ZADANIA Z ALGEBRY I PRZYLEGŁOŚCI

Zadanie C.1 Napisać podane liczby zespolone w postaci $x + iy$

$$\begin{array}{ll} a) & (2+i)(-3i+4)+i+7\,, \\ b) & (i+1)^3\,, \\ c) & \dfrac{1+2i}{1-4i}\,, \\ d) & \dfrac{1}{(1-i)^5}\,, \\ e) & \dfrac{(2-i)^2}{(2+i)^3}\,. \end{array}$$

Zadanie C.2 Napisać podane liczby zespolone w postaci trygonometrycznej $r\,e^{i\varphi}$, w której $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

$$\begin{array}{ll} a) & -1-i\,, \\ b) & -3-i\sqrt{3}\,, \\ c) & (1+i)^2\,, \\ d) & \dfrac{1}{(1-i)^2}\,, \\ e) & 1+\cos\alpha+i\sin\alpha\,, \qquad 0 \le \alpha < 2\pi\,, \\ f) & \dfrac{1-it}{1+it}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \end{array}$$

Zadanie C.3 Napisać podane liczby zespolone w postaci $x + iy$

$$\begin{array}{ll} a) & \sqrt{-3+4i}\,, \\ b) & \sqrt{2+2i}\,, \\ c) & \sqrt{21+20i}\,, \\ d) & \sqrt{20+21i}\,, \\ e) & \sqrt{1+2\sqrt{2}\,i}\,. \end{array}$$

Zadanie C.4 Rozwiązać równania (kwadratowe)

$$\begin{array}{ll} a) & z^2-4z+5=0\,, \\ b) & z^2+z+3i-1=0\,, \\ c) & z^2+z-1=0\,, \\ d) & 2z^2+(9-i)z+10=0\,, \\ e) & (1+3i)z^2+6iz+3-i=0\,. \end{array}$$

Zadanie C.5 Korzystając z tego, że

$$e^{i\pi/6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)\,, \qquad e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)\,,$$

(albo innym sposobem) zapisać w postaci $x + iy$ liczby

$$\begin{array}{ll} a) & e^{i\pi/12}\,, \\ b) & e^{i5\pi/12}\,, \\ c) & e^{i\pi/8}\,, \\ d) & e^{i3\pi/8}\,. \end{array}$$

Zadanie C.6 Rozwiązać równania (z^* u mnie to jest to samo, co $\bar{z}$ u innych)

$$\begin{array}{ll} a) & z^2 - 12z^* + 61 = 0\,, \\ b) & z^3 + 2z^* = 0\,, \\ c) & z^3 + 4i|z| = 0\,, \\ d) & z^4 + 2iz^{*2} = 0\,. \end{array}$$

Zadanie C.7 Przedstawić $\cos 4x$ oraz $\sin 4x$ jako sumę wyrazów, w których występują tylko potęgi $\cos x$ i $\sin x$.

Zadanie C.8 Pokazać bezpośrednim rachunkiem, pisząc $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, że

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (\text{tu} \quad z_2 \neq 0),$$
$$\text{oraz} \qquad |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2\,.$$

Zadanie C.9 Wykorzystując trygonometryczną postać liczb zespolonych udowodnić tożsamości

$$\begin{array}{ll} a) & \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\,\sin(\alpha - \beta)\,, \\ b) & \dfrac{\cos 5\varphi}{\cos^5\varphi} = 1 - 10\,\mathrm{tg}^2\varphi + 5\,\mathrm{tg}^4\varphi\,. \end{array}$$

Zadanie C.10 Znaleźć wszystkie liczby z spełniające równości

$$\begin{array}{ll} a) & z^3 = \sqrt{3} - i\,, \\ b) & z^3 = i + \sqrt{3 - 4i}\,, \\ c) & z^3 = 1 + i\sqrt{3 + 4i}\,, \\ d) & z^4 = -7 + 24i \end{array}$$

Zadanie C.11 Naszkicować na płaszczyźnie $\mathbb{C}$ zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki

$$a) \qquad \left|\frac{z-3}{z+i}\right| < 1\,,$$

$$b) \qquad \left|\frac{z+3i}{z-3i}\right| = 2\,,$$

$$c) \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) > 0\,.$$

Zadanie C.12 Znaleźć obraz dolnej półpłaszczyzny liczb zespolonych (bez osi rzeczywistej) przy odwzorowaniu (homografii)

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}\ .$$

Zadanie C.13 Znaleźć *przeciw*obraz względem odwzorowania

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}\ .$$

zbioru będącego (na płaszczyźnie zespolonej) zewnętrzem koła o promieniu 2 i środku w początku układu.

Zadanie C.14 Obliczyć sumę $\varepsilon_0+\varepsilon_1+\ldots\varepsilon_{n-1}$ pierwiastków n-tego stopnia z liczby $z=1$.

Zadanie C.15 Obliczyć sumę

$$C = \cos 8^o + \cos 16^o + \cos 24^o + \ldots + \cos 176^o\,.$$

Zadanie C.16 Obliczyć sumy

$$\textbf{a)} \quad \sum_{n=1}^{N} \cos[(2n-1)x] = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos[(2N-1)x]\,,$$

$$\textbf{a)} \quad \sum_{n=1}^{N} \sin^2(nx) = \sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2(Nx)\,.$$

Zadanie C.17 Znaleźć iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez wielomian $v(x)$

$$a) \quad w(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 2\,, \qquad v(x) = x-1\,,$$

$$b) \quad w(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3\,, \qquad v(x) = x-1\,,$$

$$c) \quad w(x) = 2x^5 + 4x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 2\,, \qquad v(x) = x-2\,,$$

$$d) \quad w(x) = 3x^5 - 6x^4 + 7x^3 - 14x^2 - 2x + 6\,, \qquad v(x) = x-2\,.$$

Zadanie C.18 Znaleźć iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez wielomian $v(x)$

$$\begin{array}{lll} a) & w(x) = 8x^3 - 4x^2 + 8x - 9\,, & v(x) = x^2 - 3\,, \\ b) & w(x) = 4x^4 - 2x^2 + 8x - 1\,, & v(x) = 2x^2 + x - 1\,, \\ c) & w(x) = x^5 + x^2 - x + 1\,, & v(x) = x^3 - x + 1\,. \end{array}$$

Zadanie C.19 Wykazać, że

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left[x^2 - 2x \cos\Big(\frac{\pi}{n} k\Big) + 1 \right].$$

Zadanie C.20 Rozłożyć wielomian $W_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + 1$ na ilocznyny wielomianów stopnia nie wyższego niż drugi. Sprawdzić bezpośrednio wynik kładąc $n = 1$.

Zadanie C.21 Rozwiązać równania trzeciego stopnia

$$\begin{aligned} &z^3 - 3iz - 1 + i = 0\,, \\ &z^3 - 12z - 8\sqrt{3} = 0\,, \\ &z^3 - 3z^2 + 2 + \sqrt{2} = 0\,. \end{aligned}$$

Zadanie C.22 Sprowadzić do prostszej postaci iloczyn

$$(x + y + z)\big(x + \varepsilon\, y + \varepsilon^2 z\big)\big(x + \varepsilon^2 y + \varepsilon\, z\big)\,,$$

gdzie $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}\,)$.

Zadanie 0.1 Stosując eliminatkę Gaussa rozwiązać na rozgrzewkę układzik równań

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 5\,, \\ x & & & + & z & = & 4\,, \\ x & + & y & & & = & 3\,. \end{array}$$

Zadanie 0.2 Znów stosując eliminatkę Gaussa rozwiązać układ równań

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 1\,, \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & 3t & = & 2\,, \\ x & & & - & z & & & = & 1\,, \\ & & y & + & 2z & + & t & = & 0\,. \end{array}$$

Uwaga: rozwiązanie nie musi być jednoznaczne (a czasem może nawet nie istnieć!). Kiedyś całą teorią takich równań zrozumiemy, formułując je jako problemy wektorowe i wtedy będzie oczywiste, kiedy jak jest. Na razie jednak musimy takie równanie sprawnie rozwiązywać, żeby się tymi wektorami bawić. (Jak zwykle więc wyłazi tu problem zjadania własnego ogona, albo pytanie, co jest pierwsze: jajko, czy kura?)

Zadanie 0.3 Stosując eliminatkę Gaussa rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3\,, \\ x + y + 2z &= 4\,, \\ x + y + 3z &= 5\,. \end{aligned}$$

Zadanie 0.4 Stosując eliminatkę Gaussa rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 1\,, \\ x + y + 2z &= -2\,, \\ x - y - 3z &= -9\,. \end{aligned}$$

Zadanie 1.1 Dane są trzy wektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

z przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$. Przyjmijmy na słowo honoru (kto chce, może to sam sprawdzić - bedzie to analogiczne do Zadania 3 z materiałów ćwiczeniowych), że tworzą one układ wektorów liniowo niezależnych. Czy można dokooptować do nich jeszcze jakiś wektor, tak by utworzony układ czterech wektorów był nadal liniowo niezależny?

Zadanie 1.2 Wiadomo (bo ktoś to już ustalił i nic nam do tego, jak), że wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, są liniowo niezależne (nawet nie musimy wiedzieć czym są te wektory ani jak duża jest p.w. do której one należą). Sprawdzić, czy liniowo niezależny układ tworzą wektory $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dane kombinacjami

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3\,, \\ \mathbf{e}_2 &= 4\mathbf{f}_1 + 5\mathbf{f}_2 + 6\mathbf{f}_3\,, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3\,, \end{aligned}$$

a także czy liniowo niezależny układ tworzą wektory $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ dane kombinacjami

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3\,, \\ \mathbf{w}_2 &= 4\mathbf{f}_1 + 5\mathbf{f}_2 + 6\mathbf{f}_3\,, \\ \mathbf{w}_3 &= \mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2 + 5\mathbf{f}_3\,. \end{aligned}$$

Zadanie 1.3 Czy układ czterech wielomianów

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1(x) &= x^3 + 2x^2 + 2x + 6\,,\\
\mathbf{w}_2(x) &= 2x^3 + x^2 + 1\,,\\
\mathbf{w}_3(x) &= 3x^3 - 2x^2 + x\,,\\
\mathbf{w}_4(x) &= 5x^2 + x + 7\,,
\end{aligned}$$

potraktowanych jak wektory z p.w. wielomianów stopnia $r \leq 3$ jest liniowo niezależny? Czy wielomian $\mathbf{u}(x) = 5x^3 + 8x^2 + 2x + 2$ można zapisać jako kombinację liniową tych wielomianów? A wielomian $\mathbf{u}(x) = 15x^3 + 7x + 14$ da się? A jeśli któryś z nich się da, to czy w sposób jednoznaczny?

Zadanie 1.4 Czy wypisane poniżej cztery wielomiany

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1(x) &= x^3 + x^2 + 1\,,\\
\mathbf{w}_2(x) &= x^3 + x + 1\,,\\
\mathbf{w}_3(x) &= x^3 + 1\,,\\
\mathbf{w}_4(x) &= x^3\,,
\end{aligned}$$

potraktowane jak wektory z p.w. wielomianów stopnia $r \leq 3$ tworzą bazę tej przestrzeni?

Zadanie 1.5 Pokazać, że cztery macierze[1]

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

nie tworzą bazy p.w. nad ciałem $\mathbb{R}$ wszystkich macierzy wymiaru 2×2, ale tworzą bazę p.w. takich macierzy nad ciałem $\mathbb{C}$ i tworzą też bazę p.w. nad ciałem $\mathbb{R}$ macierzy hermitowskich[2] (najpierw proszę sprawdzić - to dodatkowy punkt Zadania 2.1 - że macierze hermitowskie tworzą w przestrzeni wektorowej wszystkich macierzy kwadratowych ustalonego wymiaru, tu 2×2, uczciwą popdprzestrzeń) wymiaru 2×2.

Zadanie 1.6 Podać składowe (żywego) wektora

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

należącego do $\mathbb{R}^3$ w bazie tworzonej przez wektory

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

[1] Trzy ostatnie z nich są zwane macierzami sigma Pauliego i pojawią się w mechanice kwantowej nierelatywistycznych cząstek o spinie 1/2 (czasem, w kontekście izospinu - a co to takiego, to proszę się samemu dowiedzieć - oznacza się je τ_i).

[2] Macierz hermitowska to taka, która spełnia warunek $a_{ij} = (a_{ji})^*$.

i w bazie tworzonej przez wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1.7 Podać składowe (traktowanego jak wektor z odpowiedniej p.w. wielomianów) wielomianu $\mathbf{w}(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ w bazie tworzonej przez wielomiany

$$\mathbf{f}_1 = x^4\,, \quad \mathbf{f}_2 = x^3 + x^2 + x + 1\,, \quad \mathbf{f}_3 = x^2 + x + 1\,, \quad \mathbf{f}_4 = x + 1\,, \quad \mathbf{f}_5 = 1\,.$$

Zadanie 1.8 Jaki warunek muszą spełniać rzeczywiste liczby a, b i c, by trzy wektory

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

tworzyły bazę przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ (nad $\mathbb{R}$)?
Wskazówka: Na razie z braku innych narzędzi spróbować wyrazić wektory bazy kanonicznej

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

przez podane wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$.

Zadanie 1.9 Czy zbiór funkcji

$$\mathbf{v}_1 = \mathrm{sh}2x\,, \quad \mathbf{v}_2 = \mathrm{ch}2x\,, \quad \mathbf{v}_3 = \mathrm{sh}^2x\,, \quad \mathbf{v}_4 = \mathrm{ch}^2x\,,$$

potraktowanych jak wektory należące do takiej wieeeelkiej przestrzeni wektorowej wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tworzy układ wektorów liniowo niezależnych?

Zadanie 1.10 Trzy (żywe) wektory przestrzeni $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tworzą jej bazę. Trzy wektory

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix},$$

też tworzą bazę. Wyrażając wektory $\mathbf{u}_i$ przez wektory $\mathbf{f}_i$, znaleźć macierz zmiany bazy (jak będzie ona oznaczona?)

Zadanie 1.11 W pewnej bazie czterowymiarowej przestrzeni wektorowej V wektor $\mathbf{u}$ ma składowe - piszę je "na płask" zamiast "na sztorc" bo zajmuje to mniej miejsca - $(2, 3, 0, -1)$. Jakie są składowe tego wektora w bazie tworzonej przez cztery wektory, które same w tamtej bazie mają składowe: $(3, 2, 1, 0)$, $(2, 1, 1, 2)$, $(1, 3, 2, 4)$ i $(0, 1, 2, 3)$? A może te cztery wektory nie tworzą bazy? Jak to sprawdzić?

Zadanie 1.12 W pewnej bazie trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, mają składowe - znów piszę je "na płask" - $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ i $(1, 0, -1)$, a wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ składowe $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ i $(1, 0, 0)$. Czy oba te zbiory wektorów (każdy z osobna oczywiście) mogą być bazami przestrzeni V ? Jeśli tak, to podać macierze zmiany baz $R_{(f\leftarrow v)}$ i $R_{(v\leftarrow f)}$. Sprawdzić, że otrzymane macierze są wzajemnie odwrotne!

Zadanie 2.1 Które zbiory wektorów wyodrębnione poniżej z pewnych przestrzeni wektorowych tworzą podprzestrzenie wektorowe?

1. Szkolne wektory (takie strzałki) na płaszczyźnie, o początkach w jednym ustalonym punkcie płaszczyzny i końcach leżąych na jednej i tej samej prostej?

2. Wektory jak wyżej tylko o końcach *nie* leżących na jednej wybranej prostej

3. Wielomiany $\mathbf{w}(x)$ (z nieskończenie wymiarowej p.w. wielomianów dowolnego stopnia) spełniające warunek $\mathbf{w}(1) = 1$

4. Wielomiany jak wyżej ale takie, że $\mathbf{w}(0) = 0$

5. Wektory należące do $\mathbb{R}^n$ (z jakimś ustalonym n), w których liczby na pierwszym i ostatnim "pięterku"[3] są takie same? a przeciwne (tzn. a i $-a$)?

6. Wektory jak wyżej, w których suma liczb na wszystkich pięterkach jest równa ustalonej wartości, np. 7 ? A jeśli 0 ?

7. Macierze symetryczne (w przestrzeni wszystkich macierzy wymiaru $n \times n$ z jakimś konkretnym n, o elementach rzeczywistych, albo i nawet zespolonych)? A antysymetryczne? A macierze o śladzie[4] równym zeru?

8. Podzbiór funkcji parzystych, tj. takich, iż $f(-x) = f(x)$, należących do przestrzeni wektorowej $\mathrm{Map}([-1, 1], \mathbb{R})$ (czyli do zbioru funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na domkniętym odcinku $[-1, 1]$)?

[3] Celowo nie piszę "których pierwsza i ostatnia składowa są takie same" - czy coś takiego by miało jakiś sens? (odpowieź warta punkt za aktywność).

[4] Ślad macierzy kwadratowej (nie da się zdefiniować śladu macierzy niekwadratowej - tj. można sobie jakoś arbitralnie, ale nie będzie to do niczego użyteczne: matematyka na tym polega, żeby definiować i badać obiekty, które się do czegoś przydadzą) to jest suma elementów tej macierzy leżących na diagonali - tej biegnącej (tak się przyjęło) z lewego górnego rogu do dolnego prawego.

9. Podzbiór funkcji niemalejących, tj. takich, iż $f(x_2) \geq f(x_1)$, gdy $x_2 > x_1$, należących do $\mathrm{Map}([-1,1],\mathbb{R})$?

10. Podzbiór funkcji takich, iż $f(-1) = f(1) = 0$, gdy $x_2 > x_1$, należących do przestrzeni $\mathrm{Map}([-1,1],\mathbb{R})$? A gdyby ył to zbiór funkcji takich, że $f(-1) = f(1) = 1$?

Zadanie 2.2 Niech w przestrzeni wektorowej $V = \mathbb{R}^4$, do której należące wektory są postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix},$$

podprzestrzeń U będzie zadana warunkami $x + z = 0$ i $y - z = 0$, a podprzestrzeń W warunkami $2x + y + 7z + t = 0$ i $x - y + 3z + t = 0$. Podać najogólniejszą postać wektora należącego do przecięcia $U \cap W$ tych podprzestrzeni.

Zadanie 2.3 Niech w przestrzeni wektorowej wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podprzestrzeń V będzie rozpięta przez wektory-funkcje

$$\mathbf{t}_1 = 1\,, \quad \mathbf{t}_2 = \sin x\,, \quad \mathbf{t}_3 = \cos x\,, \quad \mathbf{t}_4 = \sin 2x\,, \quad \mathbf{t}_5 = \cos 2x\,.$$

Sprawdzić, że do tej podprzestrzeni należą wektory-funkcje

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}_1 = (\sin x + \cos x)^2\,, \quad \mathbf{f}_2 = (\sin x - \cos x)^2\,, \\ &\mathbf{f}_3 = (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)\,, \quad \mathbf{f}_4 = \sin^2 x\,, \quad \mathbf{f}_5 = \cos^2 x\,. \end{aligned}$$

Czy rozpinają one całą podprzestrzeń V? Jeśli nie, podać jakąś bazę podpodprzestrzeni przez nie rozpinanej (tzn. podprzestrzeni podprzestrzeni V).

Zadanie 2.4 Czy cztery (żywe) wektory

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

mogą tworzyć bazę p.w. $\mathbb{R}^4$? a przestrzeni $\mathbb{C}^4$? Jeśli mogą, to podać w tej bazie składowe najogólniejszego wektora z tej p.w.

Zadanie 2.5: W Zadaniu 12 w skrypcie ustaliliśmy, że z dwóch podprzestrzeni V i W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ podprzestrzeń V jest całą przestrzenią $\mathbb{R}^3$, a W ma wymiar 2. Zadać na dwa sposoby[5] podprzestrzeń X dopełniającą W do całej $\mathbb{R}^3$, tj. taką, że $W \oplus X = \mathbb{R}^3$. Przedyskutować, czy rozwiązanie tego problemu jest jednoznaczne.

[5]Przypomnijmy, że ogólnie zadać podprzestrzeń można podając jakiś zbiór wektorów ją rozpinających, a podprzestrzenie $\mathbb{R}^n$, można też zadawać podając układ jednorodnych równań spełnianych przez liczby na "pięterkach" wektorów z zadawanej podprzestrzeni.

Zadanie 2.5′: Zadane są dwie podprzestrzenie U i V przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}, \qquad V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ x - y + z = 0 \right\}.$$

Zadać U równaniem (jednym, a może ich więcej do tego potrzeba?) a V zadać podając jakieś wektory ją rozpinające. Czy $V + U$ jest całą przestrzenią $\mathbb{R}^3$? Scharakteryzować podprzestrzeń $U \cap V$ na dwa sposoby: podając jakąś jej bazę i podając równania (ile?) spełniane przez liczby na pięterkach wektorów do niej należących

Zadanie 2.6: Podprzestrzeń W w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^5$ jest rozpinana przez wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jaki jest wymiar tej podprzestrzeni? Podać jakąś jej bazę.

Zadanie 2.7: Podać jakąś bazę sumy algebraicznej $U+V$ podprzestrzeni U i V przestrzeni wektorowej W_3 wielomianów stopnia $r \leq 3$ zdefiniowanych następująco: do U należą wielomiany postaci $a\mathbf{u}_1(x) + b\mathbf{u}_2(x)$ z dowolnymi rzeczywistymi a i b, gdzie

$$\mathbf{u}_1(x) = x^3 + x^2 + x\,, \qquad \mathbf{u}_2(x) = x^2 + x + 1\,,$$

zaś do V należą wielomiany postaci $c\mathbf{v}_1(x) + d\mathbf{v}_2(x)$ z dowolnymi rzeczywistymi a i b, gdzie

$$\mathbf{v}_1(x) = x^3 - 2x^2 + 1\,, \qquad \mathbf{v}_2(x) = x^3 + x + 1\,.$$

Czy suma $U + V$ jest suma prostą podprzestrzeni?W

Zadanie 2.8 Zadać zdefiniowane niżej podprzestrzenie wektorowe układami jednorodnych równań liniowych.
a) Podprzestrzeń U przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ rozpinaną przez wektor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

b) Podprzestrzeń W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ rozpinaną przez wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.9 a) Podprzestrzeń U przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^4$ jest rozpinana przez wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadać tę samą podprzestrzeń układem równań liniowych spełnianych przez liczby występujące na czterech piętrkach żywego wektora z $\mathbb{R}^4$ należącego do U.
b) To samo co wyżej, tylko w $\mathbb{R}^5$ i podprzestrzeń W rozpinana przez trzy wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.10 W bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ czterowymiarowej przestrzeni wektorowej (nad $\mathbb{R}$) podprzestrzeń V rozpinają wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$, a podprzestrzeń W wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\,, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4\,, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 3\,\mathbf{e}_4\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_4\,, \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 2\,\mathbf{e}_4\,, \\ \mathbf{w}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\,. \end{aligned}$$

Jakie są wymiary tych podprzestrzeni, ich sumy $V+W$ i przecięcia $V \cap W$? Podać jakieś bazy V, W, $V+W$ i $V \cap W$.

Zadanie 2.11 W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^5$ (nad $\mathbb{R}$) podprzestrzeń V rozpinają wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$, a podprzestrzeń W wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Jakie są wymiary tych podprzestrzeni, ich sumy $V+W$ i przecięcia $V \cap W$? Podać jakieś bazy V, W, $V+W$ i $V \cap W$.

Zadanie 3.1 Niech $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ oraz $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ będą dwiema bazami pewnej dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej V. Składowymi wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ należących do V w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ są[6]

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a składowe $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ w bazie $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ mają postać

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jak wyglądają składowe wektora $\mathbf{w}$ w bazie $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$? Podać także macierze zmiany bazy: $R_{(e\leftarrow f)}$ i $R_{(f\leftarrow e)}$.

Zadanie 3.2[7] Wykonać mnożenie macierzy (w podanej kolejności):

$$\begin{array}{ll}
a) & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
b) & \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \\
c) & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
d) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \\
e) & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Wykonać także mnożenie tych macierzy, ale w odwrotnej kolejności (jeśli jest to możliwe).

