznę H i ponieważ mają one po dwa pięterka zerowe każdy, łatwo go znaleźć.

tj. $60 + 30t = 30$. Punkt przecięcia l z H charakteryzuje się zatem parametrem $t = -1$. Tak więc prosta l dla $t = 0$ przechodzi przez punkt A, dla $t = -1$ zaś przebija hiperpowierzchnię H. Odległość d tych dwu punktów dana jest zatem przez

$$\begin{aligned} d^2 &= [x_1(0) - x_1(-1)]^2 + [x_2(0) - x_2(-1)]^2 + [x_3(0) - x_3(-1)]^2 + [x_4(0) - x_4(-1)]^2 \\ &= 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30\,. \end{aligned}$$

Odległość A od H wynosi zatem $\sqrt{30}$.

Zadanie 81
Znaleźć odległość w $\mathbb{E}_3$ między prostymi l_1 i l_2 zadanymi następująco:

$$l_1 : \qquad \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}_3 : \;\; x_1 + x_2 = 1, \;\; x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\}\,.$$

$$l_2 : \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Odległość dwu prostych jest to długość łączącego je odcinka skonstruowanego tak, że jest on prostopadły i do jednej i do drugiej prostej. Zapiszmy najpierw prostą l_1 w postaci patrametrycznej (co pozwoli nam zidentyfikować wektor do niej styczny). W tym celu wystarczy znaleźć jakiś punkt do niej należący. Jest nim np. punkt $(0, 1, 0)$. Prosta l_1 może zatem być zapisana jako

$$l_1 : \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

przy czym stałe α, β i γ należy tak dobrać by spełnione były (dla dowolnej wartości parametru $\tilde{t}$) równości definiujące l_1:

$$\begin{aligned} \tilde{t}\alpha + (1 + \tilde{t}\beta) &= 1\,, \\ \tilde{t}\alpha + 2(1 + \tilde{t}\beta) + \tilde{t}\gamma &= 2\,. \end{aligned}$$

Musi wiec być $\alpha + \beta = 0$ i $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$. Oczywiście wektor styczny do prostej l_1 może być dowolnej długości, więc możemy sobie wziąć jako rozwiązanie $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$. Zatem w postaci parametrycznej

$$l_1 : \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz znaleźć wektor prostopadły zarówno do l_1 jak i do l_2. W $\mathbb{E}_3$ jest tylko jeden taki wektor (z dokładnością do wyboru jego długości i zwrotu). Aby go znaleźć najwygodniej skorzystać z iloczynu wektorowego wektorów stycznych do l_1 i l_2: iloczyn taki daje bowiem zawsze wektor prostopadły do każdego z przemnożonych przez siebie[88] wektorowo wektorów.[89] Wykorzystujemy tu znaną sztuczkę z wyznacznikiem: wektor $\mathbf{v} = (\mathbf{e}_i w^i_{(e)}) \times (\mathbf{e}_j u^j_{(e)})$ jest dany przez

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ w^1_{(e)} & w^2_{(e)} & w^3_{(e)} \\ u^1_{(e)} & u^2_{(e)} & u^3_{(e)} \end{vmatrix} .$$

Tu mamy

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 \,.$$

Zatem wektor o składowych

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

jest prostopadły do prostych l_1 i l_2.

Możemy teraz przedstawić prostą l_3 prostopadłą do l_1 i l_2 w ogólnej postaci

$$l_3 : \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

z parametrem $\tau \in \mathbb{R}$. Trzeba następnie dobrać a, b i c tak, by prosta l_3 dla pewnej wartości parametru τ, np. dla $\tau = 0$, przecinała prostą l_2 w jakimś punkcie $A_2 \in l_2$ scharakteryzowanym wartością t_2 parametru t, a dla jakiejś innej wartości τ przecinała prostą l_1 w punkcie $A_1 \in l_1$ scharakteryzowanym przez $\tilde{t} = t_1$. Daje to układ sześciu równań na sześć niewiadomych (a, b, c, τ, t_1, t_2):

$$\begin{aligned} a &= t_2 \,, \\ b &= 2 + t_2 \,, \\ c &= 2t_2 \,, \\ a - 3\tau &= t_1 \,, \\ b - \tau &= 1 - t_1 \,, \\ c + 2\tau &= t_1 \,. \end{aligned}$$

[88] Tj. przemnożonych jeden przez drugi; jak w dowcipie: "Cezar i Pompejusz byli do siebie podobni. Zwłaszcza Cezar."