Zadanie 3.3 Jako że umiemy już wyrażać wektory jednej bazy przez wektory innej bazy w jedną i w drugą stronę oraz zapisywać to macierzowo, to umiemy też odwracać macierze. Zatem: znaleźć macierze odwrotne do podanych niżej wyobrażając sobie, że są one macierzami zmiany jakiejś jednej bazy na inną bazę

$$a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[6] Symbol := jest użyty zamiast =, aby nie utożsamić przypadkiem żywego wektora z jego składowymi w jakiejś bazie.

[7] Dla tych, co mają wątpliwości, czy umieją mnożyć jedną macierz przez drugą macierz.

Zadanie 3.4 Wzory

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 3x_3 \end{bmatrix},$$
$$G\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 + 6 \\ x_2 + 3x_1 - 1 \end{bmatrix},$$

zadają pewne odwzorowania przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ w nią samą: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sprawdzić, czy są one liniowe. Jeśli któreś z nich jest, to podać jego macierz w bazie kanonicznej (zero-jedynkowej) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, oraz w bazie tworzonej przez trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \,, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 \,, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Podać też w przypadku tego odwzorowania, które jest liniowe, składowe w bazie $\mathbf{v}_i$ obrazu wektora $\mathbf{u}$, który w bazie $\mathbf{e}_i$ ma składowe $(1, 2, 3)$.

Zadanie 3.5 Czy liniowe jest odwzorowanie F, które wielomianowi $\mathbf{w}(x)$ stopnia $r \leq 2$ przyporzadkowuje wielomian stopnia $r \leq 3$ według wzoru

$$F(\mathbf{w}(x)) = (2 + x)\,\mathbf{w}(x)\,,$$

? Jeśli jest, to podać macierz odwzorowania F w kanonicznych ($\mathbf{e}_0(x) = 1$, $\mathbf{e}_1(x) = x$, etc.) przestrzeni $W_{(2)}$ i przestrzeni $W_{(3)}$.

Zadanie 3.6: Odwzorowanie liniowe F trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V w nią samą jest w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ reprezentowane macierzą

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podać macierz $F_{(v)(v)}$ tego odwzorowania w bazie

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \ \ \mathbf{e}_1 \,, \\ \mathbf{v}_2 &= \ \ \mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_1 \,, \\ \mathbf{v}_3 &= 2\,\mathbf{e}_1 \ \ + \mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_1 \,. \end{aligned}$$

Zadanie 3.7: Odwzorowanie liniowe F pewnej trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V w inną trójwymiarową przestrzeń W (która może też być i tą samą przestrzenią V -

nie ma to tu znaczenia) jest takie, że

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{e}_1 + \ \ \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) &= 3\,\mathbf{w}_1 + 2\,\mathbf{w}_2 + 2\,\mathbf{w}_3\,,\\
F(\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) &= -\mathbf{w}_1 + \ \ \mathbf{w}_2 + 4\,\mathbf{w}_3\,,\\
F(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) &= -\mathbf{w}_1 + \ \ \mathbf{w}_2 - 3\,\mathbf{w}_3\,.
\end{aligned}$$

Podać macierz $F_{(e)(w)}$ tego odwzorowania w bazach tworzonych przez wektory $\mathbf{e}_i$ (przestrzeni V) i wektory $\mathbf{w}_i$ (przestrzeni W).

Zadanie 3.8: Odwzorowanie liniowe φ wielomianów (rzeczywistych) stopnia nie wyższego niż 1 w wielomiany (rzeczywiste) stopnia nie wyższego niż 2 jest takie, że

$$\begin{aligned}
&\varphi(x+3) = -x^2 + 5x + 4\,,\\
&\varphi(2x+7) = 5x^2 - 3\,.
\end{aligned}$$

Napisać ogólny wzór na $\varphi(a_1x + a_0)$ oraz macierz $\varphi_{(e)(e)}$ w bazie kanonicznej wielomianów $\mathbf{e}_k(x) = x^k$. Podać także wielomiany-wektory rozpinajace imφ oraz zadać taką podprzestrzeń Y w $W_{(2)}$, by im$\varphi \oplus Y = W_{(2)}$. Czy wybór Y jest jednoznaczny?

Zadanie 3.9: Odwzorowanie liniowe F trójwymiarowej przestrzeni wektorowej $W_{(2)}$ wielomianów stopnia nie wyższego niż 2 w nią samą jest w bazie tworzonej przez wielomiany (sprawdzić, że to istotnie jest baza!) $\mathbf{v}_1(x) = x^2 + x + 1$, $\mathbf{v}_2 = x^2 + 2x - 1$ i $\mathbf{v}_3(x) = x + 2$ reprezentowane macierzą

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak wygląda obraz $F(\mathbf{w})$ wielomianu $\mathbf{w}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$?

Zadanie 3.10 Macierz liniowego odwzorowania $A : V \to V$, tj. p.w. V o dim$V = 5$ w nią samą ma w bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots 5$ p. V postać

$$A_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podać kombinacje liniowe wektorów bazy rozpinające jądro ker$A$ i obraz im$A$ tego odwzorowania.
Wskazówka: Spróbować wyrazić przedostatnią kolumnę podanej macierzy przez pozostałe.

Zadanie 3.11 Macierz odwzorowania liniowego $F : V \to W$, gdzie dim$V = 2$, a dim$W = 3$, ma w bazie $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ przestrzeni V i bazie $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ przestrzeni W postać

$$F_{(w)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Podać postać macierzy $F_{(g)(u)}$ tego odwzorowania w bazach $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ przestrzeni V i $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2) = (\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3)$ przestrzeni W. Podać, wyrażając je przez wektory bazy $\mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, 3$ (lub przez wektory bazy $\mathbf{g}_i$, $i = 1, 2, 3$), wektory rozpinające im$F$. Jakie jest jądro odwzorowania F?

Zadanie 3.12 O liniowym odwzorowaniu F trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V, której bazą są jakieś trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$, w trójwymiarową przestrzeń W o bazie $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$ wiadomo, że jego jądro rozpina wektor $\mathbf{j} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, a obraz rozpinają wektory $\mathbf{o}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3$ i $\mathbf{o}_2 = -\mathbf{w}_2 + 3\mathbf{w}_3$. Podać jak może wyglądać macierz $F_{(w)(v)}$ tego odwzorowania w podanych bazach. Czy jest to jedyna możliwa postać? Jeśli nie jedyna możliwa, to spróbować napisać najogólniejszą jej postać.

Zadanie 3.13 Macierz odwzorowania T przestrzeni $W_{(2)}$ wielomianów stopnia nie wyższego niż drugi w nią samą ma w bazie tworzonej przez wielomiany $\mathbf{v}_1(x) = x^2 + x + 1$, $\mathbf{v}_2(x) = x^2 + 2x - 1$, $\mathbf{v}_3(x) = x + 2$ postać

$$T_{(v)(v)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jaką postać mają (żywe) wielomiany należące do jądra odwzorowania T? A jak wyglądają wielomiany należące do im$T$? Czy suma algebraiczna im$T$+ker$T$ jest sumą prostą podprzestrzeni?

Zadanie 3.14 Odwzorowanie liniowe G przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$, jest takie, że na wektorach $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ daje

$$G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć obraz wektora $\mathbf{w}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Czy na podstawie tego, co o odwzorowaniu G wiemy, można wyznaczyć macierz odwzorowania G w jakiejś bazie?

Zadanie 4.1 (autorstwa P. Stachury, ciut przerobione) Macierz odwzorowania liniowego czterowymiarowej przestrzeni wektorowe V w trójwymiarową przestrzeń wektorową W ma w bazie $\mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ przestrzeni V i bazie $\mathbf{w}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ przestrzeni W postać

$$F_{(w)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć takie bazy obu przestrzeni (wyrażając je przez wektory $\mathbf{v}_i$ i wektory $\mathbf{w}_j$), by macierz tego odwzorowania miała w nich postać

$$a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Czy można znaleźć takie bazy, by macierz tego odwzorowania miała w nich postać

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

?

Zadanie 4.2 Odwzorowanie S przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ w nią samą jest takie, że

$$S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad S\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Jak wygląda macierz $S_{(e)(e)}$ tego odwzorowania w bazie kanonicznej (tzn. zerojedynkowej) przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Jakie jest jądro i obraz tego odwzorowania?

Zadanie 4.3 Liniowe odwzorowanie P dwuwymiarowej p.w. V w nią samą jest w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ dane macierzą:

$$P_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Czy jest ono rzutem? Jeśli jest, to na jaką podprzestrzeń i wzdłuż jakiej? (Zdefiniować te podprzestrzenie podając rozpinające je kombinacje wektorów bazy.)

Zadanie 4.4 Zrzutować żywy wektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ na podprzestrzeń zdefiniowaną warunkiem $x+y-z=0$, (x, y i z są liczbami na kolejnych pięterkach żywych wektorów z $\mathbb{R}^3$) wzdłuż podprzestrzeni rozpiętej na wektorze $\mathbf{u}$, jeśli

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podać także macierz tego rzutu w kanonicznej zero-jedynkowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4.5 Znaleźć macierz realizującą rzut wzdłuż podprzestrzeni W na podprzestrzeń V. Podprzestrzenie te są rozpinane przez wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{v}$ o składowych

$$W = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad V = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

Znaleźć rzuty wektorów o składowych

$$\mathbf{u}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4.6 W pewnej trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ podprzestrzeń U jest rozpinana przez dwa wektory mające w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ przestrzeni V postać $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, a podprzestrzeń W tworzą wszystkie wektory, na których zerują się dwa kowektory[8] $\hat{\mathbf{w}}_1$ i $\hat{\mathbf{w}}_2$ mające w bazie (dualnej do bazy $\mathbf{e}_i$) $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ przestrzeni V^* postać $\hat{\mathbf{w}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1 - 2\,\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{w}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_1 - 2\,\hat{\mathbf{e}}_3$. Podać w bazie $\mathbf{e}_i$ macierze rzutów na podprzestrzeń W wzdłuż podprzestrzeni U i na podprzestrzeń U wzdłuż podprzestrzeni W. Zrzutować na jedną i drugą podprzestrzeń wektory $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3$, i $\mathbf{a}_2 = 3\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3$.

Zadanie 4.7 Niech w przestrzeni V z poprzedniego zadania będzie zadany iloczyn skalarny[9] wzorem $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, tzn. $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, etc. Zrzutować te same wektory $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ na podprzestrzeń U ale nie wzdłuż W, tylko wzdłuż podprzestrzeni $U^\perp$, której wszystkie wektory mają zerowy iloczyn skalarny ze wszystkimi wektorami podprzestrzeni U. Podprzestrzeń $U^\perp$ nazywa się dopełnieniem prostopadłym U w sensie zadanego iloczunu skalarnego (można by zadać inny iloczyn skalarny i wtedy podprzestrzeń $U^\perp$ by była inna).

Zadanie 4.8 Podać przykład odwzrowania liniowego $F:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, takiego, że obraz im$F$ tego odwzorowania jest rozpinany przez jeden (żywy) wektor

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{a} \qquad \ker F = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ \ x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \right\}.$$

Jak duża jest dowolność w wyborze odwzorowania spełniającego te warunki?

Zadanie 4.9 Odwzorowanie F czterowymiarowej przestzrzeni wektorowej V (nad $\mathbb{R}$) w nią samą jest, w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ tej przestrzeni, reprezentowane macierzą

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \\ -5 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

[8] Alternatywnie, podprzestrzeń W można zdefiniować warunkami $v^1_{(e)} - 2v^2_{(e)} = 0$ $v^1_{(e)} - 2v^3_{(e)} = 0$, spełnianymi przez składowe $v^i_{(e)}$ w bazie $\mathbf{e}_i$ wektorów $\mathbf{v}$ należących do podprzestrzeni W. Czy widać, że to definiuje tę samą podprzestrzeń W?

[9] O iloczynach skalarnych będzie potem, ale każdy fizyk jakieś pojęcie o iloczynie skalarnym przecież ma...

Skonstruować takie bazy podprzestrzeni ker$F$ i podprzestrzeni im$F$, żeby wspólne ich wektory były bazą ker$F \cap$ im$F$.

Zadanie 4.10 Liniowe odwzrowanie F czterowymiarowej przestrzeni wektorowej V w trójwymiarową przestrzeń wektorową W jest w bazach $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ i $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ reprezentowane macierzą

$$F_{(w)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Skonstruować takie bazy obu przestrzeni, w których macierz tego odwzorowania ma tzw. kanoniczną postać, tj. taką, że w każdej jej kolumnie i każdym jej wierszu jest conajwyżej jedna jedynka, a poza tym same zera (innymi słowy, przy odpowiednim uporządkowaniu baz, ma postać macierzy jednostkowej pewnego wymiaru i pewną liczbę kolumn i/lub wierszy zerowych).

Zadanie 6.1 Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & \dots & 1+x_2y_n \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & \dots & 1+x_3y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & 1+x_ny_3 & \dots & 1+x_ny_n \end{pmatrix},$$

w zależności od jej wymiaru $n \times n$.

Zadanie 6.2 Obliczyć nie używając softwarowych pomocy wyznaczniki. 2×2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & \cos\beta + i\sin\beta \\ \cos\alpha - i\sin\alpha & \cos\beta - i\sin\beta \end{vmatrix}.$$

3×3 (tu można "po skosach"):

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} i & 0 & 3 \\ 2 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} i & 0 & 3 \\ 1 & -i & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+x \end{vmatrix}.$$

4×4 (tu już "po skosach" nie można - trzeba pokombinować):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} i & 0 & 2 & 0 \\ i & 1 & 3 & 0 \\ 2-i & 0 & i+2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} i & -i & 2 & 0 \\ 1+i & -2i & 4 & 0 \\ 2-i & 0 & i+2 & 1 \\ 1 & -i & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

I jeszcze dwa wieksze dla odważnych (też na kombinowanie):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 10 & 19 & 27 & -27 & -19 & 9 \\ 3 & 10 & -6 & 6 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & -10 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 9 & -10 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & -6 & 10 & 3 \\ 9 & -19 & -27 & 27 & 19 & 10 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 6.3 Obliczyć nie używając softwarowych pomocy wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 6.4 Czasem nie mamy dostępu do komputera, a musimy obliczyć wyznacznik (a najczęściej - dlaczego, to niedługo będzie jasne - musimy wiedzieć, czy wyznacznik znika, czy nie). Dlatego trzeba to trochę poćwiczć. Więc dla wprawy garść przykładów. Najlepiej metodą kombinowaną: wytworzyć trochę zer i, w przypadku wyznaczników macierzy wiyekszych niż 3×3, zaprząc do roboty Laplace'a (niech koleś trochę popracuje!).

$$a) \quad \begin{vmatrix} 193 & 172 \\ 19 & 17 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 27 & 43 & 67 \\ 14 & 21 & 33 \\ 13 & 20 & 31 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 47 & 471 & 941 \\ 69 & 691 & 1381 \\ 73 & 731 & 1462 \end{vmatrix},$$

$$b) \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$c) \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 6.5 I jeszcze dwa wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 20 & 10 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 21 & 10 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 40 & 22 & 12 & 8 & 2 \\ 2 & 40 & 22 & 15 & 8 & 2 \\ 3 & 60 & 30 & 18 & 13 & 3 \\ 3 & 60 & 30 & 18 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Jeśli któryć wyjdzie zero, to pokazać jawnie liniową zależność jego kolumn (albo wierszy) i ustalić rząd macierzy.

Zadanie 6.5' I jeszcze taki wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^2 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 6.6 Kramersięta nie są najszybszym sposobem rozwiązawania układu n równań liniowych na n niewiadomych, ale dobrze mieć te wzory opanowane. Więc aby się tym wprawić kilka przykładów do samodzielnej zabawy.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 10 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 6.7 Skuteczniej odwracać macierze można rozwiązując układ równań wektorowych (wyobraziwszy sobie, że odwracana macierz jest macierzą zmiany bazy), ale warto przećwiczyć robienie tego metodą wykorzystującą uogólnienia rozwinięć Laplace'a. Zatem spróbujmy odwrócić w ten sposób następujące macierze

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 10 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierze M_3 i A_2 są macierzami układów liniowych z poprzedniego zadania. Po znalezieniu M_3^{-1} i A_2^{-1} zadziałać nimi na wektory stojące w prawych stonach tych równań i sprawdzić, że dostaje się te same rozwiązania, co kramersiętami. Na koniec, żeby zobaczyć, że to działa także, gdy macierze mają elementy zespolone, znajdź macierz odwrotną do

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 6.8 Metodą badania rzędu macierzy ustalić ile jest liniowo niezależnych wektorów w zbiorze sześciu wektorów z $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6.9 Kramiesiętami rozwiązać (jeśli jest to możliwe, tzn. jeśli układ ma rozwiązanie i jest ono jednoznaczne) układy równań

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6\,, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0\,, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1\,. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2y_1 + y_2 + y_3 &= 3\,, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 &= 0\,, \\ y_1 + y_2 + 2y_3 &= 9\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2z_1 \phantom{{}+z_2} + 2z_3 &= 3\,, \\ z_2 - z_3 &= 3\,, \\ z_1 + z_2 \phantom{{}+2z_3} &= 2\,. \end{aligned}$$

Zadanie 6.10 Zbadać jaki jest rząd macierzy kwadratowch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 7.1 Podać najogólniejsze rozwiązania (jeśli istnieją) układów równań liniowych

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8\,, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9\,, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7\,, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x - y + z + 2v + 3w &= 2\,, \\ 6x - 3y + 2z + 4v + 5w &= 3\,, \\ 6x - 3y + 4z + 8v + 13w &= 9\,, \\ 4x - 2y + z + v + 2w &= 1\,. \end{aligned}$$

Zadanie 7.2 Zbadać istnienie (i jednoznaczność) rozwiązań układu równań liniowych

$$\begin{pmatrix} a & 1-a & 1+a \\ 2 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 4a \\ -1 \end{pmatrix},$$

w zależności od wartości parametru a i podać rozwiązania (jeśli istnieją).

Zadanie 7.3 Zbadać istnienie (i jednoznaczność) rozwiązań układu równań liniowych

$$\begin{pmatrix} a-5 & 2 & 1 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 1 & 2 & a-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

w zależności od wartości parametru a i podać rozwiązania (jeśli istnieją).

Zadanie 7.4 Zbadać istnienie (i jednoznaczność) rozwiązań układu równań liniowych

$$\begin{pmatrix} 2-a & 1+a & 2 \\ 2 & 3-a & 2 \\ 1 & 3+1 & 1+3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

w zależności od wartości parametru a i podać rozwiązania (jeśli istnieją).

Zadanie 8.1 Obliczyć wartość antysymetrycznej formy dwuliniowej $\hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \hat{\mathbf{e}}^2 + \hat{\mathbf{e}}^2 \wedge \hat{\mathbf{e}}^3$ na uporządkowanej parze wektorów $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, gdzie $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2$ $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_3$. Bazy $\mathbf{e}_i$ oraz $\hat{\mathbf{e}}^j$ są wzajemnie dualne.

Zadanie 8.2 Dane są formy kwadratowe

$$\begin{aligned} &a) \quad Q = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz\,, \\ &b) \quad Q = xy + xz + yz + z^2\,. \end{aligned}$$

Zbadać posługując się "kryterium minorowym", czy są one dodatnio lub ujemnie określone. Zbadać także ich sygnatury metodą Lagrange'a. Traktując x, y i z jak składowe wektora w pewnej bazie trójwymiarowej przestrzeni wektorowej, podać bazy, w których formy te mają postacie diagonalne. Jeśli jest to możliwe, podać przykładowe wektory, na których formy przyjmują wartości dodatnie, ujemne i zerową.

Zadanie 8.3 Dane są formy kwadratowe

$$\begin{aligned} &a) \quad Q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_3x_4\,, \\ &b) \quad Q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4\,, \\ &c) \quad Q = 2\sum_{j=1}^{4} x_jx_j + \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=j+1}^{4} x_jx_k\,. \end{aligned}$$

Zbadać posługując się "kryterium minorowym", czy są one dodatnio lub ujemnie określone. Zbadać ich sygnatury metodą Lagrange'a. Wreszcie, traktując x_i, x_2, x_3 i x_4 jak składowe wektora w pewnej bazie czterowymiarowej przestrzeni wektorowej podać bazy, w których każda z tych form ma postać diagonalną.

Zadanie 8.4 Wyznaczyć wartości rzeczywistego parametru λ, dla których forma

$$Q = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\lambda xy + 2xz\,,$$

kwadratowa jest dodatnio określona. Podać jej sygnaturę w zależności od wartości tego prametru.

Zadanie 8.5 W trójwymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{R}$, której bazę tworzą wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$, iloczyn skalarny jest zadany wzorem $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)_S \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. (Wektory $\mathbf{e}_i$ tworzą więc bazę ortonormalną względem tego iloczynu skalarnego). Metodą ortonormalizacji Gramma-Schmidta zbudować z wektorów

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \ \ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,,\\
\mathbf{v}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\,,\\
\mathbf{v}_3 &= \qquad\ \ 3\,\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\,,
\end{aligned}$$

nową bazę ortonormalną $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$. Wypisać obie macierze zmiany bazy: $R_{(e\leftarrow f)}$ i $R_{(f\leftarrow e)}$. Obliczyć także objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ jeśli formą objętości jest Vol$= \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3$.

Zadanie 8.6 Forma kwadratowa na przestrzeni wektorowej $\mathbb{W}_{(2)}$ rzeczywistych wielomianów stopnia nie wyższego niż drugi jest zadana wzorem

$$Q[w(x)] = \int_{-1}^{1} dx\, w(x)\, w(-x)\,.$$

Zbadać jej sygnaturę. Czy jest ona dodatnio określona? Podać bazę przestrzeni wielomianów, w której macierz tej formy jest diagonalna.

Zadanie 8.7 Czy zadana na przestrzeni wektorowej $\mathbb{W}_{(2)}$ rzeczywistych wielomianów stopnia nie wyższego niż drugi wzorem

$$B(w(x), v(x)) = w(-1)v(-1) + w(0)v(0) - w(1)v(1) + w(2)v(2)\,,$$

forma biliniowa może być iloczynem skalarnym?

Zadanie 8.8 Na przestrzeni wektorowej tworzonej przez rzeczywiste macierze $\mathbf{x}$ wymiaru 2×2 zadana jest forma kwadratowa wzorem

$$Q(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\big(\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}\big)\,,$$

w którym

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć sygnaturę tej formy i (jakąś) bazę, w której jest ona diagonalna. Przy okazji podać symetryczną formę dwuliniową $B(\mathbf{x},\mathbf{y})$, z której powstaje forma Q.

Zadanie 9.1 Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy

$$a)\quad \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad c)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jeśli w którymś przypadku krotność jakiejś wartości własnej jest większa niż 1 i wektorów własnych jej odpowiadających jest więcej niż jeden, sprawdzić zerowanie się zredukowanego wielomianu charakterystycznego na tej macierzy.

Zadanie 9.2 Pokazać w przypadku macierzy diagonalizowalnej F słuszność (ogólnie prawdziwego) wzoru (symbol "Tr" oznacza ślad macierzy, tj. sumę jej elementów diagonalnych; nie poplączmy: ślad jest śladem nawet gdy macierz F nie jest w postaci diagonalnej i o to tu chodzi; ślad nie zmienia się przy diagonalizacji[10] więc jest też równy sumie wartości własnych macierzy)

$$\mathrm{Det}[\exp(F)] = \exp(\mathrm{Tr}\, F)\,.$$

Obliczyć wyznacznik macierzy $\exp(F)$, gdzie

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 & 134 & 13 & 8 & -117 \\ 2 & -33 & 110 & 23 & 34 & -17 & 12 \\ 13 & 32 & 17 & 32 & 198 & 34 & -3 \\ 17 & \sqrt{2} & 100 & 82 & 189 & 91 & 3 \\ 19 & 0 & 93 & -4 & 20 & 31 & 53 \\ 23 & 3 & 12 & -19 & 89 & -128 & 82 \\ 124 & -34 & 53 & 91 & -123 & 11 & 41 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 9.3 Dana jest macierz

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -6 & 11 & -6 \\ -8 & 16 & -9 \end{pmatrix}.$$

[10] Ogólniej: ślad macierzy reprezentującej liniowe odwzorowanie przestrzeni wektorowej V w nią samą (pod warunkiem, że odwzorowanie to jest zapisane "z obu stron" w tej samej bazie przestrzeni V) nie zmienia się zmienia się przy zmianie bazy. No bo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(R^{-1}\cdot F\cdot R) &= (R^{-1}\cdot F\cdot R)^i{}_i = [R^{-1}]^i{}_j F^j{}_l R^l{}_i \\ &= R^l{}_i [R^{-1}]^i{}_j F^j{}_l = \delta^l{}_j F^j{}_l = F^l{}_l = \mathrm{Tr}(F)\,.\end{aligned}$$

Zatem, skoro każdą macierz można przez zmianę bazy sprowadzić do postaci Jordanowskiej, w której na diagonali macierzy występują jej wartości własne, ślad każdej macierzy, a nie tylko diagonalizowalnej, jest równy sumie jej wartości własych.

Sprawdzić, że jest ona diagonalizowana przez macierz

$$R_{(e\leftarrow w)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Podać jawną postać macierzy F^{2020} i F^{2021} a także macierzy $\exp(tF)$.

Zadanie 9.4 Obliczyć wyznacznik D_n macierzy $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Wskazówka: Zlaplasować tak, by dostać wzorek rekurencyjny wiążący D_n z D_{n-1} i D_{n-2} i rozwiązać otrzymaną rekurencję (tak jak w skrypcie rekurencję Fibonacciego) np. wykorzystując umiejętność podnoszenia macierzy do n-tej potęgi.

Zadanie 9.5 Jawnie znaleźć macierze $\cos(tF)$ i $\sin(tF)$, gdzie

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mając macierze $\cos(tF)$ i $\sin(tF)$ obliczyć bezpośrednio macierz $\cos^2(tF) + \sin^2(tF)$.

Zadanie 9.6 Czy odwzorowanie F przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{R}$ w nią sama, którego macierz zapisana "z obu stron" w bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ tej przestrzeni ma postać

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

ma w tej przestrzeni wektory własne? Podać ogólną postać macierzy F^n (n jest dowolną liczbą naturalną) i sprawdzić ją "na piechotę" dla $n = 1$, $n = 2$. Podać także postać macierzy $\exp(tF)$.

Zadanie 9.7 Napisać jawnie macierze F^n oraz $\exp(tF)$, jeśli

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 9.8 Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy 3×3

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

Zadanie 9.9 (rozrywkowe) Napisać wszystkie rzeczywiste macierze 3×3, których kwadrat daje macierz

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: Zajrzeć na stronę 176 skryptu.

Zadanie 9.10 Znaleźć jawną postać macierzy $R = \exp(\frac{\pi}{3}J)$, gdzie

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uzasadnić, że jeśli potraktować R jak macierz zmiany bazy $R = R_{(e\leftarrow e')}$ z bazy $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ do bazy $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, to zmiana ta jest obrotem, tj. wektory $\mathbf{e}'_i$ są otrzymane przez obrót trójki wektorów $\mathbf{e}_i$ wokół pewnej osi (którą można reprezentować wektorem o jednostkowej długości[11] $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 n^1 + \mathbf{e}_2 n^2 + \mathbf{e}_3 n^3$, $(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1$. Wyznaczyć tę oś (wektor $\mathbf{n}$) i kąt obrotu.

Zadanie 10.1 Napisać jawnie macierze F^n oraz $\exp(tF)$, jeśli

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 10.2 Rozwiązać (tzn. podać jawny wzór na wyraz D_n jako funkcję n) następujące związki rekurencyjne z podanymi warunkami początkowymi

$$\begin{array}{llll} a) & D_n = D_{n-1} - D_{n-2}\,, & D_1 = 0\,,\ \ D_2 = 1\,, \quad \text{oraz} & D_1 = 1\,,\ \ D_2 = 2\,, \\ b) & D_n = 4D_{n-1} - 4D_{n-2}\,, & D_1 = 0\,,\ \ D_2 = 1\,, \quad \text{oraz} & D_1 = 1\,,\ \ D_2 = 2\,. \end{array}$$

Zadanie 10.3 Dana jest macierz A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Podać jej wartości własne i wektory własne. Czy jest ona diagonalizowalna? Znaleźć na dwa różne sposoby macierz $U = \exp(tA)$. Napisać także macierz U^{-1}.

Zadanie 10.4 Dana jest macierz (w pewnej bazie $\mathbf{e}_i$)

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

[11] Zakładamy, że iloczyn skalarny jest, jak zwykle, zadany wzorami $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)_S \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

odwzorowania F trójwymiarowej p.w. V w nią samą. Znaleźć jej wektory i wartości własne oraz podać rozkład przestrzeni V na podprzestrzenie pierwiastkowe macierzy F. Podać jawną postać macierzy F^n i $\exp(tF)$.

Zadanie 10.5 Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podać postać elementów[12] 11 i 55 macierzy $\exp(tB)$. Napisać też jak wygląda odpowiadający macierzy B rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe całej pięciowymiarowej przestrzeni wektorowej.

Zadanie 10.6
Znaleźć wszystkie iloczyny skalarne $(\cdot|\cdot)_S$, w których wektory własne macierzy F

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Sprawdzić, że w połączeniu z dowolnym takim iloczynem skalarnym macierz F daje dobrą formę kwadratową $Q(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}|F\cdot\mathbf{v})_S$.

Zadanie 10.7 Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -6i & -6i \\ -3i & 5 & 3 \\ 3i & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Czy istnieje (półtoraliniowy - bo przestrzeń wektorowa jest nad $\mathbb{C}$) iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_S$, przy którym odwzorowanie H jest samosprzężone, tzn. takie, że $(H(\mathbf{w})|\mathbf{v})_S = (\mathbf{w}|H(\mathbf{v}))_S$? Jeśli tak, to podać (w bazie $\mathbf{e}_i$, w której podana jest macierz odwzorowania H) wszystkie takie iloczyny skalarne.

Zadanie 10.8 Rozwiązać równanie $\mathbf{v}_{n+1} = F\cdot\mathbf{v}_n$ przy podanym warunku początkowym $\mathbf{v}_0$:

$$a)\quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b)\quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[12] Jak ktoś jest zażarty może sobie całą macierz wypisać, ale nie o zażartość tu chodzi, tylko o sprawdzenie, czy się wie, jak to zrobić (Mathematica i tak zrobi to szybciej).

Zadanie 10.9 Liniowe odwzorowanie F trówymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ w nią samą jest w bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, reprezentowane macierzą

$$F_{(\mathbf{e})(\mathbf{e})} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podać rozkład przestrzeni V na podprzestrzenie niezmiennicze odwzorowania F i skonstruować rzuty na te podprzestrzenie.

Zadanie 10.10 Liniowe odwzorowanie F czterowymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ w nią samą jest w bazie $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$, reprezentowane macierzą

$$F_{(\mathbf{e})(\mathbf{e})} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wiedząc, że jedyna wartością własną tej macierzy jest $\lambda = 2$ (o krotności cztery) podać obraz wektora $\mathbf{v} = \mathbf{e}_4$.

Odpowiedzi i podpowiedzi

C.1: a) $18 - i$, **b)** $-2 + 2i$, **c)** $(-7 + 6i)/17$, **d)** $-(1 + i)/8$, **e)** $-(38 + 41i)/125$.

C.2: a) $\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$, **b)** $2\sqrt{3}e^{i7\pi/6}$, **c)** $2\,e^{i\pi/2}$, **d)** $\frac{1}{2}\,e^{i\pi/2}$, **e)** najlepiej zauważyć, że $1+\cos\alpha = 2\cos^2(\alpha/2)$, a $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$; to prowadzi do $z = 2\cos(\alpha/2)\,e^{i\alpha/2}$; jednak wtedy, gdy $\pi < \alpha < 2\pi$ czynnik $\cos(\alpha/2)$ jest ujemny i nie może być modułem liczby zespolonej; gdy więc $\pi < \alpha < 2\pi$, $z = 2|\cos(\alpha/2)|\,e^{i(\pi+\alpha/2)}$, **f)** dowolną liczbę t można zawsze zapisać jako $\mathrm{tg}\alpha$, gdzie $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ale tu lepiej napisać $t = -\mathrm{tg}\alpha$ i przyjąć $0 \leq \alpha < \pi$; wtedy otrzyma się $z = e^{2i\alpha}$ i argument liczby z będzie leżał w przedziale $[0, 2\pi)$, tak jak się umówiliśmy.

C.3: a) $\pm(1 + 2i)$, **b)** $\pm\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$, **c)** $\pm(5 + 2i)$, **d)** $\pm(7 + 3i)/\sqrt{2}$, **e)** $\pm\left(\sqrt{2} + i\right)$.

C.4: a) $z_{1,2} = 2 \pm i$, **b)** $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + i$, **c)** $z_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$, **d)** $z_1 = -\frac{1}{2}(3 + i)$, $z_2 = -3 + i$, **e)** $z_1 = \frac{1}{5}(1 + 2i)$, $z_2 = -2 - i$.

C.5: a) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)]$ bo, jak można zauważyć, $4 \pm 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} \pm 1)^2$. (A dlaczego nie $1 - \sqrt{3}$? Proszę pomyśleć). Do tego samego można też dojść pisząc $e^{i\pi/12} = e^{i\pi/3}e^{-i\pi/4}$. **b)** $e^{i5\pi/12} = e^{i\pi/2}e^{-i\pi/12} = i/e^{i\pi/12}$ i, korzystając z poprzedniego, $e^{i5\pi/12} = 4i/[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})] = 4i[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - i(\sqrt{6} - \sqrt{2})]/16$; ostatecznie więc $e^{i5\pi/12} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)]$, **c)** $e^{i\pi/8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, **d)** $e^{3i\pi/8} = i/e^{i\pi/8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

C.6: a) $z_{1,2} = -6 \pm 13i$, **b)** $z_0 = 0$; aby znaleźć pozostałe rozwiązania podstawić $z = r\,e^{i\varphi}$, co da $r^2\,e^{4i\varphi} = -2$, czyli $r = \sqrt{2}$ i $e^{4i\varphi} = -1$; zatem $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, $z_2 = \sqrt{2}\,e^{3i\pi/4}$, $z_3 = \sqrt{2}\,e^{5i\pi/4}$, $z_4 = \sqrt{2}\,e^{7i\pi/4}$, albo, zapisując inaczej, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1 - i$, $z_4 = 1 - i$, **c)** $z_0 = 0$; jak w poprzednim podstawić $z = r\,e^{i\varphi}$: $z_1 = 2\,e^{i\pi/2}$, $z_2 = 2\,e^{i(1/2+2/3)\pi}$, $z_3 = 2\,e^{i(1/2+4/3)\pi}$, **d)** $z_0 = 0$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i7\pi/12}$, $z_3 = \sqrt{2}e^{i11\pi/12}$, $z_4 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$, $z_5 = \sqrt{2}\,e^{i19\pi/12}$, $z_6 = \sqrt{2}\,e^{i23\pi/12}$.

C.7: $\cos 4x = \mathrm{Re}\,(e^{4ix})$, $\sin 4x = \mathrm{Im}\,(e^{4ix})$; $\cos 4x + i\sin 4x = e^{4ix} = \left(e^{ix}\right)^4 = (\cos x + i\sin x)^4$. Zatem $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$, $\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$.

C.9: a) Po prostu rozpisać obie strony na eksponensy, powymnażać i zobaczyć, że to to samo, **b)** skorzystać z de Moivre'a: $\cos 5\varphi = \mathrm{Re}(e^{5i\varphi}) = \mathrm{Re}[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5]$; napisać jawnie tę piątą potęgę i wziąć część rzeczywistą, a potem to wstawić do lewej strony dowodzonego wzoru.

C.10: a) $z = w^{1/3}$, gdzie $w = \sqrt{3} - i = 2\,e^{i11\pi/6}$; zatem $z_1 = 2^{1/3}e^{i11\pi/18}$, $z_2 = 2^{1/3}e^{i\pi(11/18+2/3)} = 2^{1/3}e^{i23\pi/18}$, $z_3 = 2^{1/3}e^{i\pi(11/18+4/3)} = 2^{1/3}e^{i35\pi/18}$, **b)** $z = v_{1,2}^{1/3}$, gdzie $v_1 = i + \sqrt{3-4i}$, $v_2 = i - \sqrt{3-4i}$, czyli $v_1 = i + 2 - i = 2$, $v_2 = i - 2 + i = -2 + 2i = 2^{3/2}\,e^{i3\pi/4}$; zatem $w_{10} = 2^{1/3}$, $w_{11} = 2^{1/3}\,e^{i2\pi/3}$, $w_{12} = 2^{1/3}\,e^{i4\pi/3}$, $w_{20} = 2^{1/2}\,e^{i\pi/4}$, $w_{21} = 2^{1/2}\,e^{i11\pi/12}$, $w_{22} = 2^{1/2}\,e^{i19\pi/12}$, **c)** $z = v_{1,2}^{1/3}$, gdzie $v_1 = 1 + i\sqrt{3+4i}$, $v_2 = 1 - i\sqrt{3+4i}$, czyli $v_1 = 1 + i(2 + i) = 2i = 2\,e^{i\pi/2}$, $v_2 = 1 - i(2 + i) = 2 - 2i = 2^{3/2}\,e^{i7\pi/4}$; zatem

$w_{10} = 2^{1/3}\, e^{i\pi/6}$, $w_{11} = 2^{1/3}\, e^{i5\pi/6}$, $w_{12} = 2^{1/3}\, e^{i3\pi/2}$, $w_{20} = 2^{1/2}\, e^{i7\pi/12}$, $w_{21} = 2^{1/2}\, e^{i5\pi/4}$, $w_{22} = 2^{1/2}\, e^{i23\pi/12}$, **d)** $z = w^{1/4}$, gdzie $w = -7+24i = 25\, e^{i\varphi}$, z $\varphi = -\mathrm{arctg}(24/7)+\pi$ (żeby kąt φ był w drugiej ćwiartce) i stąd $z_0 = \sqrt{5}\, e^{i\varphi/4}$, $z_1 = \sqrt{5}\, e^{i(\varphi+2\pi)/4}$, $z_2 = \sqrt{5}\, e^{i(\varphi+4\pi)/4}$, $z_3 = \sqrt{5}\, e^{i(\varphi+6\pi)/4}$.

C.11: **a)** $|z-3| < |z+i|$, czyli są to punkty płaszczyzny (x, y) bardziej oddalone od punktu $z_1 = -i \equiv (0, -1)$ niż od punktu $z_2 = 3 \equiv (3, 0)$; można je znaleźć geometrycznie: prosta przechodząca przez te punkty ma równanie $y = \frac{1}{3}x - 1$; na tej prostej punkt w połowie odległości pomiędzy z_1 i z_2 to punkt $(3/2, -1/2)$ lub $(3-i)/2$; prosta prostopadła do tamtej przechodząca przez punkt $(3/2, -1/2)$ ma równanie $y = -3x+4$. Zatem szukany zbiór będący półpłaszczyzną tworzą punkty $z = x + iy$ o $y > -3x + 4$; Można też ten zbiór wyznaczyć bezmyślnym rachunkiem: $|z-3| < |z+i|$, to $|z-3|^2 < |z+i|^2$, czyli $(x-3)^2 + y^2 < x^2 + (y+1)^2$ co da to samo. Formalnie rzecz biorąc wyznaczyliśmy tu przeciwobraz wnętrza jednostkowego koła $|w| < 1$ o środku w $w_0 = 0$ wzgędem homografii $w = f(z) = (z-3)/(z+i)$. **b)** To z kolei jest przeciwobraz wzgędem homografii $w = f(z) = (z+3i)/(z-3i)$ okręgu o środku w $w_0 = 0$ i promieniu 2. Przeciwobraz ten tworzą punkty $z = x + iy$ o $x^2 + (y-5)^2 = 16$, czyli punkty leżące na okręgu o środku w punkcie $(0, 5)$, czyli $z_0 = 5i$ i promieniu równym 4. **c)** Tu zaś wyznaczamy przeciwobraz prawej półpłaszczyzny $\mathrm{Re}w > 0$ względem homografii $w = f(z) = (z-1)/(z+1)$. Jeśli $z = x + iy$, to $w = (z-1)/(z+1) = [(x-1) + iy][(x+1) - iy]/[(x+1)^2 + y^2]$; ponieważ mianownik jest nieujemny, więc $\mathrm{Re}w > 0$ oznacza $\mathrm{Re}[(x-1) + iy][(x+1) - iy] > 0$, czyli $x^2 + y^2 > 1$; są więc to punkty leżące na zewnątrz koła o środku w początku układu (w punkcie $z_0 = 0$) i jednostkowym promieniu. Należy zauważyć, że wszystkie te wyniki są zgodne z tym, co wiemy o homografiach, tj. z tym, że odwzorowują one proste i okręgi w proste i/lub okręgi (półpłaszczyzna to zbiór gęsto upakowanych prostych, a koło to też zbiór gęsto upakowanych okreęgów).

C.12: Jak nas o tym poucza filmik zamieszczony na stronie wykładu, należy odwrócić podaną funkcję $w \equiv f(z) = (z+i)/(z-i)$, tj. napisać $z = i(w+1)/(w-1)$; warunek $\mathrm{Im}z < 0$ jest teraz tym samym, co $\mathrm{Re}[(w+1)/(w-1)] < 0$; następnie podstawiamy $w = x + iy$, co da

$$\frac{w+1}{w-1} = \frac{[(x+1) + iy][(x-1) - iy]}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{x^2 - 1 + y^2 - 2iy}{(x-1)^2 + y^2}\,;$$

ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, wynika stąd, iż $\mathrm{Re}[(w+1)/(w-1)] < 0$ jest tym samym, co $x^2 - 1 + y^2 < 0$; zatem szukany zbiór to wnętrze koła $x^2 + y^2 \leq 1$. Zgadza się to z tym, o czym poucza nas filmik, że odwzorowanie będące homografią przerabia proste na proste lub okręgi: w końcu półpłaszczyzna $\mathrm{Im}z < 0$ to nic innego tylko zbiór (bardzo gęsto upakowanych) prostych równoległych do osi x... Kto może niech spróbuje otrzymać ten wynik programem Mathematica, np. za pomocą funkcji ParametricPlot: Mathematica pokaże wtedy jakieś obszary albo wyglądające jak wygryziony ser, albo zgoła kanciate. Morał jest jak zwykle taki sam: nie można ufać programom! trzeba zawsze wiedzieć (choćby nawet z grubsza tylko), co ma wyjść!

C.13: Teraz z kolei nic już nie trzeba odwracać: pytamy o takie $z = x+iy$, że moduł liczby

$w = f(z) = (z+i)/(z-i)$ jest większy niż 2 (bo na płaszczyźnie zespolonego w zbiór będący zewnętrzem koła o promieniu 2 można zadać warunkiem $|w| > 2$). Ma być zatem

$$|w|^2 = \left|\frac{z+i}{z-i}\right|^2 = \frac{|z+i|}{|z-i|} = \frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2} > 4\,,$$

czyli

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 > 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4\,.$$

Po małych przekształceniach daje to $x^2 + (y-5/3)^2 < (4/3)^2$, czyli wnętrze koła o środku w $z = 5i/3$ i promieniu $4/3$.

C.14: Pierwiastkami n-tego stopnia z $z = 1$ są $\varepsilon_k = e^{i2\pi k/n}$ o $k = 0, \ldots, n-1$, wobec czego

$$\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{n-1} = e^{i2\pi\cdot 0/n} + e^{i2\pi\cdot 1/n} + \ldots + e^{i2\pi\cdot(n-1)/n} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2\pi k/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i2\pi/n}\right)^k\,.$$

Jest wiec to skończony szereg geometryczny o $q = e^{i2\pi/n}$. Zatem

$$\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-e^{i2\pi n/n}}{1-e^{i2\pi/n}} = 0\,,$$

bo przecież $e^{i2\pi n/n} = 1$. Wynik ten jest oczywisty, jeśli sobie przypomnieć ,jak na jednostkowym okręgu są rozmieszczone pierwiastki n-tego stopnia z jedności.

C.15: To jest suma

$$\sum_{n=1}^{22} \cos n\varphi\,,$$

w której $\varphi = 8^o$. Ponieważ już znamy wzór

$$\sum_{n=1}^{N} \cos n\varphi = \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \cos((N+1)\varphi/2)\,,$$

więc podstawiając doń $N = 22$ i $\varphi = 8^o$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} C &= \cos(23\cdot 4^o)\,\frac{\sin 88^o}{\sin 4^o} = \frac{\cos 92^o\,\sin 88^o}{\sin 4^o} = \frac{\cos(90^o+2^o)\,\sin(90^o-2^o)}{\sin 4^o} \\ &= \frac{[\cos 90^o\cos 2^o - \sin 90^o \sin 2^o][\sin 90^o \cos 2^o - \cos 90^o \sin 2^o]}{\sin 4^o} = -\frac{\sin 2^o \cos 2^o}{\sin 4^o}\,. \end{aligned}$$

Zatem $C = -\frac{1}{2}$.

C.16: W punkcie **a)** postępujemy stadardowo, korzystając ze wzoru na sumę skończoną szeregu geometrycznego:

$$\sum_{n=1}^{N}\cos[(2n-1)x] = \mathrm{Re}\big\{e^{ix}\left[1+e^{2ix}+\ldots+(e^{2ix})^{N-1}\right]\big\}$$
$$= \mathrm{Re}\left\{e^{iNx}\,\frac{\sin Nx}{\sin x}\right\} = \frac{\cos Nx \sin Nx}{\sin x} \equiv \frac{\sin 2Nx}{2\sin x}\,.$$

Gdy $x = 0$ suma, co oczywiste, musi być równa N: po prawej stronie otrzymuje się to biorąc granicę $x \to 0$. W punkcie **b)** możemy zaś napisać

$$\sum_{n=1}^{N}\sin^2(nx) = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2nx)\right] = \frac{N}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\cos(2nx)\,.$$

Korzystamy teraz ze wzoru na sume kosinusów (patrz zadanie **C.15** - wstawiamy tam $\varphi = 2x$) i mamy

$$\sum_{n=1}^{N}\sin^2(nx) = \frac{N}{2} - \frac{\sin(Nx)\cos[(N+1)x]}{2\sin x}\,.$$

Oczywiście, gdy $x = 0$, suma jest równa zeru.

C.17: Ogólnie $w(x) = \tilde{w}(x)\,v(x) + r(x)$ przy czym wielomian $r(x)$ będący resztą jest stopnia niższego niż stopień wielomianu $v(x)$. W podanych przypadkach, ponieważ $v(x)$ jest stopnia pierwszego, reszta $r(x) = a$, tj. jest liczbą po prostu; można ją zatem łatwo otrzymać i bez dzielenia, z warunku $w(x_0) = \tilde{w}(x_0)\,v(x_0) + a = a$, gdzie x_0 jest jakimś (tu jest zawsze tylko jeden) pierwiastkiem wielomianu $v(x)$. **a)** $\tilde{w}(x) = 2x^3 - 3x + 1$, reszta $r(x) = -1$, **b)** $\tilde{w}(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$, reszta $r(x) = 0$, co można było od razu przewidzieć, bo $w(1) = 0$, **c)** $\tilde{w}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 28x + 57$, reszta $r(x) = 116$, co można sprawdzić, bo $w(2) = 116$, **d)** $\tilde{w}(x) = 3x^4 + 7x^2 - 2$, reszta $r(x) = 2$.