[89] Trzeba tu zwrócić uwagę, że coś takiego jak iloczyn wektorowy dwu wektorów istnieje tylko w $\mathbb{E}_3$; w $\mathbb{E}_4$ np. dwa wektory wyznaczają płaszczyznę, do której prostopadłe są aż dwa wektory; znany z $\mathbb{E}_3$ iloczyn wektorowy staje się tu tensorem (brr... straszne słowo! - zawsze budzi na widowni szmer popłochu...) antysymetrycznym drugiego rzędu, o czym już było.

Aby je rozwiązać sprawnie a systematycznie, eliminujemy najpierw a, b i c (biorąc je z trzech pierwszych równań):

$$\begin{aligned} t_2 - 3\tau &= t_1\,, \\ 2 + t_2 - \tau &= 1 - t_1\,, \\ 2t_2 + 2\tau &= t_1\,. \end{aligned}$$

Odejmując od ostatniego pierwsze mamy $t_2 = -5\tau$, a drugie i trzecie, po wstawieniu tego do nich sprowadzają się do

$$\begin{aligned} 2 - 6\tau &= 1 - t_1\,, \\ -8\tau &= t_1\,, \end{aligned}$$

i stąd już gładko $\tau = 1/14$, $t_1 = -8/14$, $t_2 = -5/14$. Wracając do równań z a, b i c znajdujemy $a = -5/14$, $b = 23/14$ i $c = -10/14$. Zatem prosta l_3 prostopadła do l_1 i do l_2 ma postać

$$l_3: \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -5 \\ 23 \\ -10 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

i dla $\tau = 0$ przecina l_2, a dla $\tau = 1/14$ przecina l_1. Zatem odległość d prostych l_1 i l_2 od siebie jest dana przez

$$d^2 = [x_1(0) - x_1(1/14)]^2 + [x_2(0) - x_2(1/14)]^2 + [x_3(0) - x_3(-1/14)]^2 = \frac{1}{14}\,,$$

i wynosi $1/\sqrt{14}$.

Zadanie 82

Rozwiązać poprzednie dwa zadania metodami analizy (aby przeciwdziałać powstawaniu w młodych umysłach podziału matematyki na analizę i algebrę...).

Rozwiązanie: Szukania odległości punktu $A = (5, 6, 7, 8) \in \mathbb{E}_4$ od hiperpłaszczyzny H zadanej warunkiem $4x_1+3x_2+2x_3+x_4 = 30$ sprowadza się do problemu zminimalizowania funkcji

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 + (x_3 - 7)^2 + (x_4 - 8)^2\,,$$

dającej kwadrat odległości od punktu A punktu X o współrzędnych (x_1, x_2, x_3, x_4) z warunkiem ubocznym, by punkt X należał do hiperpłaszczyzny H

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 30 = 0\,.$$

Zgodnie z ogólną metodą minimalizujemy więc funkcję

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda\, g(x_1, x_2, x_3, x_4)\,.$$

Przyrównujemy do zera cztery pochodne

$$
\begin{aligned}
F'_{x_1} = 2(x_1 - 5) + 4\lambda &= 0\,,\\
F'_{x_2} = 2(x_2 - 6) + 3\lambda &= 0\,,\\
F'_{x_3} = 2(x_3 - 7) + 2\lambda &= 0\,,\\
F'_{x_4} = 2(x_4 - 8) + \ \lambda &= 0\,,
\end{aligned}
$$

i rozwiązujemy powstałe równania razem z warunkiem $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Po wyznaczeniu x_i z warunków $F'_{x_i} = 0$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5 - 2\lambda\,,\\
x_2 &= 6 - \frac{3}{2}\lambda\,,\\
x_3 &= 7 - \lambda\,,\\
x_4 &= 8 - \frac{1}{2}\lambda\,,
\end{aligned}
$$

i wstawieniu do $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ znajdujemy $60 + 15\lambda = 30$, czyli $\lambda = 2$. Stąd $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ i $x_4 = 7$. Macierz drugich pochodnych funkcji $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$
\begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix},
$$

jest niezależna od punktu, diagonalna i dodatnio określona. W znalezionym punkcie $(1, 3, 5, 7)$, w którym zerują się pierwsze pochodne mamy zatem minimum. Wartość funkcji $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ w tym punkcie wynosi 30, czyli odległość punktu A od hiperpłaszczyzny H jest równa $\sqrt{30}$.

W drugim zadaniu wprowadzamy funkcję

$$
f(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1 - t)^2 + (x_2 - t - 2)^2 + (x_3 - 2t)^2\,,
$$

będącą kwadratem odległości punktu X o współrzędnych (x_1, x_2, x_3) od punktu na prostej l_2 scharakteryzowanego parametrem t. Minimalizujemy zatem funkcję czterech zmiennych. Warunkiem dodatkowym jest to, że punkt X musi leżeć na prostej l_1, co oznacza, że współrzędne (x_1, x_2, x_3) muszą spełniać warunki (uprościliśmy tu drugi z warunków zadających prostą l_2 odejmując odeń pierwszy)

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 + x_2 - 1 = 0\,,\\
g_2(x_1, x_2, x_3, t) = x_2 + x_3 - 1 = 0\,,
\end{aligned}
$$

(chociaż warunki g_1 i g_2 dotyczą tylko współrzędnych punktu X, to mimo to, należy je formalnie traktować jak funkcje wszystkich zmiennych, ze względu na które minimalizujemy funkcję f). Znów tworzymy funkcję pomocniczą zależną od dwu mnożników Lagrange'a λ_1 i λ_2:

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = f(x_1, x_2, x_3, t) + 2\lambda_1 g_1(x_1, x_2, x_3, t) + 2\lambda_2 g_2(x_1, x_2, x_3, t)\,,$$

(żeby się ładniej liczby komponowały przyjęliśmy za mnożniki Lagrange'a $2\lambda_1$ i $2\lambda_2$) i przyrównujemy do zera jej pochodne cząstkowe po x_1, x_2, x_3 i t:

$$\begin{aligned}
F'_{x_1} &= 2(x_1 - t) + 2\lambda_1 = 0\,,\\
F'_{x_2} &= 2(x_2 - t - 2) + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0\,,\\
F'_{x_3} &= 2(x_3 - 2t) + 2\lambda_2 = 0\,,\\
F'_{t} &= -2(x_1 - t) - 2(x_2 - t - 2) - 4(x_3 - 2t) = 0\,.
\end{aligned}$$

W połączeniu z warunkami ubocznymi daje to układ sześciu równań

$$\begin{aligned}
&x_1 - t + \lambda_1 = 0\,,\\
&x_2 - t + \lambda_1 + \lambda_2 = 2\,,\\
&x_3 - 2t + \lambda_2 = 0\,,\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 - 6t + \lambda_2 = 2\,,\\
&x_1 + x_2 = 1\,,\\
&x_2 + x_3 = 1\,.
\end{aligned}$$

Aby je systematycznie rozwiązać wyznaczamy z pierwszych trzech $x_1 = t - \lambda_1$, $x_2 = t - \lambda_1 - \lambda_2 + 2$, $x_3 = 2t - \lambda_2$ i wstawiamy do pozostałych trzech. Pierwsze z nich daje wtedy