C.18: Tu też resztę $r(x)$ można by bylo znaleźć, przyjmując ją w postaci ogólnego wielomianu stopnia o jeden niższego niż wielomian $v(x)$, przez który dzielimy $w(x)$, i wyznaczając współczynniki $r(x)$ z warunków $w(x_i) = \tilde{w}(x_i)v(x_i) + r(x_i) = r(x_i)$, gdzie x_i są różnymi[13] pierwiastkami wielomianu $v(x)$. Nie będziemy tu tego robić, bo prościej jest po

[13] Zakładamy tu, że liczba różnych pierwiastków wielomianu $v(x)$ jest równa jego stopniowi; jeśli tak nie jest - $v(x)$ ma jakieś pierwiastki wielokrotne - warunków $w(x_i) = \tilde{w}(x_i)v(x_i) + r(x_i) = r(x_i)$ jest za mało, by wyznaczyć wszystkie współczynniki reszty. Trzeba w takiej sytuacji uciec się do sztuczki, którą wykorzystywać będziemy też przy okazji robienia użytku z tzw. twierdzenia Cayleya - Hamiltona, polegającej na zauważeniu, że jeśli x_i jest pierwiastkiem r-krotnym $v(x)$, to nie tylko $\tilde{w}(x_i)v(x_i) = 0$, ale także

$$\frac{d^k}{dx^k}\,\tilde{w}(x)v(x)\Big|_{x=x_i} = 0\,, \qquad k = 1,\ldots,r-1\,.$$

Obliczenie odpowiedniej liczby pochodnych obu stron równości $w(x) = \tilde{w}(x)v(x) + r(x)$ w x_i będącym pierwiastkiem wielokrotnym $v(x)$ daje wtedy brakujące do wyznaczenia współczynników reszty $r(x)$ równania.

prostu podzielić wielomian przez wielomian. **a)** $\tilde{w}(x) = 8x - 4$, reszta $r(x) = 32x - 21$, **b)** $\tilde{w}(x) = 2x^2 - x + \frac{1}{2}$, reszta $r(x) = \frac{13}{2}x - \frac{1}{2}$, **c)** $\tilde{w}(x) = x^2 + 1$, reszta $r(x) = 0$.

C.19: I lewa i prawa strona są wielomianami stopnia $2n$. $x = -1$ oraz $x = 1$ są pierwiastkami lewej strony; ogólnie jej pierwiastkami zespolonymi są wszystkie pierwiastki $2n$-tego stopnia z jedności $z_k = e^{i\frac{2\pi}{2n}k} = e^{i\frac{\pi}{n}k}$, gdzie $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, przy czym $z_0 = 1$, a $z_n = -1$. Zatem

$$x^{2n} - 1 = (x+1)(x-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x - e^{i\frac{\pi}{n}k}\right)\prod_{k=n+1}^{2n-1}\left(x - e^{i\frac{\pi}{n}k}\right)$$
$$= (x^2-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x - e^{i\frac{\pi}{n}k}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x - e^{i\frac{\pi}{n}(2n-k)}\right).$$

W drugiej linii czynniki drugiego iloczynu zostały trochę inaczej uszeregowane. Ponieważ $e^{i\frac{\pi}{n}(2n-k)} = e^{-i\frac{\pi}{n}k}$, można czynniki o tych samych k w wystepujacych tu dwóch iloczynach połaczyc i to da już dowodzony wzór.

C.20: W dziedzinie liczb zespolonych pierwiastkami wielomianu $w_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + 1$ są wszystkie pierwiastki $2n+1$ stopnia z -1, czyli liczby $w_k = e^{i\pi\frac{1+2k}{2n+1}}$, $k = 0, \ldots, 2n$, przy czym $w_n = -1$. Zatem

$$x^{2n+1} + 1 = \prod_{k=0}^{2n}\left(x - e^{i\pi\frac{1+2k}{2n+1}}\right) = (x+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{i\pi\frac{1+2k}{2n+1}}\right)\prod_{k=n+1}^{2n}\left(x - e^{i\pi\frac{1+2k}{2n+1}}\right).$$

W drugim n-krotnym iloczynie przechodzimy do $k' = 2n - k$, tak, że k' przebiega wartości od $n-1$ do zera. Ponieważ wykładnik $i\pi\frac{1+2k}{2n+1}$ po takim podstawieniu przechodzi w $i\pi\frac{1+2(2n-k')}{2n+1} = i2\pi - i\pi\frac{1+2k'}{2n+1}$, możemy (opuszczając już prim) połączyć wyrazy obu iloczynów o takich samych wartościach k otrzymując

$$x^{2n+1} + 1 = (x+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left[x^2 - x\left(e^{i\pi\frac{1+2k}{2n+1}} + e^{-i\pi\frac{1+2k}{2n+1}}\right) + 1\right]$$
$$= (x+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{(1+2k)\pi}{2n+1} + 1\right).$$

Jeśli $n = 1$, wzór ten daje, bo $\cos(\pi/3) = 1/2$, łatwy do sprawdzenia rozkład $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$.

C.21: **a)** $z_1 = 1+i$, $z_2 = \frac{1}{2}(-1-i+e^{i\pi/4}\sqrt{6})$, $z_3 = \frac{1}{2}(-1-i-e^{i\pi/4}\sqrt{6})$, **c)** $z_1 = 1 + sqrt2$, $z_2 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2} + \sqrt{6})$, $z_3 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2} - \sqrt{6})$.

C.22: Powinno wyjść $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Należy po drodze zauważyć, że ε jest (środkowym, tj. $\varepsilon = \varepsilon_1$ pierwiastkiem trzeciego stopnia z 1 i wobec tego $\varepsilon^3 = 1$, a $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$.

Zadanie 0.1: Zadanie jest tak proste, że tylko dla porządku podaję: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. W zasadzie każdy uzyskawszy rozwiązanie, powinien (koniecznie trzeba sobie taki odruch wyrobić!!!) podstawić liczby do wyjściowych równań i sprawdzić, czy równania te są spełnione.

Zadanie 0.2: Stosując eliminatkę Gaussa standardowo, tj. odejmując od drugiego, trzeciego i czwartego równania tylokrotność pierwszego, żeby z tamtych wysiudać x, dostajemy coś takiego:

$$\begin{aligned} x + \; y + \;\; z + t &= 1\,, \\ y + 2z + t &= 0\,, \\ y + 2z + t &= 0\,, \\ y + 2z + t &= 0\,. \end{aligned}$$

Jest więc jasne, że są do spełnienia przez cztery niewiadome tylko dwa równania. Odejmując jeszcze od pierwszego któreś z pozostałych zostajemy z dwoma

$$\begin{aligned} x - z &= 1\,, \\ y + 2z + t &= 0\,. \end{aligned}$$

Rodzina rozwiązań jest dwuparametrowa: przy dowolnych rzeczywistych (przy zespolnych zresztą też) α i β rozwiązaniem jest $x = 1 + \alpha$, $y = -2\alpha - \beta$, $z = \alpha$, $t = \beta$.

Zadanie 0.3: Znów systematycznie z pomocą pierwszego usuwamy x z pozostałych dwu i mamy

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3\,, \\ z &= 1\,, \\ z &= 1\,. \end{aligned}$$

Znów więc jest wiele rozwiązań. Np. $x = \alpha$, $y = 2 - \alpha$, $z = 1$, gdzie α jest dowolną liczbą.

Zadanie 0.4: Tu x w pierwszym równaniu ma niewygodny współczynnik, (pojawiłyby się jakieś ułamki) wiec użyjmy pierwszego by wysiudać z pozostałych y

$$\begin{aligned} 3x + y + \;\; z &= \;\; 1\,, \\ -2x \qquad + 2z &= -2\,, \\ 4x \qquad - 2z &= -8\,. \end{aligned}$$

Po pomnożeniu drugiego stronami przez -2 od razu widać że jest ono sprzeczne z trzecim. Układ nie ma więc rozwiązań.

Zadanie 1.1: Nie można. Aby to dość oczywiste stwierdzenie uzasadnić, trzeba pokazać, że dowolny wektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

z $\mathbb{R}^3$ $(a, b, c$ mogą być dwolnymi liczbami rzeczywistymi) da się przedstawić jako kombinację liniową $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$. Wymaga to znów napisania odpowiedniego układu rówanań i sprawdzenia, że ma on zawsze rozwiązanie. Jest ono następujące:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{a+b-c}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{a-b+c}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-a+b+c}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Besides, oznacza to, iż wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ tworzą bazę (uporządkowaną - jak dodają w tym miejscu porządni matematycy) przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ i w tej bazie wektor (żywy wektor!) $\mathbf{v}$ ma jako swoje składowe te właśnie liczby:

$$v^1_{(e)} = \frac{a+b-c}{2}, \quad v^2_{(e)} = \frac{a-b+c}{2}, \quad v^3_{(e)} \frac{-a+b+c}{2},$$

które się zapisuje zwykle w kolumience (u mnie zawsze w obłych nawiasach)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a+b-c) \\ \frac{1}{2}(a-b+c) \\ \frac{1}{2}(-a+b+c) \end{pmatrix}.$$

Zadanie 1.2: Wektory $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ również tworzą układ linowo niezależny. Zato wektory $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ już nie: $7\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$.

Zadanie 1.3: Układ tych wielomianów jest liniowo zależny, bo $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4$. Wielomianu $\mathbf{u}$ nie da się zpisać jako kombinacji liniowej wielomianów $\mathbf{w}_i$ bo (pomijając na moment wielomian $\mathbf{w}_1$) musielibyśmy dla pewnych λ_2, λ_3 i λ_4 mieć równość (zachodzącą dla dowolnego x)

$$\lambda_2 \mathbf{w}_2(x) + \lambda_3 \mathbf{w}_3(x) + \lambda_4 \mathbf{w}_4(x) = \mathbf{u}(x),$$

czyli - bo to wymaga równości współczynników przy tych samych potęgach x-a po lewej i po prawej stronie - λ_2, λ_3 i λ_4 musiałyby być rozwiązaniem układu

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \qquad\quad &= 5, \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 + 5\lambda_4 &= 8, \\ \lambda_3 + \ \lambda_4 &= 2, \\ \lambda_2 \qquad\quad + 7\lambda_4 &= 2. \end{aligned}$$

Znów możemy poGaussować - najlepiej użyć ostatniego do eliminacji λ_2 z trzech pierwszych:

$$\begin{aligned} 3\lambda_3 - 14\lambda_4 &= 1, \\ -2\lambda_3 - \ 2\lambda_4 &= 6, \\ \lambda_3 + \ \ \lambda_4 &= 2, \\ \lambda_2 \qquad\quad + \ 7\lambda_4 &= 2. \end{aligned}$$

Teraz już wystarczy pomnożyć trzecie stronami przez -2 i porównać z drugim, żeby zobaczyć, że układ nie ma rozwiązań. A gdyby uwzględnić $\mathbf{w}_1(x)$? Nic to nie da, bo pisząc

$$\xi_1\mathbf{w}_1(x) + \xi_2\mathbf{w}_2(x) + \xi_3\mathbf{w}_3(x) + \xi_4\mathbf{w}_4(x) = \mathbf{u}(x)\,,$$

możemy podstawić $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4$ (bo $\mathbf{w}_1$ jest liniowo zależny od pozostałych trzech wektorów) i układ powyższy przejdzie w

$$(\xi_2 - \xi_1)\mathbf{w}_2(x) + (\xi_3 + \xi_1)\mathbf{w}_3(x) + (\xi_4 + \xi_1)\mathbf{w}_4(x) = \mathbf{u}(x)\,.$$

Daje to jednak ten sam sprzeczny układ równań, bo przecież możemy oznaczyć $\lambda_2 = \xi_2 - \xi_1$, $\lambda_2 = \xi_3 + \xi_1$, $\lambda_2 = \xi_4 + \xi_1$.

Wielomian $\mathbf{v}(x) = 15x^3 + 7x + 14$ można napisać (rozwiązując układ równań

$$\eta_2\mathbf{w}_2(x) + \eta_3\mathbf{w}_3(x) + \eta_4\mathbf{w}_4(x) = \mathbf{v}(x)\,,$$

tak jak wyżej) w postaci $\mathbf{v}(x) = 5\mathbf{w}_3(x) + 2\mathbf{w}_4(x)$ (można to zresztą zobaczyć bez rozwiązywania) ale nie jest to jedyna możliwość - można przecież do prawej strony zawsze dodać pomnożony przez dowolną liczbę wektor zerowy zapisany jako $\mathbf{0} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_4$:

$$\mathbf{v} = 5\mathbf{w}_3 + 2\mathbf{w}_4 + \xi\left(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_4\right).$$

i wstawić sobie za ξ cokolwiek.

Wielomianu $\mathbf{u}(x)$ się nie dało zapisać jako kombinacji liniowej wielomanów $\mathbf{w}_i(x)$, a wielomian $\mathbf{v}(x)$ się dało. To dlatego, że $\mathbf{v}(x)$ akurat należy do podprzestrzeni wektorowej rozpinanej przez wielomany $\mathbf{w}_i(x)$ w podprzestrzeni wszystkich wielomianów stopnia $r \leq 3$, a wielomian $\mathbf{u}(x)$ do niej nie należy (trochę z niej "wystaje").

Zadanie 1.4: Tworzą: dowolny wielomian stopnia trzeciego, który ma zawsze postać $\mathbf{v}(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d$ z jakimiś a, b, c i d, można zapisać jako ich kombinację liniową:

$$\mathbf{v}(x) = b\mathbf{w}_1(x) + c\mathbf{w}_2(x) + (d - b - c)\mathbf{w}_3(x) + (a - d)\mathbf{w}_4(x)\,.$$

Zatem $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ i $\mathbf{w}_4$ tworzą w p.w. wielomianów stopnia $r \leq 3$ maksymalny układ wektorów liniowo niezależnych bo nie można już do nich żadnego wektora dokooptować tak, by stworzyć większy układ liniowo niezależny.

Inny sposób dowiedzenia tego samego (skoro już wiemy, że wymiar p.w. wielomianów stopnia $r \leq 3$ wynosi 4 (bo jej bazą są np. cztery wielomiany $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 = x$, $\mathbf{e}_2 = x^2$ i $\mathbf{e}_3 = x^3$ - każdy wielomian stopnia $r \leq 3$ jest oczywistą kombinacją liniową tychże) jest sprawdzenie, że cztery wielomiany $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ i $\mathbf{w}_4$ są liniowo niezależne. Do tego wystarczy sprawdzić, że w równości

$$\lambda_1\mathbf{w}_1(x) + \lambda_2\mathbf{w}_2(x) + \lambda_3\mathbf{w}_3(x) + \lambda_4\mathbf{w}_4(x) = \mathbf{0}(x)\,,$$

($\mathbf{0}(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ jest wektorem zerowym p.w. wielomianów stopnia $r \leq 3$) wszystkie współczynniki λ_i musza być zerowe.

Zadanie 1.5: Aby macierze σ_i, $i = 0, 1, 2, 3$ były bazą p.w. dowolnych macierzy 2×2 o elementach z $\mathbb{C}$, musiałoby się dać tak dobrać współczynniki ξ^i, $i = 0, 1, 2, 3$, by zachodziła równość (z_{ij} są dowolnymi liczbami zespolonymi)

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \sigma_0\xi^0 + \sigma_1\xi^1 + \sigma_2\xi^2 + \sigma_3\xi^3 = \begin{bmatrix} \xi^0 + \xi^3 & \xi^1 - i\xi^2 \\ \xi^1 + i\xi^2 & \xi^0 - \xi^3 \end{bmatrix}.$$

Jeśli p.w. ma być rozpięta nad ciałem $\mathbb{R}$, to dopuszczamy tylko rzeczywiste współczynniki ξ^i i wtedy jest jasne, że równości

$$\begin{aligned} z_{11} &= \xi^0 + \xi^3\,, \qquad & z_{12} &= \xi^1 - i\xi^2\,, \\ z_{22} &= \xi^0 - \xi^3\,, \qquad & z_{21} &= \xi^1 + i\xi^2\,, \end{aligned}$$

nie da się spełnić, bo liczby z_{ij} mogą być czterema zupełnie dowolnymi liczami zespolonymi. Jeśli jednak ma to być p.w. nad $\mathbb{C}$, to równania te mają oczywiste rozwiązania

$$\xi^0 = \frac{1}{2}(z_{11} + z_{22})\,, \qquad \xi^3 = \frac{1}{2}(z_{11} - z_{22})\,, \qquad \xi^1 = \frac{1}{2}(z_{12} + z_{21})\,, \qquad \xi^2 = \frac{i}{2}(z_{12} - z_{21})\,.$$

Jeśli zaś macierze są hermitowskie, to ich elementy $z_{11} = z_{11}^*$ i $z_{22} = z_{22}^*$ są rzeczywiste, a $z_{12} = z_{21}^*$ i wtedy powyższe wzory dają rzeczywiste wszystkie współczynniki ξ^i; zatem macierze σ_i są bazą p.w. hermitowskich macierzy 2×2 rozpiętej nad ciałem $\mathbb{R}$.

Zadanie 1.6:

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 = -\mathbf{w}_1 + 5\mathbf{w}_2 - 3\mathbf{w}_3\,,$$

więc zapisane w formie kolumienkowej składowe te są równe

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{w bazie } \mathbf{f}_i\,, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{w bazie } \mathbf{w}_i\,.$$

Zadanie 1.7: Składowe zapisane, jak przystało w obłych nawiasach, to

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ a_2 - a_3 \\ a_1 - a_2 \\ a_0 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 1.8: Warunek ma postać $a + b + c \neq 1$. Kiedyś zrozumiemy, że wystarczyłoby utworzyć (stwiając je obok siebie na) z podanych wektorów macierz 3×3, obliczyć jej wyznacznik i zażądać, by nie był on równy zeru,

Zadanie 1.9: Oczywiście nie, bo ch$2x$=ch^2x+sh^2x, czyli wektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$.

Zadanie 1.10: Trochę jest rachunków. Ale można się zorientować, że trzy układy po trzy rówanania za każdym razem na trzy niewiadome, są w istocie tym samym jednym układem równań tylko liczby po prawej stronie się zmieniają. Np. gdy chcemy napisać $\mathbf{u}_1$ jako kombinację $x\,\mathbf{f}_1 + y\,\mathbf{f}_2 + z\,\mathbf{f}_3$, to musimy rozwiązać na x, y i z układ:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3\,, \\ 2x + 3y + 8z &= 5\,, \\ x + 3y + 2z &= 8\,. \end{aligned}$$

A jak będziemy wyrażać $\mathbf{u}_2$, to tylko liczby po prawej się zmienią na 5, 14 i 13. Więc Gaussowanie za każdym razem jest takie samo. W ten sposób znajdziemy

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= -27\,\mathbf{f}_1 + \;\;9\,\mathbf{f}_2 + \;\;4\,\mathbf{f}_3\,, \\ \mathbf{u}_2 &= -71\,\mathbf{f}_1 + 20\,\mathbf{f}_2 + 12\,\mathbf{f}_3\,, \\ \mathbf{u}_3 &= -41\,\mathbf{f}_1 + \;\;9\,\mathbf{f}_2 + \;\;8\,\mathbf{f}_3\,. \end{aligned}$$

Co zapisane w postaci macierzowej

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Macierz ta to $R_{(f\leftarrow u)}$.

Zadanie 1.11: No to trzeba od podstaw. Niech ta pierwotna baza to będą wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ (nic o niech wprawdzie nie wiemy, nie wiemy czum są, ale nazwać to je zawsze sobie jakoś możemy - a kto nam zabroni?). Wtedy

$$\mathbf{w} = 2\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4\,.$$

a te wektory co mają być nową bazą - niech się one nazywają $\mathbf{f}$ - to

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \;\;\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{f}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \;\;\mathbf{e}_2 + \;\;\mathbf{e}_3 + 2\,\mathbf{e}_4\,, \\ \mathbf{f}_3 &= \;\;\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 + 4\,\mathbf{e}_4\,, \\ \mathbf{f}_4 &= \qquad\;\;\; \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 + 3\,\mathbf{e}_4\,. \end{aligned}$$

Teraz jest jasne, że gdyby się dało te równania rozwiązać i wyrazić wektory $\mathbf{e}_i$ przez wektory $\mathbf{f}_i$, to, po pierwsze, wiedzielibyśmy, że te drugie też są bazą,[14] a po drugie. wstawilibyśmy tak wyrażone wektory $\mathbf{e}_i$ do wzoru dającego wektor $\mathbf{w}$ jako ich kombinację liniową i po przegrupowaniu odczytalibyśmy współczynniki przy kolejnych wektorach $\mathbf{f}_i$, które by były właśnie składowymi $\mathbf{w}$ w bazie wektorów $\mathbf{f}_i$.

[14]Gdyby bazą nie były, to nie dałoby się tych równań rozwiązać - widzieliśmy już (Zadanie 0.4), że nie zawsze układ równań liniowych, nawet n równań na n niewiadomych, którymi tu są wektory $\mathbf{e}_i$, ma rozwiązania.

Możemy jednak rozumować tak: ma być

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{f}_1 + \lambda_2 \mathbf{f}_2 + \lambda_3 \mathbf{f}_3 + \lambda_4 \mathbf{f}_4 \,.$$

i składowymi $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{f}_i$ będą te lambdy. Wstawmy do lewej strony $\mathbf{w}$ wyrażony przez $\mathbf{e}_i$, a do prawej wektory $\mathbf{f}_i$ wyrażone przez $\mathbf{e}_i$. Ponieważ wektory $\mathbf{e}_i$, jako wektory bazy, muszą być liniowo niezależne, współczynniki przy tych samych $\mathbf{e}_i$ po obu stronach muszą być sobie równe. To daje układ równań na lambdy

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

czyli układ

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \qquad &= 2\,, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 &= 3\,, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= 0\,, \\ 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 &= -1\,, \end{aligned}$$

który, można było z mety wypisać, wyrażając składowe wektora (zapisane tak jak w poprzednim równaniu) w bazie $\mathbf{e}_i$ jako kombinacje liniowe skłdowych wektorów nowej bazy w bazie $\mathbf{e}_i$. Byłoy to zaranieje ocziewidno, gdyby wszystko było sformułowane w $\mathbb{R}^4$ i te składowe wektorów $\mathbf{e}_i$ i $\mathbf{f}_i$ nie były składowymi, tylko po prostu "pięterkami" tych wektorów, traktowanych teraz jak "żywe"... No właśnie: cały ten kręciek algebraiczny przez to, że w gruncie rzeczy wszytskie przestrzenie wektorowe o tym samym skonczonym wymiarze n są izomorficzne $\mathbb{R}^n$ ale izomorfizmów "wkładających" daną V w $\mathbb{R}^n$ jest tyle ile można baz wybrać w V, tj. nieskończnenie wiele! lepiej niech Państwo tych moich uwag nie czytają, żeby sobie w głowach nie zamącić (na początek)... Jednak zawsze należy pamiętać, że żywy wektor, to nie to samo, co jego składowe!

Anyway, teraz już tylko rozwiązać ten układ równań, co pozostawiam Państwu, i wyznaczyć lambdy: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ i $\lambda_4 = -1$.

Zadanie 1.12: Po wyjaśnieniach w odpowiedzi do Zadania 1.10 to już proste: Mamy ($\mathbf{e}_i$ to są wektory tej bazy, w której podane są składowe wektorów)

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \,, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \,, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 \,,$$

Możemy to raz-dwa odkręcić i dostać:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_3 \,, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \,, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \,.$$

Jak to wstawimy do

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \,, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 \,, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \,,$$

To dostaniemy

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\,, \quad \mathbf{f}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,.$$

Zapisujemy to macierzowo:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stojąca tu macierz to $R_{(v \leftarrow f)}$.

Robiąc to samo tylko w drugą stronę znajdziemy, że

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

I teraz mamy tu macierz $R_{(f \leftarrow v)}$. W ramach samokontroli sprawdzamy, czy są to macierze odwrotne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2.1: 1. Nie. 2. Nie. 3. Nie. 4. Tak. 5. Tak. 6. Ogólnie nie, chyba, że suma jest równa zeru - wtedy tak. 7. Trzy razy tak, 8. Tak. 9. Nie, bo jeśli f jest niemalejąca, to λf jest nierosnąaca, jeśli $\lambda < 0$. 10. Tak, jeśli warunkiem jest $f(-1) = f(1) = 0$, ale nie,j eśli warunkiem jest $f(-1) = f(1) = 1$.

Zadanie 2.2: Jest to wektor zerowy.

Zadanie 2.3: To, że należą jest oczywiste, bo

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= 1 + 2\sin x \cos x = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_4\,, \\
\mathbf{v}_2 &= 1 - 2\sin x \cos x = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_4\,, \\
\mathbf{v}_3 &= -\cos 2x = \mathbf{t}_5\,, \\
\mathbf{v}_4 &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}\mathbf{t}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_5\,, \\
\mathbf{v}_5 &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}\mathbf{t}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{t}_5\,,
\end{aligned}$$

czyli wszystkie one są kombinacjami liniowymi wektorów rozpinających V. Co więcej, wszystkie one są kombincjami tylko $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_4$ i $\mathbf{t}_5$. Zatem rozpinają one tylko pewną podprzestrzeń podprzestrzeni V i wektory $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_4$ i $\mathbf{t}_5$ mogą być bazą tej podpodprzestrzeni.

Zadanie 2.4: Aby sprawdzić czy mogą być bazą, wystarczy zrealizować drugi punkt, czyli zobaczyć, czy dowolny wektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix},$$

można zpisać jako kombinację liniową czterech wektorów $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ponieważ się da:

$$\mathbf{v} = a\,\mathbf{f}_1 + (b-a)\,\mathbf{f}_2 + \frac{1}{2}(a-b+c+d)\,\mathbf{f}_3 + \frac{1}{2}(a-b+c-d)\,\mathbf{f}_4\,,$$

więc wektory $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Czy tworzą one też bazę przestrzeni $\mathbb{C}^4$, to zależy od tego, nad jakim ciałem ją rozpatrujemy, tzn. czy dopuszczamy tworzenie kombinacji liniowych wektorów z $\mathbb{C}^4$ z zespolonymi współczynnikami (i wtedy wektory $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ tworzą bazę tej przestrzeni wektorowej), czy dopuszczamy tylko kombinacje liniowe z rzeczywistymi współczynnikami. W tym drugim przypadku cztery wektory $\mathbf{f}_i$ nie tworzą bazy, bo wektorów które mają na "pięterkach" jakieś liczby zespolone nie da się dostać jako kombinacji liniowych wektorów $\mathbf{f}_i$ z rzeczywistymi współczynnikami (baza musi wtedy liczyć sobie 8 wektorów i conajmniej połowa z nich musi mieć na "pięterkach" jakieś zespoloności - ale to już informacja pozakonkursowa). W tych dwu przypadkach, w których wektory $\mathbf{f}_i$ tworzą bazę, składowe wektora $\mathbf{v}$ w tej bazie to oczywiście

$$\begin{pmatrix} a \\ b-a \\ \frac{1}{2}(a-b+c+d) \\ \frac{1}{2}(a-b+c-d) \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2.5: Rozwiązanie bynajmniej nie jest jednoznaczne. Do dwu liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ możemy dokooptować jakiś trzeci wektor, który będzie od nich liniowo niezależny, np.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{albo,} \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{albo} \quad \mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

(proszę sprawdzić, że każdy z nich z osobna jest liniowo niezależny od $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$) i każdy z nich może rozpinać podprzestrzeń X, o którą chodzi. Więc (nie zaczyna się zdania od więc!) podprzestrzeń X (za każdym razem jest to inna podprzestrzeń!) może być zadana przez podanie rozpinającego ją wektora $\mathbf{x}$ albo $\mathbf{x}'$ albo $\mathbf{x}''$ (albo jeszcze jakiegoś innego wektora, byle liniowo niezależnego od wektorów $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$). Jeśli weźmiemy $\mathbf{x}$, to alternatywnie można podprzestrzeń X zadać mówiąc, że należą do niej te wektory

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

z $\mathbb{R}^3$, w których $b = c = 0$. Ogólnie wektor, ogólnej postaci jak ten tu wyżej, który należy dokooptować nie może być kombinacją liniową $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$, tj. układ równań wynikający z

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

nie może mieć rozwiązań. Rozpisujemy to na pięterka

$$\begin{aligned} x + 2y &= a\,, \\ 2x + 3y &= b\,, \\ 3x - y &= c\,. \end{aligned}$$

Gaussujemy, tj. od drugiego odejmujemy dwa razy pierwsze, a od trzeciego trzy razy pierwsze i dostaniemy jako nowe drugie i trzecie $-y = -2a + b$ i $-7y = -3a + c$. Zatem układ nie ma rozwiązań jeśli tylko[15] te dwa równania są ze sobą sprzeczne. Inaczej, warunek jaki musi spełniać dokooptowywany wektor to[16] $11a - 7b + c \neq 0$. Tzn. musi to być wektor z konkretnymi liczbami a, b i c takimi, że $11a - 7b + c \neq 0$ (każdy z trzech zaproponowanych wyżej wektorów $\mathbf{x}$ lub $\mathbf{x}'$, lub $\mathbf{x}''$ spełnia ten warunek.) Dowolny taki wektor rozpina podprzestrzeń X, każdy trochę inną, ale każda z tych podprzestrzeni dopełnia W w sensie sumy prostej do całej p.w. $\mathbb{R}^3$, bo jeśli zapytamy o wektor $\mathbf{v}$ należący do przecięcia $X \cap W$, czyli dający się zapisać jako

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2\,, \quad \text{i zarazem jako} \quad \mathbf{v} = \lambda_3 \mathbf{x}\,,$$

to jedynym takim będzie wektor $\mathbf{0} = 0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 = 0\mathbf{x}$, bo gdyby jakieś lambdy były niezerowe, to by znaczyło, że wektor $\mathbf{x}$ nie jest liniowo nie zależny od $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ (równanie $\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 - \lambda_3 \mathbf{x} = \mathbf{0}$ miałoby nietrywialne rozwiązanie).

Zadanie 2.5′: Wektory - nazwijmy je $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ - rozpinające V to

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

(wystarczy położyć raz $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$, a drugi raz $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$ oba te zestawy liczb spełniają zadające podprzestrzeń V równanie $x - y + z = 0$. Z kolei pisząc

[15] Pierwsze równanie się już nie liczy, bo jakbyśmy znaleźli y spełniający te dwa, to sobie dobierzemy x, żeby pierwsze spełnić też.

[16] Jak już dojdziemy w algebrze dalej, to się stanie jasne, że warunek ten możnaby było dostać natychmiast żądając, by wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & b \\ 3 & -1 & c \end{vmatrix},$$

nie był równy zeru.

ogólny wektor mależący do U w postaci

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c = f(a,b) \end{bmatrix},$$

i rozwiązując równania $2x_1 + x_2 = a$, $x_2 - 2x_2 = b$ znajdujemy: $x_1 = \frac{1}{5}(2a + b)$, $x_2 = \frac{1}{5}(a - 2b)$. Wstawiamy te x_1 i x_2 do dolnego pięterka i mamy $\frac{1}{5}(a - 7b) = c$. Wektory $[a, b, c]$ z U spełniają więc jedno równanie $a - 7b - 5c = 0$.

Sprawdzenie, czy $U + V$ jest całą przestrzenią polega na zobaczeniu ile z wektorów rozpinających te przestrzenie jest liniowo niezależnych. Przestrzeń U rozpinają dwa $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$, bo giłym okiem widać, że $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Z czterech wektorów $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ oraz $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ conajwyżej trzy mogą być liniowo niezależne i tyle ich musi być, by $U+V = \mathbb{R}^3$. Działając trochę "na czuja" można standardowo sprawdzić, że $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ i $\mathbf{v}_1$ rzeczywiście są liniowo niezależne, co załatwia sprawę. Ponieważ $\mathrm{dim}U = 2$ i $\mathrm{dim}V = 2$, a $\mathrm{dim}(U + V) = 3$, jest jasne, że podprzestrzeń $U \cap V$ jest jednowymiarowa, czyli rozpina ją jeden wektor. Ponieważ ma on należć i do U i do V musi zachodzić równość

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ -x_2 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x + y \end{bmatrix}.$$

Z równości górnych pięterek mamy (już to rozwiązaliśmy przecież!) $x_1 = \frac{1}{5}(2x + y)$, $x_2 = \frac{1}{5}(x - 2y)$. To wstawiamy do dolnego pięterka wektora po lewej i mamy do spełnienia równość (znów to co po lewej już znaleźliśmy wcześniej!) $\frac{1}{5}(x - 7y) = -x + y$, która wymaga, by $x = 2y$. Zatem podprzestrzeń $U \cap V$ jest rozpinana przez wektor (kładziemy np. $x = 2$, $y = 1$) $[2, 1, -1]$, tzn. po prostu $\mathbf{u}_1$ rozpinający U jednocześnie od razu należy do V. W sposób uwikłany też zadać $U \cap V$ łatwo: po prostu do równania $x - y + z = 0$ (spełnianego przez wektory z V) wystarczy dołączyć równanie $x = 2y$ zapewniające, że wektor będzie także naleał do U.

Zadanie 2.6: Trzeba zobaczyć ile jest wektorów liniowow niezależnych wśród tych pięciu, co rozpinają podprzestrzeń W (dokładniej się wyrażając: jaki maksymalnie liczny układ liniowo niezależnych wektorów można wybrać ze zbioru tych pięciu). To można zrobić metodą redukcji kolumnowej. Np. tak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(W pierwszym kroku - pierwsza strzałka - taka wielokrotność czwartej kolumny została odjęta od każdej z pozostałych kolumn, by wyzerować jej pierwsze "pięterko"; potem pierwsza kolumna została dodana do drugiej; wreszcie ostatnia kolumna pomnożona przez

2 została odjęta od trzeciej). W rezultacie dostaliśmy dwi kolumny całkowicie zerowe, co oznacza, że wektory $\mathbf{w}_2$ i i $\mathbf{w}_3$ były liniowo zależne od pozostałych trzech. Te trzy pozstałe tworzą już układ liniowo niezależny (widać mniej wiecej gołym okiem). Zatem wymiar podprzestrzeni W jest równy 3. Dowolny wektor z tej podprzestrzeni można napisać np. w postaci

$$\alpha\,\mathbf{w}_1 + \beta\,\mathbf{w}_4 + \gamma\,\mathbf{w}_5 = \alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\\1\end{bmatrix},$$

z dowolnymi rzeczywistymi α, β i γ, albo

$$a\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$

z dowolnymi rzeczywistymi a, b i c. Bazę podprzestrzeni W mogą więc tworzyć wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$, albo te trzy stojące przy współczynnikach a, b i c powyżej. Można oczywiście utworzyć i inne bazy tej podprzestrzeni.

Zadanie 2.7: Gdyby suma prosta U i V była sumą prostą, to wszystkie te cztery wielomiany: $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$, $\mathbf{v}_1(x)$ i $\mathbf{v}_2(x)$, tworzyłyby układ wektorów liniowo niezależnych. Aby to sprawdzić, najlepiej jest przetworzyć pytanie o liniową niezależność wielomianów w układ równań

$$\lambda_1\mathbf{u}_1(x) + \lambda_2\mathbf{u}_2(x) + \lambda_3\mathbf{v}_1(x) + \lambda_4\mathbf{v}_2(x) = \mathbf{0}(x)\,,$$

czyli (bo współczynniki przy x^3, x^2, x i 1 musiałyby się zerować) w pytanie, czy układ

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\,,\\
\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \qquad\; &= 0\,,\\
\lambda_1 + \lambda_2 \qquad\quad + \lambda_4 &= 0\,,\\
\lambda_2 \;\; + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\,,
\end{aligned}$$

ma jakieś rozwiazanie z niezerowymi lambdami. Po odjęciu pierwszego od drugiego i trzeciego (eliminacja λ_1) i po wyeliminowaniu potem λ_2 z drugiego i czwartego za pomocą trzeciego, drugie i czwarte staną się tym samym równaniem $2\lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Niezerowym rozwiązaniem jest więc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -2$. Zatem wymiar sumy algebraicznej podprzestrzeni $U + V$ wynosi 3, bo sumę tę rozpinają trzy wektory, np. $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$, i $\mathbf{v}_1(x)$ i one mogą być jej bazą. A zatem, ponieważ $\dim V + \dim U = \dim(V + U) + \dim V \cap U$, wymiar przecięcia $V \cap U$ musi być równy 1, czyli przecięcie to nie składa się tylko z wektora zerowego. Suma $U + V$ nie jest więc sumą prostą.

Zadanie 2.8:
a) Np. $2x_1 + x_2 = 0$ i $2x_3 + x_2 = 0$ - zakładamy, że ogólny wektor z $\mathbb{R}^3$ piszemy w postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

b) Żadnych układów równań: tę podprzestrzeń $\mathbf{R}^2$ rozpinają dwa liniowo niezależne wektory.

Zadanie 2.9:
a) Należałoby najpierw sprawdzić, jaki jest wymiar podprzestrzeni U, tzn. czy wszystkie trzy wektory ją rozpinające są liniowo niezależne. Gołym okiem widać, że nie są, bo trzeci jest sumą perwszego i drugiego. Ale można tego nie sprawdzać bo i tak wyjdzie to "w praniu". Jeśli cztery pięterka wektora z $\mathbb{R}^4$ oznaczymy x, y, z i t, to widać, że wektor należący do U ma: $x = a + b + 2c$, $y = -a + b$, $z = a + c$ oraz $t = b + c$, gdzie a, b i c to współczynniki kombinacji liniowej trzech wektorów rozpinających U. Zatem z dwu ostatnich związków: $a = z - c$ i $b = t - c$. To wstawione do drugiego i pierwszego da $y = -z + t$ i $x = z + t$ (c się, jak widać, ulotniło). Zatem podprzestrzeń U definiują te właśnie dwa równania liniowe: $y + z - t = 0$ i $x - z - t = 0$. Ponieważ są to dwa liniowo niezależne[17] równania jednorodne, więc redukują one o dwa wymiar podprzestrzeni U w stosunku do wymiaru $\mathbb{R}^4$. A skoro $\dim U = 2$, to musi być ona rozpinana przez dwa tylko wektory, a nie trzy - jeden więc z trzech podanych w treści musiał być kombinacją liniową dwóch pozostałych.
b) Tu pięterka wektorów z $\mathbb{R}^5$ oznaczymy już[18] $x_1, x_2, \ldots, x_5$ i analogicznie jak w a) mamy

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b + 3c\,, \\ x_2 &= -a + b + c\,, \\ x_3 &= a + c\,, \\ x_4 &= -a - c\,, \\ x_5 &= a + 3b + 7c\,. \end{aligned}$$

I teraz z ostatniego $a = x_5 - 3b - 7c$, to do pierwszych czterech, potem z czwartego wyznaczamy b i do pozostałych itd. Wyjdzie, że wektor należący do W ma postać

$$\begin{bmatrix} (-2x_4 + x_5)/3 \\ (4x_4 + x_5)/3 \\ -x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

[17] Trochę jak u Lema z tym sepulkowaniem: "sepulki" patrz "sepulkowanie"; "sepulkowanie" patrz "sepulki" - znów jakaś liniowa niezależność, równań tym razem.

[18] W $\mathbb{R}^4$ było x, y, z, i t żeby była analogia ze szczególną teorią wzgledności; wprawdzie teraz się rozpatruje czsoprzestrzenie mające 5 albo i więcej wymiarów, ale to już dla koneserów tylko.

z dowolnymi x_4 i x_5. Układ równań definiujący podprzestrzenń W to $3x_2+2x_4-x_5=0$, $3x_2-4x_4-x_6=0$ i $x_3+x_4=0$ (proszę sprawdzić. że każdy z rozpinających W wektorów m aliczby spełniające te warunki). Przy okazji znów w praniu wyszło, że $\dim W=2$ (tylko dwa niezależne x-y; albo inaczej: trzy warunki) więc znów trzy podane wektory rozpinające W musiały być liniowo zależne. I były: trzeci to pierwszy plus dwa razy drugi.

Zadanie 2.10: Podprzestrzeń V jest dwuwymiarowa, bo $\mathbf{v}_1=\frac{1}{2}(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)$. Jej bazą mogą być dowolne dwa z tych trzech wektorów; np. $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Z kolei trzy wektory $\mathbf{w}_i$ rozpinające W są liniowo niezależne. Zatem $\dim W=3$ i za jej bazę można wziąć właśnie wektory $\mathbf{w}_i$, $i=1,2,3$. Z kolei łatwo sprawdzić, że

$$\mathbf{v}_1=\frac{1}{5}(2\,\mathbf{w}_2+\mathbf{w}_3)\,,\qquad \mathbf{v}_2=\frac{1}{5}(-4\,\mathbf{w}_2+3\,\mathbf{w}_3)\,.$$

Zatem $V\subset W$ z czego też wynika, iż $V+W=W$, a $V\cap W=V$. Stąd za bazę $V\cap W$ można wziąć dwa wektory $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$, albo dwa wektory $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$.

Zadanie 2.11: Conajmniej jeden wektor z podanych sześciu musi być liniowo zależny od pozostałych. Ale może takich jest więcej? Tu już tak prosto jak w zadaniu 2.9 nie widać. Trzeba popracować. Piszemy więc ogólną kombinację liniową wszystkich sześciu wektorów $x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3+x_4\mathbf{w}_1+x_5\mathbf{w}_2+x_6\mathbf{w}_3=\mathbf{0}$. Daje to układ równań:

$$\begin{aligned}
x_1-2x_2-3x_3+x_4+2x_6&=0\,,\\
6x_1+3x_2+6x_3+x_4-2x_5&=0\,,\\
4x_1+5x_3+2x_4+2x_6&=0\,,\\
7x_1+5x_2+6x_3+x_4-x_5+x_6&=0\,,\\
-2x_1-2x_2-5x_3-x_4-5x_5-3x_6&=0\,.
\end{aligned}$$

Wykorzystujemy czwarte równanie, by wyGaussować zmienną x_5:

$$\begin{aligned}
x_1-2x_2-3x_3+x_4+2x_6&=0\,,\\
-8x_1-7x_2-6x_3-x_4-2x_6&=0\,,\\
4x_1+5x_3+2x_4+2x_6&=0\,,\\
-37x_1-27x_2-35x_3-6x_4-8x_6&=0\,.
\end{aligned}$$

Teraz z kolei wykorzystujemy trzecie, by wyGaussować zmienną x_6:

$$\begin{aligned}
-3x_1-2x_2-8x_3-x_4&=0\,,\\
-4x_1-7x_2-x_3+x_4&=0\,,\\
-21x_1-27x_2-15x_3+2x_4&=0\,.
\end{aligned}$$

Wreszcie, wykorzystując pierwsze eliminujemy zmienną x_4:

$$\begin{aligned}
-7x_1-9x_2-9x_3&=0\,,\\
-27x_1-31x_2-31x_3&=0\,.
\end{aligned}$$

Teraz już widać, że w obu występuje kombinacja x_2+x_3, więc równania te nie są sprzeczne tylko, gdy $x_1 = 0$. Wtedy można je spełnić biorąc $x_2 = \lambda$, $x_3 = -\lambda$. No i teraz jadąc zurück znajdujemy, że $x_4 = 6\lambda$, $x_5 = \frac{3}{2}\lambda$ i $x_6 = -\frac{7}{2}\lambda$. Zatem wektor $\mathbf{v}_1$ jest liniowo niezależny od pozostałych, a te pozostałe spełniają relację

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + 6\,\mathbf{w}_1 + \frac{3}{2}\,\mathbf{w}_2 - \frac{7}{2}\,\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}\,.$$

Zatem rzeczywiście tylko jeden z pięciu wektorów jest liniowo zależny od pozostałych. Wynika z tego wszystkiego, iż trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ rozpinające podprzestrzeń V tworzą układ liniowo niezależny (a zatem tworzą jej bazę) i stąd $\dim V = 3$. Podobnie i trzy wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$ rozpinające podprzestrzeń W tworzą układ liniowo niezależny (i też tworzą jej bazę) i $\dim W = 3$. Jednak suma $V + W = \mathbb{R}^5$ jest rozpinana tylko przez pięć wektorów więc $V \cap W$ jest podprzestrzenią jedowymiarową. Jako jej bazę możemy wziąć np. wektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = -6\,\mathbf{w}_1 - \frac{3}{2}\,\mathbf{w}_2 + \frac{7}{2}\,\mathbf{w}_3\,.$$

Zadanie 3.1: Żywe wektory $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ można zapisać na dwa sposoby

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\,, \\ \mathbf{v} &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = 3\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2\,, \end{aligned}$$

bo taki jest właśnie sens liczb zwanych składowymi wektora w bazie i podanych w obłych nawiasach. Mamy więc dwie równości pozwalające wyznaczyć albo $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ jako kombinacje liniowe $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$, albo na odwrót. Rozwiązujemy metodami szkolnymi i znajdujemy:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\,, \qquad \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1\,.$$

A w drugą stronę:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_2\,, \qquad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\,.$$

Składowe wektora $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ możemy znaleźć "na piechotę", podstawiając tu $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ wyrażone przez $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$, co da

$$\mathbf{w} = (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) + \mathbf{f}_1 = 2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\,.$$

Czyli szukanymi składowymi są $(2, 1)$.

Możemy też dostać macierze zmiany bazy: zapisując pierwsze z rozwiązań ($\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ wyrażone przez $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$) w notacji

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

którą należy czytać tak, że aby dostać $\mathbf{e}_1$, przykładamy $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ do pierwszej kolumy macierzy i sumujemy, żeby zaś dostać $\mathbf{e}_2$, przykładamy $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ do drugiej kolumy macierzy i sumujemy. Macierz tu stojąca, to $R_{(f\leftarrow e)}$ (w wymyślonej przeze mnie, najlepszej na świecie notacji). Analogicznie możemy w drugą stronę

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ta tu macierz, to z kolei $R_{(e\leftarrow f)}$.

Jeśli mamy wątpliwości, która z tych macierzy przerabia dane w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ składowe wektora (np. wektora $\mathbf{w}$) na jego składowe w bazie $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, to moja notacja prowadzi, jak po sznurku: strzałka pokazuje z której bazy do której! Zatem bierzemy $R_{(f\leftarrow e)}$ i działamy nią na składowe wektora $\mathbf{w}$ w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tak jak to już wcześniej dostaliśmy.

Zadanie 3.2: W podanej kolejności:

$$a)\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix},$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 5 \\ 8 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad d)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e)\quad \begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{pmatrix},$$

a w odwrotnej kolejności:

$$a)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 3 & -17 \end{pmatrix},$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad d)\quad \begin{pmatrix} -17 & -34 & -51 \\ -17 & -34 & -51 \\ 17 & 34 & 51 \end{pmatrix}.$$

W przypadku $e)$ nie da się, bo macierze w drugą stronę do siebie "nie pasują".

Zadanie 3.3:

$$a)\quad \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c)\quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3.4: F jest liniowe. G nie. Macierz F w bazie kanonicznej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Macierz w bazie $\mathbf{v}_i$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Składowe w bazie $\mathbf{v}_i$ wektora będącego obrazem $\mathbf{u}$: $(-5, 2, 4)$.

Zadanie 3.5: Odwzorowanie to jest liniowe. Macierz tworzymy według standardowego przepisu: działamy na wektory bazy i rozkładamy to co wyszło w bazie tej drugiej przestrzeni"

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_0) &= (2+x)\cdot 1 = 2+x = 2\,\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1\,, \\ F(\mathbf{e}_1) &= (2+x)\cdot x = 2x + x^2 = 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\ F(\mathbf{e}_2) &= (2+x)\cdot x^2 = 2x^2 + x^3 = 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Macierz tworzymy stawiając obok siebie "na sztorc" współczynniki rozkładów:

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I już.