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0\,,$$

a pozostałe

$$\begin{aligned}
2t - 2\lambda_1 - \lambda_2 &= -1\,,\\
3t - \lambda_1 - 2\lambda_2 &= -1\,.
\end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu λ_1 otrzymujemy dwa równania

$$\begin{aligned}
2t + 2\lambda_2 &= -1\,,\\
3t - \frac{1}{2}\lambda_2 &= -1\,,
\end{aligned}$$

których rozwiązaniem są $t = -\frac{5}{14}$, $\lambda_2 = -\frac{2}{14}$; dalej już łatwo: $\lambda_1 = \frac{3}{14}$ oraz

$$x_1 = x_3 = -\frac{8}{14}\,, \qquad x_2 = \frac{22}{14}\,.$$

Wartość minimalizowanej funkcji $f(x_1, x_2, x_3, t)$ w tym punkcie wynosi $\frac{1}{14}$ (tak jak nam to wyszło w zadaniu 81). Macierz drugich pochodnych $F(x_1, x_2, x_3, t, \lambda_1, \lambda_2)$ ma postać

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Jest ona dodatnio określona bo największy jej minor jest też dodatni (aby to zobaczyć wystarczy do ostatniego wiersza dodać wszystkie trzy poprzednie wiersze, co da macierz górnotrójkątną o dodatnich wyrazach na diagonali), więc nie trzeba nawet jej badać na wektorach stycznych do powierzchni $g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ i $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. W znalezionym punkcie jest zatem (tak jak należało oczekiwać) minimum.

Zadanie 83

Znaleźć w przestrzeni $\mathbb{E}_4$ (której współrzędne oznaczymy x, y, u i v) odległość pomiędzy prostą ℓ zadaną wzorem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i płaszczyzną Σ wyznaczaną przez równania

$$\begin{aligned} x + y + u + v &= 1\,, \\ x - y + u - v &= 1\,. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Odległość prostej od płaszczyzny jest to najkrótsza odległość pomiędzy dwoma punktami, z których jeden należy do prostej ℓ, a drugi do płaszczyzny Σ. Zauważmy, też że prosta k łącząca te dwa punkty prostej ℓ i płaszczyzny Σ, które realizują minimum odległości, jest prostopadła (w sensie kanonicznego iloczynu skalarnego) zarówno do prostej ℓ jak i do płaszczyzny Σ.

Tak jak i poprzednie, zadanie to można rozwiązać albo geometrycznie albo analitycznie. Aby rozwiązać problem geometrycznie, musimy podać opis płaszczyzny analogiczny do opisu prostej. Ponieważ równania definiujące płaszczyznę Σ są proste, łatwo zobaczyć, że jest ona równoważnie zadana wzorem (ξ i η są rzeczywistymi parametrami)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bez żadnych rachunków można natychmiast podać dwa liniowo niezależne wektory prostopadłe do obu wektorów rozpinających płaszczyznę Σ; są to np.:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Z tych dwóch wektorów robimy teraz kombinację liniową prostopadłą do wektora rozpinającego prostą ℓ. Jest to kombinacja

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Prosta k łącząca prostą ℓ z płaszczyzną Σ, na której leżą najbliżej siebie położone punkty prostej i płaszczyzny musi zatem mieć postać

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Parametr s można wybrać tak, by jego wartość $s = 0$ odpowiadała punktowi należącemu do prostej ℓ. Przy takim wyborze $a = t$, $b = 1 + 2t$, $c = 3t$ i $d = 1 + 4t$ dla jakiegoś t. Warunek, by dla prosta k przecinała płaszczyznę Σ dla jekiegoś s ma wtedy postać

$$\begin{pmatrix} t \\ 1+2t \\ 3t \\ 1+4t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 3s \\ -2s \\ 3s \\ -2s \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\xi \\ \eta \\ \frac{1}{2}-\xi \\ -\eta \end{pmatrix}.$$

Są to cztery równania na cztery niewiadome, t, s, ξ i η. Aby się nie napracować, można zauważyć, że odległość punktu należącego do ℓ od punktu płaszczyzny Σ, o którą chodzi jest po prostu równa długości wektora

$$\begin{bmatrix} 3s \\ -2s \\ 3s \\ -2s \end{bmatrix}.$$

Rozwiązywać układ równań można więc tak, by wyznaczyć tylko s. Łatwo znajdujemy, że $s = 7/26$, a stąd odległość prostej ℓ od płaszczyzny Σ wynosi $7/\sqrt{26}$.