Zadanie 3.6: Potrzebne macierze zmiany bazy mają postacie

$$R_{(e\leftarrow v)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad R_{(v\leftarrow e)} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix},$$

(pierwsza jest "za darmo", drugą znajdujemy wyrażając wektory $\mathbf{e}_i$ przez wektory $\mathbf{v}_i$). Zatem

$$F_{(v)(v)} = R_{(v\leftarrow e)}\cdot F_{(e)(e)}\cdot R_{(e\leftarrow v)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3.7: Zadanie to można rozwiązać różnie. Można np. uznać, że w bazie $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ przestrzeni V i bazie $\mathbf{w}_i$ przestrzeni W macierz $F_{(w)(v)}$ jest podana w treści zadania

$$F_{(w)(v)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

i następnie przejść do bazy $\mathbf{e}_i$ zgodnie ze wzorem $F_{(w)(e)} = F_{(w)(v)} \cdot R_{(v\leftarrow e)}$. Tu jednak rozwiążemy je "na pałę" pisząc

$$F_{(w)(a)} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix},$$

i przystawiając do tej macierzy kolejno kolumienki $(1,1,1)$, $(1,2,-1)$, $(-1,1,0)$ i żądając, by wychodziło kolejno $(3,2,2)$, $(-1,1,4)$, $(-1,1,-3)$. Da to trzy układy równań na trzy niewiadome każdy. Np. górne wiersze macierzy dadzą układ

$$\begin{aligned} a + \ \ b + c &= \ 3\,, \\ a + 2b - c &= -1\,, \\ -a + \ \ b \quad\ \ &= -1\,. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu tych trzech układów znajdujemy

$$F_{(w)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście to samo wyjdzie pierwszą metodą:

$$F_{(w)(a)} = F_{(w)(v)} \cdot R_{(v\leftarrow e)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3.8: Mamy

$$a_1 x + a_0 = (-2a_0 + 7a_1)(x+3) + (a_0 - 3a_1)(2x+7)\,.$$

więc, korzystając z linowości,

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 x + a_0) &= (-2a_0 + 7a_1)\,\varphi(x+3) + (a_0 - 3a_1)\,\varphi(2x+7) \\ &= (-2a_0 + 7a_1)(-x^2 + 5x + 4) + (a_0 - 3a_1)(5x^2 - 3) \\ &= (7a_0 - 22a_1)x^2 + (-10a_0 + 35a_1)x - 11a_0 + 37a_1\,. \end{aligned}$$

Macierz odwzorowania w bazach kanonicznych to

$$\varphi_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} -11 & 37 \\ -10 & 35 \\ 7 & -22 \end{pmatrix}.$$

Podprzestrzeń imφ przestrzeni $W_{(2)}$ rozpinają np. wielomiany (obrazy wielomianów $x+3$ i $2x+7$, które to obrazy są liniowo niezależne) $-x^5 + 5x + 4$ oraz $5x^2 - 3$. Podprzestrzń Y może rozpinać każdy wielomian stopnia nie wyższego niż 2, który jest od tych dwóch liniowo niezależny. np. wielomian x albo $2x-1$. Każdy z takich wielomianów (byle nie proporcjonalne do siebie) rozpina trochę inną podprzestrzeń Y, ale zawsze $\mathrm{im}\varphi \oplus Y = W_{(2)}$.

Zadanie 3.9: Można to rozwiązywać na różne sposoby (wszystkie one są w gruncie rzeczy tym samym, tylko inaczej zapisywanym). Możemy znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_0(x)=1$, $\mathbf{e}_1(x)=x$, $\mathbf{e}_2(x)=x^2$. Potrzebne macierze zmiany bazy to

$$(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)\,\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-2&5\\-1&2&-1\\1&2&-3\end{pmatrix}.$$

Pierwsza macierz to $R_{(e\leftarrow v)}$, a druga to $R_{(v\leftarrow e)}$. Zatem

$$F_{(e)(e)}=R_{(e\leftarrow v)}\cdot F_{(v)(v)}\cdot R_{(v\leftarrow e)}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&2&-1\\1&-2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

(macierz $F_{(v)(v)}$ mnożąc stojącą z jej prawej strony macierz $R_{(v\leftarrow e)}$ po prostu stawia "do góry nogami" jej kolumny). Teraz możemy podziałać otrzymaną macierzą $F_{(e)(e)}$ na kolumienkę (a_0,a_1,a_2) i dostać $(a_0-a_1+2a_2,\ a_1,\ a_1-a_2)$. Czyli

$$F(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0-a_1+2a_2)+a_1x+(a_1-a_2)x^2\,.$$

To samo możnaby dostać pisząc

$$\begin{aligned}1=\mathbf{e}_0&=\frac{1}{4}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)\,,\\ x=\mathbf{e}_1&=\frac{1}{2}(-\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)\,,\\ x^2=\mathbf{e}_2&=\frac{1}{4}(5\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2-3\mathbf{v}_3)\,,\end{aligned}$$

i korzystając bezpośrednio z liniowości: np.

$$F(\mathbf{e}_1)=-\frac{1}{2}F(\mathbf{v}_1)+\frac{1}{2}F(\mathbf{v}_2)+\frac{1}{2}F(\mathbf{v}_3)=x^2+x-1\,,$$

i widać, że to to samo, co daje ogólny wzór po podstawieniu doń $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=0$.

Zadanie 3.10: Jeśli próbujemy wyrazić czwartą kolumnę $\mathbf{C}_4$ (można ją potraktować jak żywy wektor z $\mathbb{R}^5$) przez pozostałe, tj. napisać: $x_1\mathbf{C}_1+x_2\mathbf{C}_2+x_3\mathbf{C}_3+x_5\mathbf{C}_5=\mathbf{C}_4$, to dostaje się do rozwiązania układ równań:

$$\begin{aligned}2x_1+2x_2+\ x_3+\ x_5&=2\,,\\ x_1+\ x_2\ +x_3\ +x_5&=2\,,\\ x_1+2x_2+2x_3\ +x_5&=2\,,\\ x_1+2x_2\ +x_3\ +x_5&=1\,,\\ x_1+2x_2\ +x_3+2x_5&=2\,.\end{aligned}$$

Możemy teraz poGaussować tj. wyeliminować wykorzystując do tego celu wiersz drugi (bo najprostszy) x_5 z pozosta ych równań. Dostaniemy z w wyniku tego równania: $x_1+x_2=0$, $x_2+x_3=0$, $x_2=-1$ i $-x_1-x_3=-2$. Stąd już widać, że jest rozwiązanie (jednoznaczne, więc kolumny $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_5$, już są liniowo niezależne) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_5=1$. Zatem jądro rozpina wektor

$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5\,,$$

a ponieważ kolumny $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_5$ są liniowo niezależne, obraz im$A$ mogą rozpinać obrazy wektorów $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ i $\mathbf{e}_5$, czyli wektory

$$\begin{aligned}
\mathbf{o}_1 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5\,,\\
\mathbf{o}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + 2\,\mathbf{e}_4 + 2\,\mathbf{e}_5\,,\\
\mathbf{o}_3 &= \ \ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5\,,\\
\mathbf{o}_4 &= \ \ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + 2\,\mathbf{e}_5\,.
\end{aligned}$$

Zadanie 3.11: Szukana macierz to $R_{(g\leftarrow w)}\cdot F_{(w)(v)}\cdot R_{(v\leftarrow u)}$. Mamy

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Pierwsza macierz to $R_{(v\leftarrow u)}$, a druga to $R_{(w\leftarrow g)}$. Trzeba więc znaleźć odwrotność tej drugiej:

$$R_{(g\leftarrow w)} = [R_{(w\leftarrow g)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$F_{(g)(u)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Jądro tworzy oczywiście tylko wektor zerowy (bo kolumny macierzy - ani w jednej bazie, ani w drugiej - nie są do siebie proporcjonalne), a obraz rozpinają np. wektory $F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2 + 5\mathbf{w}_3$ i $F(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 + 6\mathbf{w}_3$, albo $F(\mathbf{u}_1) = -2\mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2 + 5\mathbf{g}_3$ i $F(\mathbf{u}_2) = -4\mathbf{g}_1 - 4\mathbf{g}_2 + 11\mathbf{g}_3$, albo jakieś inne dwie liniowo niezależne kombinacje tychże.

Zadanie 3.12: Żeby jądrem był podany wektor $\mathbf{j}$ o składowych (w bazie $\mathbf{v}_i$) - dla oszczędności miejsca "na płask" $(1,1,-1)$, trzecia kolumna macierzy $F_{(w)(v)}$ musi być sumą pierwszej i drugiej. Z kolei każdy wektor W, który jest obrazem wektora $\mathbf{u} = \mathbf{v}_i u^i_{(v)}$ z V ma postać kombinacji $\mathbf{w}_j [F_{(w)(v)}]^j{}_i u^i_{(v)}$, w której $u^i_{(v)}$ są składowymi jakichkolwiek wektorów nieproporcjonalnych do $\mathbf{j}$ (tj. kolumienka $(u^1_{(v)}, u^2_{(v)}, u^3_{(v)})$ nie jest proporcjonalna do

$(1,1,-1)$). Wektory takie muszą więc rozpinać w W tę samą podprzestrzeń, co wektory $\mathbf{o}_1$ i $\mathbf{o}_2$, czyli im$F$. Można np. wziąć jako $u^i_{(v)}$ $(1,0,0)$ i $(0,1,0)$ i powiedzieć że pierwszego obrazem jest $\mathbf{o}_1$, a drugiego $\mathbf{o}_2$. Macierz spełniająca postawione warunki będzie miała wtedy postać

$$F_{(w)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nie jest to oczywiście jedyna możliwa taka macierz. Aby podać najogólniejszą postać macierzy odwzorowania zgodnej z podanymi o nim informacjami, rozpatrujemy problem w bazie $(\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \equiv (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{j})$ przestrzeni V i bazie $(\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3) \equiv (\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{w}_3)$ przestrzeni W (trzeci wektor tej bazy, jak i dwa pierwsze bazy przestrzeni V są wybrane dowolnie - muszą one tylko dopełniać układ wektorów do bazy). W tych bazach najogólniejszym odwzorowaniem F spełniającym podane warunki jest

$$\begin{aligned} F(\mathbf{j}_1) &= \mathbf{o}_1 f^1{}_1 + \mathbf{o}_2 f^2{}_1\,, \\ F(\mathbf{j}_2) &= \mathbf{o}_1 f^1{}_2 + \mathbf{o}_2 f^2{}_2\,, \\ F(\mathbf{j}_1) &= \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

przy czym wektory $\mathbf{o}_1 f^1{}_1 + \mathbf{o}_2 f^2{}_1$ i $\mathbf{o}_1 f^1{}_2 + \mathbf{o}_2 f^2{}_2$ nie mogą być liniowo zależne,[19] co sprowadza się do warunku $f^1{}_1 f^2{}_2 - f^1{}_2 f^2{}_1 \neq 0$. W tych bazach macierz odzorowania F skostruowana zgodnie ze standardowym przepisem ma postać

$$F_{(o)(j)} = \begin{pmatrix} f^1{}_1 & f^1{}_2 & 0 \\ f^2{}_1 & f^2{}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teraz trzeba tylko przekonwertować tę postać macierzy do wyjściowych baz. Od ręki możemy napisać

$$(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

i macierz tu stojąca to jest macierz $R_{(v\leftarrow j)}$, ale potrzebna nam jest macierz $R_{(j\leftarrow v)}$. Odwracamy (rozwiązując względem $\mathbf{v}_i$ prościutki układzik równań) i mamy[20]

$$R_{(j\leftarrow v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

[19] Gdyby były liniowo zależne, tj. gdyby $\mathbf{o}_1 f^1{}_1 + \mathbf{o}_2 f^2{}_1 = \alpha(\mathbf{o}_1 f^1{}_2 + \mathbf{o}_2 f^2{}_2)$ to by znaczyło, że $F(\mathbf{j}_1) - \alpha F(\mathbf{j}_2) = F(\mathbf{j}_1 - \alpha\,\mathbf{j}_2) = \mathbf{0}$, czyli że wektor $\mathbf{j}_1 - \alpha\,\mathbf{j}_2$, który jest liniowo niezależny od $\mathbf{j}_3 \equiv \mathbf{j}$, też należałby do jądra, ale przecież tylko $\mathbf{j} = \mathbf{j}_3$ miał rozpinać jądro!

[20] Akurat tu jest zabawnie, bo $R_{(j\leftarrow v)} = R_{(v\leftarrow j)}$ macierz ta jest sama swoją odwrotnością.

Potrzebna jest też macierz $R_{(w\leftarrow o)}$ i tę mamy już za darmo:

$$(\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

- macierz tu stojąca to jest właśnie $R_{(w\leftarrow o)}$. Teraz już tylko wymnożyć macierze:

$$\begin{aligned} F_{(w)(v)} = R_{(w\leftarrow o)} \cdot F_{(o)(j)} \cdot R_{(j\leftarrow v)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1{}_1 & f^1{}_2 & 0 \\ f^2{}_1 & f^2{}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1{}_1 & f^1{}_2 & f^1{}_1 + f^1{}_2 \\ f^2{}_1 & f^2{}_2 & f^2{}_1 + f^2{}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f^1{}_1 & f^1{}_2 & f^1{}_1 + f^1{}_2 \\ f^1{}_1 - f^2{}_1 & f^1{}_2 - f^2{}_2 & f^1{}_1 - f^2{}_1 + f^1{}_2 - f^2{}_2 \\ 2f^1{}_1 + 3f^2{}_1 & 2f^1{}_2 + 3f^2{}_2 & 2f^1{}_1 + 3f^2{}_1 + 2f^1{}_2 + 3f^2{}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dowolne cztery liczby $f^1{}_1$, $f^1{}_2$, $f^2{}_1$ i $f^2{}_2$, byle takie, że $f^1{}_1 f^2{}_2 \neq f^1{}_2 f^2{}_1$, dają macierz odwzorowania spełniającego warunki zadania. I tak jak miało być, ostatnia kolumna jest zawsze suma dwóch pierwszych.

Zadanie 3.13: W podanej bazie składowe wektorów należących do jądra muszą być proporcjonalne do $(1, -2, 2)$. Zatem jądro jest jednowymiarową podprzestrzenią rozpiętą przez wektor-wielomian

$$\mathbf{j}(x) = (x^2 + x + 1) - 2(x^2 + 2x - 1) + 2(x + 2) = -x^2 - x + 7\,.$$

Kolumny: pierwsza i druga macierzy $T_{(v)(v)}$ są liniowo niezależne więc obraz jest podprzestrzenią dwuwymiarową rozpiętą przez wielomany-wektory $\mathbf{o}_1 = 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{o}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$, czyli

$$\mathbf{o}_1(x) = 4x^2 + 6x\,, \qquad \mathbf{o}_2(x) = 3x^2 + 7x + 3\,.$$

Z kombinacji liniowej tych wektorów nie można dostać wektora $\mathbf{j}$ więc przecięcie im$T$ i ker$F$ składa się tylko z wektora zerowego. Zatem im$T$+ker$F$ jest sumą prostą.

Zadanie 3.14: Wektory, na których zadane jest odwzorowanie G nie są liniowo niezależne: $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$. Rozpinają one w $\mathbb{R}^3$ tylko dwuwymiarową podprzestrzeń; jak G działa na wektory nie należące do tej podprzestrzeni nie da się powiedzieć. Przeto nie da się też podać macierzy tego odwzorowania. Jedynie w bazie $\mathbb{R}^3$, której dwoma wektorami są $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ (lub jakieś dwie inne linowo niezależne ich kombinacje), i bazie, której dwoma wektorami są $\mathbf{g}_1 = G(\mathbf{v}_1)$ i $\mathbf{g}_2 = G(\mathbf{v}_2)$, można coś o macierzy odwzorowania G powiedzieć; jeśli tymi bazami są $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_{3'})$ i $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_{3'})$ (wektorki o primowanych numerkach są jakimiś dopełniającymi te układy do baz), to

$$G_{(g)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix},$$

Pytajniki oznaczają elementy, o których nic na podstawie danych nie wiemy. Jednak jak się okazuje $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3$ więc

$$G(\mathbf{w}) = 2\,G(\mathbf{v}_1) - 2\,G(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4.1: Zadanie wygląda na dziwne, ale można je rozkminić. Po pierwsze zobaczmy, jak wygląda jądro i obraz odwzorowania F. Najpierw jądro. Zażądajmy by należał do niego wektor $\mathbf{v}_1 a + \mathbf{v}_2 b + \mathbf{v}_3 c + \mathbf{v}_4 d$. Rozwiązujemy więc układ równań

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daje to układ równań, który jak się łatwo zorientować jest de facto układem dwóch równań $a + b - d = 0$ i $b + 2c = 0$ na cztery współczynniki. Zatem $\dim(\ker F) = 2$, a jako wektory rozpinające jądro można wziąć wektory (kładziemy $b = 2$, $c = -1$, co załatwia drugie równanie, a żeby spełnić pierwsze raz bierzemy $a = -2$, $d = 0$, a drugi raz $a = 0$, $d = 2$)

$$\mathbf{j}_3 = -2\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\,, \qquad \mathbf{j}_4 = 2\,\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + 2\,\mathbf{v}_4\,.$$

Z tego, że $\dim(\ker F) = 2$ wynika też, że $\dim(\mathrm{im} F) = 2$, bo $\dim(\mathrm{im} F) = \dim V - \dim(\ker F)$. Jako wektory rozpinające obraz możemy np. wziąć

$$F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + 3\,\mathbf{w}_3\,, \qquad F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + 2\,\mathbf{w}_2 + 4\,\mathbf{w}_3\,,$$

bo widać gołym okiem, że pierwsza i druga kolumna macierzy $F_{(w)(v)}$ są od siebie liniowo niezależne. Od razu też można odpowiedzieć na ostatnie pytanie: nie, nie można znaleźć takich baz, by macierz F miała trzecią postać, bo w tej trzeciej postaci aż trzy kolumy są liniowo niezależne, czyli taka macierz może być macierza odwzorowania o $\dim(\mathrm{im} F) = 3$, a nie tego rozpatrywanego w tym zadaniu.

Jak już mamy dwa wektory jądra, to możemy je uzupełnić do bazy całej przestrzeni V, biorąc np. jako jej bazę wektory $\mathbf{j}_1 = \mathbf{v}_1$ i $\mathbf{j}_2 = \mathbf{v}_2$ (dlatego sprytnie te rozpinające jądro nazwaliśmy $\mathbf{j}_3$ i $\mathbf{j}_4$), bo, jak łatwo zobaczyć, razem cztery wektory $\mathbf{j}_i$ tworzą układ liniowo niezależny więc bazą mogą być. Możemy też za bazę przestrzeni W wziąć wektory $\mathbf{o}_1 \equiv F(\mathbf{v}_1) \equiv F(\mathbf{j}_1)$ oraz $\mathbf{o}_2 \equiv F(\mathbf{v}_2) \equiv F(\mathbf{j}_2)$ dokooptowując do nich jakiś trzeci wektor $\mathbf{o}_3$, który jest od nich liniowo niezależny; np. $\mathbf{o}_3 = \mathbf{w}_3$. Wtedy w bazach $\mathbf{j}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ przestrzeni V i $\mathbf{o}_j$, $i = 1, 2, 3$ macierz odwzorowania F ma postać a), co wynika wprost ze sposobu konstruowania macierzy odwzorowania w zadanych bazach, gdy wiadomo, co odwzorowanie robi z wektorami bazy przestrzeni na której jest ono określone.

Żeby zaś macierz odwzorowania F miała postać b), trzeba aby $F(\mathbf{j}_1) = \mathbf{u}_1 + 2\,\mathbf{u}_2$, a $F(\mathbf{j}_2) = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, gdzie $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ są dwoma pierwszymi wektorami jakiejś jeszcze innej bazy przestrzeni W. Trzecim wektorem tej jeszcze innej bazy może być jakikolwiek wektor liniowo niezależny od $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$, a zatem i liniowo niezależny od $\mathbf{o}_1$ i $\mathbf{o}_2$ - bo przecież

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 + 2\,\mathbf{u}_2 &= \mathbf{o}_1 \equiv \mathbf{w}_1 + \,\mathbf{w}_2 + 3\,\mathbf{w}_3\,,\\
-\mathbf{u}_1 + \,\mathbf{u}_2 &= \mathbf{o}_2 \equiv \mathbf{w}_1 + 2\,\mathbf{w}_2 + 4\,\mathbf{w}_3\,,
\end{aligned}$$

więc za $\mathbf{u}_3$ można wziąć $\mathbf{o}_3 = \mathbf{w}_3$. Rozwiązując powyższe dwa równania znajdujemy, że

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{1}{3}\,\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 - \frac{5}{3}\,\mathbf{w}_3\,, \qquad \mathbf{u}_3 = \frac{2}{3}\,\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \frac{7}{3}\,\mathbf{w}_3\,.$$

Zadanie 4.2: Można np. rozłożyć wektory bazy kanonicznej na wektory, na których podane jest działanie S (wektory te, jak łatwo sprawdzić, są liniowo niezależne więc też tworzą bazę):

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\\
\mathbf{e}_2 &= \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\\
\mathbf{e}_3 &= \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Wtedy z liniowości

$$\begin{aligned}
S\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) &= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-3\\3\\8\end{bmatrix} = -\frac{3}{4}\,\mathbf{e}_1 + \frac{3}{4}\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3\,,\\
S\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\-5\\-14\end{bmatrix} = \frac{3}{4}\,\mathbf{e}_1 - \frac{5}{4}\,\mathbf{e}_2 - \frac{7}{2}\,\mathbf{e}_3\,,\\
S\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix} = \frac{3}{4}\,\mathbf{e}_1 + \frac{5}{4}\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3\,.
\end{aligned}$$

I teraz szukaną macierz dostajemy stawiając obok siebie "na sztorc" otrzymane wyżej współczynniki rozkładu:

$$S_{(e)(e)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & 3 & 3\\ 3 & -5 & 5\\ 8 & -14 & 8\end{pmatrix}.$$

Czynnik $1/4$ przed macierzą rozumiemy zawsze tak, że mnoży on każdy element macierzy. Można sprawdzić (wyrabiamy sobie odruch samokontroli!), że po przystawieniu z prawej do tej macierzy podanych wektorów, na których działanie S było zdefiniowane, - tylko teraz nie w kanciatych nawiasach, a w obłych! (dlaczego?) dostanie się ich obrazy (też teraz w obłych, a nie kanciatych nawiasach). Poza tym, skoro obie trójki wektorów są każda z osobna liniowo niezależne, to $\mathrm{im}S = \mathbb{R}^3$ i $\ker S = \mathbf{0}$ (do jądra należy tylko wektor zerowy).

Zadanie 4.3: Odwzorowanie P jest rzutem, bo kwadrat jego macierzy jest równy wyjściowej macierzy: $P_{(e)(e)} \cdot P_{(e)(e)} = P_{(e)(e)}$. Można zgadnąć wektor $\mathbf{r}_1$ na który jest to rzutowanie i wektor $\mathbf{r}_2$ - ten, wzdłuż którego jest to rzut, ale lepiej rozpatrzyć wszystko systematycznie, żeby wiedzieć, czy odpowiedź jest jednoznaczna. Zalżzmy więc, że

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} R^1{}_1 & R^1{}_2 \\ R^2{}_1 & R^2{}_2 \end{pmatrix}.$$

Wektory $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ aby zadawać rzut, muszą tworzyć alternatywną bazę przestrzeni V, więc macierz tu stojąca, to $R_{(e \leftarrow r)}$. Zatem

$$\begin{aligned} P_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= R_{(e\leftarrow r)} \cdot P_{(r)(r)} \cdot R_{(r \leftarrow e)} = R_{(e\leftarrow r)} \cdot P_{(r)(r)} \cdot [R_{(e\leftarrow r)}]^{-1} \\ &= \frac{1}{R^1{}_1 R^2{}_2 - R^1{}_2 R^2{}_1} \begin{pmatrix} R^1{}_1 & R^1{}_2 \\ R^2{}_1 & R^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^2{}_2 & -R^1{}_2 \\ -R^2{}_1 & R^1{}_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pośrodku napisaliśmy oczywistą postać macierzy $P_{(r)(r)}$, a po prawej, "spod dużego palucha" - bo odwracanie macierzy 2×2 mamy w małym paluchu, macierz odwrotną do $R_{(e\leftarrow r)}$ (liczy się do niej też ten mianownik, przed całością). Po wymnożeniu mamy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{R^1{}_1 R^2{}_2 - R^1{}_2 R^2{}_1} \begin{pmatrix} R^1{}_1 R^2{}_2 & -R^1{}_1 R^1{}_2 \\ R^2{}_1 R^2{}_2 & -R^2{}_1 R^1{}_2 \end{pmatrix}.$$

Zatem $R^2{}_1 R^2{}_2 = 0$ i $R^2{}_1 R^1{}_2 = 0$, co najprościej jest spełnić biorąc $R^2{}_1 = 0$. Zobaczmy jednak co by było, gdyby wziąć $R^2{}_1 \neq 0$, położyć $R^2{}_2 = R^1{}_2 = 0$. Widać, że wtedy wszystkie elementy macierzy sie zerują, ale zeruje się też czynnik przed nią. To dlatego, że odpowiada to $\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ - usiłujemy wtedy rzutować wzdłuż wektora zerowego, a to się nie może udać! Zatem jedynym rozwiązaniem jest jednak $R^2{}_1 = 0$. Mamy wtedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{R^1{}_1 R^2{}_2} \begin{pmatrix} R^1{}_1 R^2{}_2 & -R^1{}_1 R^1{}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -R^1{}_2 / R^2{}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem $\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1$ - rzutujemy na podprzestrzeń rozpinaną przez pierwszy wektor bazy wzdłuż podprzestrzeni rozpinanej przez wektor $\mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_1 R^1{}_2 + \mathbf{e}_2 R^2{}_2 = R^2{}_2(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Jest to wynik jednoznaczny, bo niezależnie od $R^2{}_2 \neq 0$ jest to ta sama podprzestrzeń. Pokomplikowałem tu trochę bo chciałem pokazać, jak to wszystko dziala. Oczywiście wektory wzdłuż których rzutujemy rozpinają zawsze jądro odwzorowania, które ma być rzutem więc ich składowe muszą spełniać w danym przypadku warunek

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^1{}_2 \\ R^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a wektory rozpinające podprzestrzeń, na którą się rzutuje muszą być wektorami własnymi tego odwzorowania odpowiadającymi wartości własnej 1, czyli muszą tu być dane warunkiem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^1{}_1 \\ R^2{}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^1{}_1 \\ R^2{}_1 \end{pmatrix}.$$

Łatwo więc było od początku zgadnąć, że muszą to być $\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1$ i np. $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Ale ogólnie o wektorach własnych odwzorowań V w V dopiero będzie dalej, więc dobrze, że jest inny sposób.

Zadanie 4.4: Zrzutować podany wektor $\mathbf{w}$ można nawet nie znajdując macierzy rzutu. Jako dwa wektory rozpinające podprzestrzeń, na którą $\mathbf{w}$ ma być zrzutowany, można wybrać np.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo zobaczyć, są one od siebie liniowo niezależne i oba spełniają warunek $x+y-z = 0$. Wystarczy teraz rozłożyć wektor $\mathbf{w}$ w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ i $\mathbf{u}_3 \equiv \mathbf{u}$:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{13}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

i wyzerować współczynnik przy ostatnim wektorze:

$$\Pi(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{13}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Macierz rzutu ma w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{u}_i$ $i = 1, 2, 3$ ($\mathbf{u}_i = \mathbf{u}$) oczywistą postać

$$\Pi_{(u)(u)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponadto pisząc

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mamy od razu macierz $R_{(e\leftarrow u)}$. Macierz odwrotną, $R_{(u\leftarrow e)}$, znajdujemy rozwiązując układzik równań na $\mathbf{e}_i$

$$R_{(u\leftarrow e)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$\Pi_{(e)(e)} = R_{(e\leftarrow u)} \cdot \Pi_{(u)(u)} \cdot R_{(u\leftarrow e)}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dla samokontroli sprawdzamy, czy $\Pi_{(e)(e)} \cdot \Pi_{(e)(e)} = \Pi_{(e)(e)}$ (tak) i czy po zadziałaniu $\Pi_{(e)(e)}$ na składowe $(2, 8, 7)$ wektora $\mathbf{w}$ w bazie kanonicznej dostaniemy składowe $(1/2, 13/2, 7)$ (dostaniemy - Alles klapt).

Zadanie 4.5: W bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{v}$ oraz $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ (w tej kolejności) macierz rzutu $\Pi_{(w)(w)}$ ma oczywistą postać. Macierzami zmiany bazy są

$$R_{e\leftarrow w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_{w\leftarrow e} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stąd $\Pi_{(e)(e)} = R_{e\leftarrow w} \cdot \Pi_{(w)(w)} \cdot R_{w\leftarrow e}$, czyli

$$\Pi_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście $\Pi_{(e)(e)} \cdot \Pi_{(e)(e)} = \Pi_{(e)(e)}$. Rzuty wektorów (składowe rzutów) dostajemy działając macierzą $\Pi_{(e)(e)}$ na składowe wektorów.

Zadanie 4.6: Podprzestrzeń W jest oczywiście jednowymiarowa, czyli rozpina ją jeden wektor. Jeśli składowe takiego wektora w bazie $\mathbf{e}_i$ spełniać mają warunki $v^1_{(e)} - 2v^2_{(e)} = 0$, $v^1_{(e)} - 2v^3_{(e)} = 0$, to jako wektor ten może wziąć $\mathbf{u}_3 = 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Jest też jasne, że na wektorze tym zerują się oba kowektory definiujące podprzestrzeń W. Aby napisać macierze rzutów, nalepiej na początek rozłożyć dowolny wektor postaci $a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3$ na wektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$. Po prostych rachunkach znajdujemy

$$a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3 = \frac{-b+c}{2}\,\mathbf{u}_1 + \frac{-2a+b+3c}{2}\,\mathbf{u}_2 + \frac{2a-2c}{2}\,\mathbf{u}_3\,.$$

Wynik ten pozwala od razu zrzutować oba podane wektory w te i wewte. Np. aby zrzutować wektor $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3$ na podprzestrzeń W wzdłuż podprzestrzeni U bierzemy tylko ostatni człon powyższego rozkładu (bo współczynniki przy wektorach $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ rozpinających U zerujemy), wstawiamy w nim $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$ i dostajemy:

$$P^{\text{along } U}_{\text{onto } W}(\mathbf{a}_1) = -\mathbf{u}_3\,.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$P^{\text{along } U}_{\text{onto } W}(\mathbf{a}_2) = \mathbf{0}\,.$$

Oznacza to, że wektor $\mathbf{a}_2$ "nie wystaje" z podprzestrzeni U ("w kierunku" podprzestrzeni W) - leży w niej całkowicie (tzn. z kopytami). Tym samym powinno być oczywiste, że

$$P_{\mathrm{onto}\ U}^{\mathrm{along}\ W}(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_2\,.$$

Istotnie: aby znaleźć rzut $\mathbf{a}_2$ na U wzdłuż W należałoby w rozkładzie $\mathbf{a}_2$ na wektory $\mathbf{u}_j$ wyzerować współczynnik przy $\mathbf{u}_3$; jednak ponieważ wektor $\mathbf{a}_2$ odpowiada $a = 3$, $b = 1$, $c = 3$, wiec współczynnik przy $\mathbf{u}_3$ i tak by był zerem: rzut nie modyfikuje więc tego wektora. Rzut wektora $\mathbf{a}_1$ na podprzestrzeń U wzdłuż W mona też znaleźć pisząc

$$P_{\mathrm{onto}\ U}^{\mathrm{along}\ W}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_1 - P_{\mathrm{onto}\ W}^{\mathrm{along}\ U}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{u}_3 = 3\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3\,.$$

Macierze obu rzutów można znaleźć na kilka różnych sposobów. Po pierwsze macierz zmiany bazy $R_{(e\leftarrow u)}$ mamy za darmo, bo mamy wektory $\mathbf{u}_i$ wyrażone jawnie przez wektory $\mathbf{e}_i$. Z kolei te wektory orzez wektory $\mathbf{u}_i$ można wyrazić korzystając ze znalezionego wyżej rozkładu dowolnego wektora $a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3$ na wektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, kładąc $a = 1$, $b = c = 0$ by znaleść $\mathbf{e}_1$ itd. Zatem mamy też macierz $R_{(u\leftarrow e)}$. Zatem w bazie $\mathbf{e}_1$ macierz rzutu na W wzdłuż U to

$$\begin{aligned}
P_{(e)(e)}^{\mathrm{along}\ U} &= R_{(e\leftarrow u)} \cdot P_{(u)(u)}^{\mathrm{along}\ U} \cdot R_{(u\leftarrow e)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ponieważ zaś $U + W = U \oplus W = V$, to

$$P_{(e)(e)}^{\mathrm{along}\ W} = 1 - P_{(e)(e)}^{\mathrm{along}\ U} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Możnałatwo sprawdzić przykładając do tych macierzy kolumienki składowych wektorów $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$, że dostaje się te same rzuty, co wyżej.

Najszybciej jednak znaleźć macierz $P_{(e)(e)}^{\mathrm{along}\ U}$ korzystając z kowektorów: składowe w bazie $\hat{\mathbf{e}}_i$ kowektora zerującego się na obu wektorach $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$, a więc kowektora wyznaczającego jednoznacznie podprzestrzeń U, to $(\alpha, 0, -\alpha)$ z dowolnym $\alpha \neq 0$. Zatem

$$P_{(e)(e)}^{\mathrm{along}\ U} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\alpha, 0, -\alpha) = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stałą α trzeba dobrać tak, by $P_{(e)(e)}^{\mathrm{along}\ U} \cdot P_{(e)(e)}^{\mathrm{along}\ U} = P_{(e)(e)}^{\mathrm{along}\ U}$, co oczwiście da $\alpha = 1$.

Zadanie 4.7: Jest mniej więcej oczywiste, że podprzestrzeń $U^{\perp}$ (w sensie zadanego iloczynu skalarnego) jest rozpinana przez jeden wektor $\mathbf{u}_{3'} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. Z rozwiązania zaś poprzedniego zadania mamy, że podprzestrzeń U jest jednoznacznie wyznaczan przez kowektor[21] $\alpha\,(\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_3)$. Zatem od ręki można napisać

$$P^{\text{along } U}_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (\alpha, 0, -\alpha) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Żeby to był rzut, tzn żeby $P^{\text{along}U}_{(e)(e)} \cdot P^{\text{along}U}_{(e)(e)} = P^{\text{along}U}_{(e)(e)}$, trzeba położyć $\alpha = \frac{1}{2}$. Wtedy

$$P^{\text{along } U}_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Przykładając do znalezionej wyżej macierzy $P^{\text{along } U}_{(e)(e)}$ kolumienki składowych wektorów $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ znajdujemy, że

$$P^{\text{along } U}_{\text{onto } U^{\perp}}(\mathbf{a}_1) = -\frac{}{2}\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_3\,, \qquad P^{\text{along } U}_{\text{onto } U^{\perp}}(\mathbf{a}_2) = \mathbf{0}\,.$$

Drugi wynik jest oczywisty, bo już wiemy, że wektor $\mathbf{a}_2$ leży całkowicie w podprzestrzeni U. Ale rzut wektora $\mathbf{a}_1$ jest jednak inny niż w poprzednim zadaniu. Żeby jeszcze lepiej zobaczyć, że tera rzut jest inny, znajdźmy $P^{\text{along } U^{\perp}}_{(e)(e)}$

$$P^{\text{along } U^{\perp}}_{(e)(e)} = I - P^{\text{along } U}_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Widać, że jest to inna macierz niż znaleziona w poprzednim zadaniu macierz rzutu $P^{\text{along } W}_{\text{onto } U}$ w tej samej bazie.

Zadanie 4.8: Zadanie to można rozwiązać w jednej linijce, jeśli się skorzysta z kowektorów i wtedy odpowiedź na postawione pytanie jest oczywista. Najpierw jednak rozwiążemy je metodą nie wymagającą kowektorów. W tym celu jako bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$ weźmiemy wektory

$$\mathbf{j}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Trzy pierwsze z nich rozpinają jądro[22] (zostały one "wymyślone" przez przepisanie warunku wyznaczającego jądro w formie $x_1 = x_2 - 6x_3 - 2x_4$ i położeniu $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$,

[21] To, że składowe tego kowektora w bazie $\hat{\mathbf{e}}_i$ dualnej do bazy $\mathbf{e}_j$, sa takie same jak składowe wektora $\mathbf{u}_{3'}$ w bazie $\mathbf{e}_i$ wynika z tego, że wybrany został taki a nie inny iloczyn skalarny; nie musimy tu wchodzć w te rzeczy...

[22] Dlatego bazę tę nazywamy $\mathbf{j}_i$ - jest to baza "jądrowa" (no, po angielsku to by to była baza $\mathbf{k}_i$ - od "kernel"; to naszym, narodowym - wstańmy z kolan! - przyczynkiem do fizyki musi być więc to, że pęd powszechnie oznacza się $\mathbf{p}$, bo po angieslku pęd to momentum...).

by dostać pierwszy, $x_3 = 1$, $x_2 = x_4 = 0$, by dostać drugi i $x_4 = 1$, $x_2 = x_4 = 0$, by dostać trzeci). Czwarty wektor został wzięty "spod dużego palucha" ale można sprawdzić (to już powinniśmy umieć), że te cztery wektor tworzą układ liniowo niezależny i mogą zatem być bazą. Z kolei jako bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ weźmiemy ten wektor rozpinający obraz ker$F$ i jakieś dwa inne, proste wektory. Np.

$$\mathbf{o}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{o}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{o}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Znów łatwo sprawdzić, że są one liniowo niezależne. No i teraz rozwiązanie jest na talerzu: Trzy pierwsze wektory $\mathbf{j}$ mają tworzyć jądro, więc musimy określić odwzorowanie F tak, by $F(\mathbf{j}_1) = \mathbf{0}$, $F(\mathbf{j}_2) = \mathbf{0}$, $F(\mathbf{j}_3) = \mathbf{0}$. ($\mathbf{0}$ jest tu oczywiście wektorem zerowym tej drugiej przestrzeni, $\mathbb{R}^3$). Tu niema żadnego ruchu, żadnej dowolności. Z kolei wektor $\mathbf{j}_4$ ma nie należeć do ker$F$, więc nie może przechodzić na wektor zerowy; musi on przechodzić na jakiś wektor należący do im$F$, ale że im$F$ jest podprzestrzenią jednowymiarową, to jedyne, co możemy zrobić, to zdefiniować $F(\mathbf{j}_4) = \alpha\, \mathbf{o}_1$ z jakimś $\alpha \neq 0$. Przez liniowość to już kończy konstrukcję: odwzorowanie F spełniające warunki jest już całkowicie zadane. W bazach $\mathbf{j}_i$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i $\mathbf{o}_j$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ macierz tak skonstruowanego odwzorowania ma postać (por. definicję konstrukcji macierzy odwzorowania!)

$$F_{(o)(j)} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

«"As simple as that" powiedzieliby rodacy pana Pepysa».[23]

Na razie jedyną dowolnością w konstrukcji odwzorowania F wydaje się wybór współczynnika α. Ale przecież dowolnie wybraliśmy ten wektor $\mathbf{j}_4$ dopełniający $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$, a także wektory $\mathbf{o}_2$ i $\mathbf{o}_3$! Jest jednak jasne (powinno być!) że od wyboru wektorów $\mathbf{o}_2$ i $\mathbf{o}_3$ odwzorowanie nie zależy: one tylko rozpinają w $\mathbb{R}^3$ podprzestrzeń dopełniającą im$F$ do całej $\mathbb{R}^3$, ale żaden wektor z $\mathbb{R}^4$ na nie nie przechodzi. No ale co z wyborem tego wektora $\mathbf{j}_4$?

Jeśli posłużymy się kowektorami, to możemy jądro ker$F$ zadać warunkiem, że należą doń wszystkie wektory z $\mathbb{R}^4$, na których zero daje kowektor $[1, -1, 6, 2] \in \mathbb{R}^*_4$. (To jest oczywiste). Wykorzystując ten kowektor, no i przyswoiwszy sobie odpowiednie strony z mojego skryptu, widzimy, że można odwzorowanie F, jako element wektorowej przestrzeni $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^*_4$ zadać wzorem

$$F = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes [1,\ -1,\ 6,\ 2],$$

I teraz widać, że jedyną dowolnością jest tylko wybór współczynnika $\alpha \neq 0$. W tłumaczeniu na macierz zapisaną w kanonicznych zero-jedynkowych bazach przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^3$

[23] Zdanie wyjęte z "Dziennika pisanego nocą" Herlinga-Grudzińskiego.

(wykorzystujemy to, że w tych bazach składowe każdego wektora są równe odpowiednim pięterkom tegoż wektora żywego) miałoby ono postać

$$F_{(e)(e)} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -2 & 12 & 4 \\ 3 & -3 & 12 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Co więc zatem z tą dowolnością wektora $\mathbf{j}_4$? Weźmy zatem jako ten wektor

$$\mathbf{j}_4 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Trzeba oczywiście zażądać, żeby był on liniowo niezależny od $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$ i $\mathbf{j}_3$, ale to proste: ma on nie należeć do jądra, więc warunkiem jego liniowej niezależności od wektorów rozpinających jądro jest, by $a - b + 6c + 2d \neq 0$ (zaraz nam to "w praniu" i tak wyjdzie). Wektor ten tak jak poprzednio musi być odwzorowywany w im$F$, tj. $F(\mathbf{j}_4) = \alpha\,\mathbf{o}_1$ z jakimś $\alpha \neq 0$. Niezależnie od wartości a, b, c i d (byle spełniających powyższy warunek) macierz $F_{(o)(j)}$ ma taką samą postać jaką już wypisaliśmy wyżej (znów konstrukcja macierzy odwzorowania w danych bazach się kłania). Zobaczmy teraz jak przy takim najogólniejszym wyborze $\mathbf{j}_4$ będzie wyglądać macierz $F_{(e)(e)}$ odwzorowania F w bazach kanonicznych. Oczywiście $F_{(e)(e)} = R_{(e\leftarrow o)} \cdot F_{(o)(j)} \cdot R_{(j\leftarrow e)}$ co daje

$$\begin{aligned} F_{(e)(e)} &= \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Widać że gdyby wybrać inne wektory $\mathbf{o}_2$ i $\mathbf{o}_3$, co spowodowało by, że w macierzy $R_{(e\leftarrow o)}$ kolumny druga i trzecia by były inne, to i tak po wymnożeniu tych macierzy by wyszła taka sama macierz $F_{(e)(e)}$ - to potwierdza to, co wyżej zostało powiedziane na temat niezależności F od wyboru $\mathbf{o}_2$ i $\mathbf{o}_3$). Widać więc, że trzeba wyrazić wektory bazy kanonicznej $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ przez wektory $\mathbf{j}_i$. Właściwie to potrzebne są tylko ostatnie współczynniki (przy $\mathbf{j}_4$, bo to one, jako r_{41}, etc. wchodzą w macierz $F_{(e)(e)}$), ale i tak musimy wypisać cały układ równań:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 , \\ \mathbf{j}_2 &= -6\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{j}_3 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 , \\ \mathbf{j}_4 &= a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3 + d\,\mathbf{e}_4 . \end{aligned}$$

Żeby te związki sprawnie odwrócić, z pomocą pierwszych trzech eliminujemy z czwartego wektor $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ i $\mathbf{e}_4$, co da

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{a-b+6c+2d}\left(-b\,\mathbf{j}_1 - c\,\mathbf{j}_2 - d\,\mathbf{j}_3 + \mathbf{j}_4\right).$$

Widać, że związki daje się odwrócić, jeśli $a-b+6c+2d \neq 0$. (czyli, wyszło w praniu, to co miało wyjść). Dalej już prosto: z pierwszego $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}_1 - \mathbf{e}_1$, z drugiego $\mathbf{e}_3 = \mathbf{j}_2 + 6\,\mathbf{e}_1$ i z trzeciego $\mathbf{e}_4 = \mathbf{j}_3 + 2\,\mathbf{e}_1$. Razem daje to

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{a-b+6c+2d}\left(-b\,\mathbf{j}_1 - c\,\mathbf{j}_2 - d\,\mathbf{j}_3 + \mathbf{j}_4\right)\,,\\
\mathbf{e}_2 &= \frac{1}{a-b+6c+2d}\left((a+6c+2d)\,\mathbf{j}_1 + c\,\mathbf{j}_2 + d\,\mathbf{j}_3 - \mathbf{j}_4\right)\,,\\
\mathbf{e}_3 &= \frac{1}{a-b+6c+2d}\left(-6b\,\mathbf{j}_1 + (a-b+2d)\,\mathbf{j}_2 - d\,\mathbf{j}_3 + 6\,\mathbf{j}_4\right)\,,\\
\mathbf{e}_4 &= \frac{1}{a-b+6c+2d}\left(-2b\,\mathbf{j}_1 - 2c\,\mathbf{j}_2 + (a-b+6c)\,\mathbf{j}_3 + 2\,\mathbf{j}_4\right)\,.
\end{aligned}$$

Można stąd odczytać, że potrzebne współczynniki macierzy $R_{(j\leftarrow e)}$ zmiany bazy są równe $r_{41} = 1/(a-b+6c+2d)$, $r_{42} = -1/(a-b+6c+2d)$, $r_{43} = 6/(a-b+6c+2d)$, $r_{44} = 2/(a-b+6c+2d)$. Po wymnożeniu wyjdzie więc ta sama macierz $F_{(e)(e)}$, jaką otrzymaliśmy metodą kowektorową.