Analityczne rozwiązanie tego zadania polega na napisaniu kwadratu odległości

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2\,,$$

między dwoma punktami przestrzeni $\mathbb{E}_4$. Pierwszy z nich, o współrzędnych (x_1, y_1, u_1, v_1), należy do prostej ℓ, a drugi, o współrzędnych (x_2, y_2, u_2, v_2), należy do płaszczyzny Σ. Wobec tego $x_1 = t$, $y_1 = 1+2t$, $u_1 = 3t$, $v_1 = 1+4t$ (co pozwala sparametryzować zmienną x_1 wszystkie pozostałe współrzędne tego punktu) oraz $x_2+u_2 = 1$, $y_2+v_2 = 0$ (co pozwala użyć x_2 i y_2 jako parametrów zadających położenie tego punktu w przestrzeni). Zatem d^2 staje się funkcją trzech niezależnych i nie ograniczonych żadnymi warunkami zmiennych x_1, x_2 i y_2:

$$d^2 = f(x_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (1 + 2x_2 - y_2)^2 + (3x_1 - 1 + x_2)^2 + (4x_1 + 1 + y_2)^2 \, ,$$

Aby znaleźć minimum tej funkcji przyrównujemy do zera jej pochodne cząstkowe

$$\begin{aligned}
f'_{x_1} &= \ \ 2(x_1 - x_2) + 4(1 + 2x_1 - y_2) + 6(3x_1 - 1 + x_2) + 8(1 + 4x_1 + y_2) = 0 \\
f'_{x_2} &= -2(x_1 - x_2) \qquad\qquad\qquad\quad\ + 2(3x_1 - 1 + x_2) \qquad\qquad\qquad\quad\ = 0 \\
f'_{y_2} &= \qquad\qquad\qquad - 2(1 + 2x_1 - y_2) \qquad\qquad\qquad\quad\ + 2(1 + 4x_1 + y_2) = 0 \, .
\end{aligned}$$

Dodając do pierwszego równania drugie i dwa razy trzecie upraszczamy ten układ równań do

$$\begin{aligned}
72x_1 + 8x_2 + 12y_2 &= -4 \\
2x_1 + 2x_2 \qquad\quad &= \ \ 1 \\
2x_2 \qquad + 2y_2 &= \ \ 0 \, ,
\end{aligned}$$

a stąd już łatwo obliczamy, że

$$x_1 = -\frac{4}{26} \, , \qquad x_2 = \frac{17}{26} \, , \qquad y_2 = \frac{4}{26} \, .$$

Macierz drugich pochodnych w funkcji $f(x_1, x_2, y_2)$ w tym punkcie ma postać

$$\begin{pmatrix} 60 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

i jest dodatnio określona (znów więc nie trzeba już jej badać na wektorach stycznych do powierzchni więzów). Funkcja f ma zatem w tym punkcie minimum. Obliczamy wartość funkcji f w tym punkcie:

$$\begin{aligned}
f(-\frac{4}{26}, \frac{17}{26}, \frac{4}{26}) &= \frac{[(-4 - 17)^2 + (26 - 8 - 14)^2 + (-12 - 26 + 17)^2 + (26 - 16 + 4)^2]}{(26)^2} \\
&= \frac{2}{(26)^2} \left[(21)^2 + (14)^2\right] = \left(\frac{7}{26}\right)^2 \cdot 26 \, .
\end{aligned}$$

Odległość d prostej ℓ od płaszczyzny Σ wynosi zatem $7/\sqrt{26}$, tak jak to poprzednio obliczyliśmy metodą geometryczną.