Zadanie 4.9: Najpierw trzeba ustalić jakie są wymiary podprzestrzeni ker$F$ i podprzestrzeni im$F$. Wystarczy tylko jednej, bo dim(ker$F$)+dim(im$F$) =dim$V = 4$. Aby znaleźć jakieś wektory należące do ker$F$ rozwiązujemy układzik równań wynikający z rozpisania na składowe w bazie $\mathbf{e}_i$ równania $F(\mathbf{j}) = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}
-3x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0\,,\\
x_1 - 5x_2 - 2x_3 \phantom{{}+4x_4} &= 0\,,\\
5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0\,,\\
-5x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Gaussujemy: wykorzystując drugie eliminujemy x_1 z pozostałych, które po tej operacji dadzą układ

$$\begin{aligned}
-8x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0\,,\\
32x_2 + 12x_3 + 4x_4 &= 0\,,\\
-24x_2 - 9x_3 - 3x_4 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Teraz już widać, że trzy otrzymane równania są w istocie jednym i tym samym na trzy niewiadome. Rozwiązać niezależnych musi być więc dwa. Jako ich niezerowe rozwiązania można wziąć $x_4 = 8$, $x_3 = 0$, $x_2 = -1$ i wtedy z tego drugiego, co było wykorzystane przy

Gaussowaniu, $x_1 = -5$ oraz $x_4 = 3$, $x_3 = -1$, $x_2 = 0$, $x_1 = -2$. Zatem w bazie $\mathbf{e}_i$ jądro rozpinają wektory

$$\mathbf{j}_1 = 5\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 8\,\mathbf{e}_4\,, \qquad \mathbf{j}_2 = 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - 3\,\mathbf{e}_4\,.$$

Poza tym dim(ker$F$) = 2. Uzyskane rozwiązanie na x-y oznacza też, że z traktowanych jak cztery wektorki z $\mathbb{R}^4$ kolumn $\mathbf{C}_i$ macierzy $F_{(e)(e)}$ tylko dwa są liniowo niezależne, bo $5\,\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 - 8\,\mathbf{C}_4 = \mathbf{0}$ i $2\,\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3 - 3\,\mathbf{C}_4 = \mathbf{0}$. Zatem jako liniowo niezależne możemy wziąć np. $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_4$. Zatem jako bazę podprzestrzeni im$F$, której wymiar też jest równy 2, możemy wybrać wektorki powstałe z tych dwu liniowo niezależnych kolumn:

$$\mathbf{o}_1 = 3\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 5\,\mathbf{e}_3 + 5\,\mathbf{e}_4\,, \qquad \mathbf{o}_2 = \mathbf{e}_1 - 4\,\mathbf{e}_3 + 3\,\mathbf{e}_4\,.$$

Teraz musimy zapytać, czy wszystkie cztery wektory $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{o}_1$ i $\mathbf{o}_2$ są liniowo niezależne. Jeśli są, to im$F\cap$ker$F = \{\mathbf{0}\}$ i oczywiście bazy tych dwu podprzestrzeni muszą być rozłączne (wtedy im$F$+ker$F$ =im$F\oplus$ker$F = V$). Ale jeśli dim(im$F\cap$ker$F$) $\neq 0$, to polecenie ma sens. Zapytajmy więc, czy rówaninie

$$\lambda_1\,\mathbf{j}_1 + \lambda_2\,\mathbf{j}_2 + \lambda_3\,\mathbf{o}_1 + \lambda_4\,\mathbf{o}_2 = \mathbf{0}\,,$$

ma jakieś nietrywialne rozwiązanie. Po rozpisaniu na składowe w bazie $\mathbf{e}_i$ daje to układzik równań

$$\begin{aligned}
5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ \lambda_4 &= 0\,,\\
\lambda_1 \qquad\quad - \lambda_3 \qquad\quad &= 0\,,\\
\lambda_2 - 5\lambda_3 - 4\lambda_4 &= 0\,,\\
-8\lambda_1 - 3\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= 0\,.
\end{aligned}$$

po wyGaussowaniu λ_1 z pomocą drugiego równania z pozostałych równań, dostaje się je w postaci

$$\begin{aligned}
2\lambda_2 + 8\lambda_3 + \ \lambda_4 &= 0\,,\\
\lambda_2 - 5\lambda_3 - 4\lambda_4 &= 0\,,\\
-3\lambda_2 - 3\lambda_3 + 3\lambda_4 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Teraz już tylko z pomocą środkowego wyGaussować λ_2 z pierwszego i drugiego, i okaże się, że te dwa są tym samym równaniem: $18\lambda_3 + 9\lambda_4 = 0$. Zatem jest jedno nietrywialne rozwiązanie $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$ i $\lambda_2 = 2$. A to oznacza, iż

$$\mathbf{j}_1 - 3\,\mathbf{j}_2 = -\mathbf{o}_1 + 2\,\mathbf{o}_2\,.$$

Czyli jest wektor, który należy zarówno do ker$F$, jak i do im$F$. (Oznacza to także, że im$F$+ker$F$ nie jest sumą prostą i że im$F$+ker$F \subset V$). I to ten wektor (lub ten pomnożony przez jakąś niezerową liczbę) trzeba wziąć jako jeden z wektorów bazy podprzestrzeni ker$F$ i jako jeden z wektorów bazy podprzestrzeni im$F$. A jako pozostały wektor bazowy każdej tych podprzestrzeni trzeba wziąć jakikolwiek odeń liniowo niezależny wektor zbudowany z $\mathbf{j}_1$ i $\mathbf{j}_2$ w podprzestrzeni ker$F$ i zbudowany z $\mathbf{o}_1$ i $\mathbf{o}_2$ w podprzestrzeni im$F$. Np. bazami spełniającymi warunki zadania mogą być

$$\begin{aligned} (\mathbf{j}_1 - 3\,\mathbf{j}_2,\, \mathbf{j}_2) &\quad \text{jako baza ker}F\,, \\ (-\mathbf{o}_1 + 2\,\mathbf{o}_2,\, \mathbf{o}_1) &\quad \text{jako baza im}F\,. \end{aligned}$$

Zadanie 4.10 Jako wektory nowej bazy przestrzeni V trzeba na pewno wybrać jakieś wektory rozpinające jądro odwzorowania F i dopełnić je do bazy. Z kolei jako bazę przestrzeni W trzeba wziąć F-obrazy tych wektorów dopełniających do bazy V wektory rozpinające jądro. Znajdźmy więc zuerst jądro. Rozwiązujemy w tym celu układzik równań

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

czyli

$$\begin{aligned} a + 2b - 2c + 3d &= 0\,, \\ -3a - 4b + c - 2d &= 0\,, \\ 2a + 2b + c - d &= 0\,. \end{aligned}$$

Dodajemy do pierwszego trzykrotność trzeciego, odejmujemy od drugiego dwukrotność trzeciego (eliminując d) i okazuje się, że wychodzi na trzy współczynniki jedno i to samo równanie $7a + 8b + c = 0$. Zatem $\dim(\ker F = 2)$, a dwa liniowo niezależne wektory rozpinające jądro można otrzymać biorąc $a = 1$, $b = 0$, $c = -7$ (wtedy $d = -5$) i $a = 0$, $b = 1$, $c = -8$ (wtedy $d = -6$). Zatem jako dwa wektory nowej bazy przestrzeni V możemy wziąć

$$\mathbf{j}_3 = \mathbf{v}_1 - 7\,\mathbf{v}_3 - 5\,\mathbf{v}_4\,, \qquad \mathbf{j}_4 = \mathbf{v}_3 - 8\,\mathbf{v}_3 - 6\,\mathbf{v}_4\,,$$

($\mathbf{j}_3$ i $\mathbf{j}_4$ zamiast $\mathbf{j}_1$ i $\mathbf{j}_2$ żeby to były ostatnie dwa wektory bazy). Teraz trzeba dokooptować jakieś dwa dodatkowe. Żeby było prosto weźmy $\mathbf{j}_1 = \mathbf{v}_3$ i $\mathbf{j}_2 = \mathbf{v}_4$ - wtedy układ czterech wektorów $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3, \mathbf{j}_4)$ jest liniowo niezależny (łatwo sprawdzić, że równanie

$$\begin{aligned} &\lambda_1\mathbf{j}_1 + \lambda_2\mathbf{j}_2 + \lambda_3\mathbf{j}_3 + \lambda_4\mathbf{j}_4 \\ &\qquad = \lambda_1\mathbf{v}_3 + \lambda_2\mathbf{v}_4 + \lambda_3(\mathbf{v}_1 - 7\,\mathbf{v}_3 - 5\,\mathbf{v}_4) + \lambda_4(\mathbf{v}_2 - 8\,\mathbf{v}_3 - 6\,\mathbf{v}_4) \\ &\qquad = \lambda_3\mathbf{v}_1 + \lambda_4\mathbf{v}_2 + (\lambda_1 - 7\lambda_3 - 8\lambda_4)\mathbf{v}_3 + (\lambda_2 - 5\lambda_3 - 6\lambda_4)\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

ma tylko rozwiązanie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1 = 0$). Zatem

$$(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3, \mathbf{j}_4) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{pmatrix},$$

A stojąca tu macierz to $R_{(v\leftarrow j)}$. Na szczęście nie musimy jej odwracać (nie byl oby to zresztą trudne). W nowej bazie macierzą odwzorowania F jest macierz $F_{(w)(j)}$ o oczywistej (prawda, że oczywistej?!) postaci

$$F_{(w)(j)} = F_{(w)(v)} \cdot R_{(v\leftarrow j)} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Ponieważ dim(im$F$ =dim$V-$dim(ker$F$) jest jasne, że obraz F jest w przestrzeni W podprzestrzenią dwuwymiarową i jako bazę im$F$ można wziąć

$$\mathbf{u}_1 = F(\mathbf{j}_1) = -2\,\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3\,, \qquad \mathbf{u}_2 = F(\mathbf{j}_2) = 3\,\mathbf{w}_1 - 2\,\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3\,.$$

Wektory te są liniowo niezależne[24] Możemy teraz dopełnić te dwa wektory do bazy W biorąc np. jakiś od nich liniowo niezależny wektor, np. $\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3$ (znów nietrudno sprawdzić, że t dobry wybór). W bazach $\mathbf{j}_i$ oraz $\mathbf{u}_l$ macierz odwzorowania F ma żądaną postać

$$F_{(u)(j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wynika to bezpośrednio z konstrukcji macierzy w zadanych bazach - nie musimy już nic sprawdzać!

Zadanie 6.1: Jeśli $n = 2$, to bezpośrednio znajdujemy, że wyznacznik jest równy $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$. Jeśli $n \geq 3$, wyznacznik jest równy zeru: aby to zobaczyć, wystarczy od n-tej kolumny odjąć $n-1$-szą, a potem od $n-1$-wszej odjąć $n-2$-gą itd. W rezultacie otrzymuje się

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & \dots & 1+x_1y_{n-1} & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & \dots & 1+x_2y_{n-1} & 1+x_2y_n \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & \dots & 1+x_3y_{n-1} & 1+x_3y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & 1+x_ny_3 & \dots & 1+x_ny_{n-1} & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & \dots & x_1(y_{n-1}-y_{n-2}) & x_1(y_n-y_{n-1}) \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & \dots & x_2(y_{n-1}-y_{n-2}) & x_2(y_n-y_{n-1}) \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & \dots & x_3(y_{n-1}-y_{n-2}) & x_3(y_n-y_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & 1+x_ny_3 & \dots & x_n(y_{n-1}-y_{n-2}) & x_n(y_n-y_{n-1}) \end{vmatrix},$$

skąd już widać, że n-ta i $n-1$-sza kolumna są do siebie nawzajem proporcjonalne, więc wyznacznik znika.

[24] Tu widać to gołym okiem; w ogólności obrazy kilku liniowo niezależnych wektorów nie muszą być liniowo niezależne (zob. zadanie 33 w skrypcie) ale tak się może zdarzyć tylko wtedy, gdy kombinacja liniowa tych liniowo niezależnych wektorów (których obrazy są liniowo zależne) jest wektorem należącym do ker$F$; ponieważ tu wektory rozpinające ker$F$ są wzięte jako baza V, żadna kombinacja liniowa pozostałych wektorów bazy V nie może da'c wektora z ker$F$.

Zadanie 6.2: Wyznaczniki macierzy 2×2 są równe kolejno: 3, $|z_1|^2 + |z_2|^2$, 1 i $2i \sin(\alpha - \beta)$. Następne sześć wyznaczników obliczamy metodą "po skosach" i dostajemy: 33, -4, $(c-b)a^2 + (a-c)b^2 + (b-a)c^2$, 1, $a + 6i$, $x^2(x + 3a)$.

Wyznaczniki macierzy 4×4 trzeba z pomocą operacji nie zmieniających ich wartości sprowadzić do postaci, do której można już będzie łatwo bezpośrednio zastosować regułę reprezentantów. Zacznijmy od pierwszego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

W pierwszym kroku, ostatnia kolumna została odjęta od każdej z trzech pierwszych, a w drugim czwarty wiersz pomnożony przez 4 został dodany do trzeciego. Pozostaje 1/2 trzeciego wiersza dodać do drugiego, a 1/3 trzeciego wiersza odjąć od czwartego, by dostać

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6\,,$$

bo wystarczy tylko zamienić miejscami pierwszą i ostatnią kolumnę, by dostać macierz diagonalną. Drugi wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

jest równy zeru, bo ma pierwszą i ostatnią kolumnę (albo: pierwszy i ostatni wiersz) identyczne. Następny wyznacznik ma w sobie liczby zespolone. Ale to nic. Po prostu dozwoloną operacją jest dodawanie do kolumny (wiersza) kombinacji liniowej pozostałych kolumn (wierszy) z zespolonymi współczynnikami. No i wynik też może być zespolony. Zatem trzeci wyzncznik

$$\begin{vmatrix} i & 0 & 2 & 0 \\ i & 1 & 3 & 0 \\ 2-i & 0 & i+2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

W pierwszym kroku pierwszy wiersz został odjęty od drugiego, a potem ostatnia kolumna została użyta do wyzerowania trzecich pięter wszystkich poprzednich kolumn. W drugim kroku od ostatniego wiersza został odjęty pierwszy. Następnie, po odjęciu od trzeciej kolumny drugiej dostaje się

$$\begin{vmatrix} i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2i,$$

bo wystarczy użyć trzeciej kolumny do wyzerowania elementu 11, by potem, po zamienieniu miejscami najpierw pierwszej kolumny z trzecią a potem trzeciej z ostatnią, sprowadzić macierz do postaci diagonalnej. Ostatni wyznacznik 4×4

$$\begin{vmatrix} i & -i & 2 & 0 \\ 1+i & -2i & 4 & 0 \\ 2-i & 0 & i+2 & 1 \\ 1 & -i & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & -i & 2 & 0 \\ 1+i & -2i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & -i & 2 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

W pierwszym kroku ostatnia kolumna została użyta do wyzerowania trzecich pięter wszystkich poprzednich kolumn, a w drugim kroku pierwszy wiersz został użyty do wyzerowania trzech ostatnich miejsc w wierszu drugim i ostatnim. Wychodzi zero, bo po tej operacji dwa wiersze (drugi i ostatni) są identyczne.

Teraz wyznacznik macierzy 5×5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

W pierwszym kroku pierwsza kolumna została odjęta od wszystkich pozostałych, a w drugim kroku pierwszy wiersz został wykorzystany do wyzerowiania całej pierwszej kolumny z wyjątkiem jej pierwszego pietra. Tę samą operacje powtarzamy następnie na bloku 4×4 zajmującym prawy dolny róg, potem na bloku 3×3, itd. Dostajemy w końcu wuznacznik macierzy diagonalnej z jedynkami na diagonali. Wyznacznik jest zatem równy zeru. Ostatni, najbardziej rzerażający wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 10 & 19 & 27 & -27 & -19 & 9 \\ 3 & 10 & -6 & 6 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & -10 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 9 & -10 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & -6 & 10 & 3 \\ 9 & -19 & -27 & 27 & 19 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 6 & 19 & 0 & 0 & 19 & 6 \\ 0 & 0 & -19 & 19 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & -10 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & -6 & 10 & 3 \\ 9 & -19 & -27 & 27 & 19 & 10 \end{vmatrix}.$$

Najpierw do pierwszego wiersza został dodany ostatni, do drugiego przedostatni, a od trzeciego odjęty czwarty. Już trochę zer powstało. Następnie od ostaniej kolumny odejmujemy pierwszą, a do czwartej dodajemy trzecią, co da

$$\begin{vmatrix} 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 19 & 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 0 & 10 & 0 \\ 9 & -19 & -27 & 0 & 19 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 19 & 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

W drugim kroku -1 w czwartej kolumnie i 1 w ostatniej zostały użyte do wyzerowania wszystkich pozostałych elementów czwartego i ostatniego wiersza. Teraz 19 z pierwszego wiersza wyzyskujemy do wyzerowania pierwszych elementów pozostałych wierszy, a drugą kolumnę odejmujemy od przedostatniej i mamy

$$\begin{vmatrix} 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (19)^3 = 6859\,,$$

bo pozostałe poza diagonalą elementy też można wyzerować. Diabeł nie był taki straszny.

Zadanie 6.3: Pierwszy wyznacznik jest ilustracją tego że cierpliwie można zawsze wy-Gaussować wyznacznik do postaci dolno- lub górno-trójkątnej. Jedyny problem to taki, że w ogólności jakiś straszne ułamki się by pojawiały, a dla przejrzystości (czyli żeby się nie arażać na błędy) lepiej tak manewrować, żeby strasznych ułamków nie było. Tu można tak (może jest szybszy sposób, ale taki mi się nawinął): najpierw, żeby się pozbyć tych tysięcy, odejmijmy ostatni wiersz od pierwszych trzech, a następnie pierwszą kolumnę od pozostałych trzech. Dostanie się wtedy

$$\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1001 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Teraz można używając trzeciego wiersza wyzerować trzy pozostałe pięterka drugiej kolumny. To da

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1001 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1001 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} | = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1001 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

W drugim kroku wykorzystując drugą kolumnę wyzerowaliśmy trójkę w trzeciej i odejmując cztery razy pierwszy wiersz od drugiego, wyzerowaliśmy -4. W trzecim kroku wyzerowana została piątka w prawym górnym rogu. To już prawie koniec: Nalezy teraz do ostatniej kolumny dodać 18 razy pierwszą i poprzestawiać kolumny:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1001 & 0 & 0 & 18016 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1001 & 0 & 18016 \end{vmatrix} = -18016\,,$$

bo powstała macierz dolnotrójkątna, której wyznacznik jets równy iloczynowi liczb na diagonali.

Drugi wyznacznik jest prostszy: wystarczy dodać pierwszy wiersz do pozostałych, by dostać macierz górnotrójkątną:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 2 & 5 & 8 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!\,.$$

Zadanie 6.4: Już tylko same wyniki. *a*) 13, 1 (bo to macierz obrotu o kąt $\pi/3$, a macierze obrotu mają wyznacznik 1), 11, -22 *b*) 4, 109, -10. . *c*) 1060, 98, 14.

Zadanie 6.5: No to robimy $\mathbf{C}_i \to \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_5$, $i = 2, 3, 4$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ostatnia postać bierze się z odjęcia pierwszego wiersza od trzech nastepnych. I teraz mamy już do obróbki macierz 4×4 w istocie. To odejmujemy ostatni wiersz od przedostatniego

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

W drugim kroku wykorzystana została czwarta kolumna (bo piątą to się źle kojarzy) by wyzerować resztę ostatniego wiersza. No i teraz już widać, że pierwsza kolumna to jest druga minus trzecia, więc wyznacznik jest równy zeru. Jak się napisze układ równań $x_1\mathbf{C}_1 + x_2\mathbf{C}_2 + x_3\mathbf{C}_3 + x_4\mathbf{C}_4 + x_5\mathbf{C}_5 = \mathbf{0}$ i sprawnie go wyGaussuje, to się znajdzie, że $\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_5 = \mathbf{0}$, więc tylko jedna kolumna jest liniową kombinacją pozostałych (co zresztą wyszło wyżej z tych manipulacji wyznacznikowych). Zatem rząd macierzy jest równy 4.

Drugi wyznacznik jest równy 6. Zatem rząd tej macierzy jest maksymalny, tj. równy (przypadkiem też) 6.

Zadanie 6.5': A to jest po prostu wyznacznik Vandermonde'a z $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, aż do $x_{n+1} = n + 1$, czyli V_{n+1}. Pamiętamy, że

$$V_{n+1} = \prod_{k>l}^{n+1} (x_k - x_l)\,,$$

więc tu mamy

$$[(n+1)-n][(n+1)-(n-1)]\dots[(n+1)-1][n-(n-1)]\dots[n-1]\dots[2-1] = \prod_{l=1}^{n}(l!)\,.$$

Zadanie 6.6: Tylko odpowiedzi, bo to tępe rachowanie: $x=0$, $y=1$, $z=2$ w pierwszym przykładzie i $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$ w drugim.

Zadanie 6.7: Wyznacznik macierzy M_1 jest równy zeru. Macierz ta nie ma więc odwrotnej (i nie może zatem być macierzą zmiany bazy). Jest to tzw. macierz osobliwa.

Druga macierz już taka wredna nie jest: $\det M_2 = 27$. Zatem liczymy dopełnienia algebraiczne (pamiętamy o znakach $\pm$!) i wstawiamy je przetransponowane. Napiszmy to w pełnej krasie:

$$M_2^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzamy (zawsze trzeba sprawdzić!)

$$M_2^{-1}\cdot M_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No, jest ok.

Analogicznie z macierzą M_3. Jej wyznacznik jest równy -4. Zatem

$$M_3^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ -24 & 16 & -4 \\ -23 & 17 & -5 \end{pmatrix}.$$

Jak zwykle sprawdzamy (przekręciliśmy znaki w w macierzy M_3^{-1} pisząc jednocześnie $1/4$ zamiast $-1/4$):

$$M_3^{-1}\cdot M_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 \\ 24 & -16 & 4 \\ 23 & -17 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 10 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zgadza się, choć macierz M_3^{-1} wygląda wrednie! No to jeszcze sprawdźmy rozwiązanie poprzedniego zadania: równanie miało postać

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 10 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

więc jego rozwiązaniem powinno być

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 \\ 24 & -16 & 4 \\ 23 & -17 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I rzeczywiście to jest to, co już było podane w rozwiązaniu poprzedniego zadania.

Teraz odwracamy macierz A_1. Będziemy sprytni i nie będziemy obliczać wyznacznika macierzy A_1 bo co się męczyć z wyznacznikiem macierzy 4×4. Znajdziemy więc macierz A_1^{-1} z dokładnością do stałej mnożącej ją jako całość i stałą tę wyznaczymy żądając aby $A_1^{-1} \cdot A_1 = I$. Oczywiście jeśli nie obliczymy wyzacznika macierzy A_1, to nie wiemy, czy macierz jest odwracalna. Zobaczmy więc najpierw na przykładzie macierzy M_1, która jak już wiemy, nie jest odwracalna, jak to wtedy wygląda, tzn. co w takim podejściu jest sygnałem, że macierz jest nieodwracalna. Zatem próbujemy napisać (od razu korzystamy z tego, że macierz M_1 różni się od M_2 tylko o jeden element wiec cześć dopełnień algebraicznych jest taka sama: całą ostatnią kolumną i ostatni wiersz możemy wziąć z tego, co było już wcześniej, a w pozostałych zera zastąpić dziewiątkami i już)

$$\text{Const.} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \text{Const.} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wygląda nawet prościej. Teraz próbujemy wymusić, by (od razu zastąpmy Const. przez Const/3 będzie prościej się liczyło)

$$\text{Const.} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Widać jednak od razu, że się nie da: wiersze macierzy z lewej strony są do siebie proporcjanalne, więc jak przelecimy przez nie pierwszą kolumną macierzy z prawej, to jeśli wyjdzie coś niezerowego w lewym górnym rogu (co przez dobór Const. możnaby sprowadzić do 1), to w całej pierwszej kolumnie, będziemy mieć coś niezerowego, zamiast zer poniżej jedynki.

No to teraz stosujemy ten sposób do znalezienia macierzy A_1^{-1}.

$$A_1^{-1} \propto \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Uff. męczące to było. No to jeszcze poobliczaác te wyznaczniki i po obliczeniu przystawiamy do macierzy A_1 i wymnażamy:

$$A_1^{-1} \cdot A_1 = \text{Const.} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Widać, że jak się położy Const.$= -1$ to będzie ok. Zatem

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

W analogiczny sposób możemy znaleźć A_2^{-1}:

$$A_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Należy oczywiście sprawdzić:

$$A_2^{-1} \cdot A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zgadza się. To jeszcze rozwiązanie układu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

powinno być dane przez

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

i rzeczywiście jest to to samo, co podano w rozwiazaniu poprzedniego zadania.

No i jeszcze macierz C: $\det C = -2$ (liczymy po skosach, jak gdyby nigdy nic). Zatem

$$C^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} i & 1+i \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} i & 1+i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -i & 0 \\ 1-i & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ -i & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -i & 1 \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & -1 & 1-i \\ -1+i & 1+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzamy:

$$C^{-1} \cdot C = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & -1 & 1-i \\ -1+i & 1+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jest ok.

Zadanie 6.8: Ustawmy wszystkie wektory na sztorc w jedną macierz: (ale postawmy piąty, co ma najwięcej zer na przedzie)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 3 & -9 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & -5 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Rząd macierzy to maksymalna liczba niezależnych jego kolumn. Ale rząd "kolumnowy" jest taki sam jak "wierszowy" (maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy traktowanych jak wektory z $\mathbb{R}^6$). Tu nam to mówi (co i tak wiemy z tego, że wymiar $\mathbb{R}^5$ jest równy 5, czyli że każda baza $\mathbb{R}^5$ ma 5 wektorów i więcej ich liniowo niezależnych być w $\mathbb{R}^5$ nie może) że $r(A) \leq 5$. No ale możebyć mniejszy niż 5 i to właśnie mamy zbadać. Jak weźmiemy minor stopnia 3 z lewego górnego rogu

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = +1 \cdot (3-8) = -5 \neq 0\,,$$

to widzimy, że rząd macierzy jest nie mniejszy niż 3. Można by też spróbować wyjąć z niej jakiś minor stopnia 5 i zobaczyć, czy jest zero.[25] Jak by nie był zerowy to odpowiedź

[25]Minor to jest z definicji od razu wyznacznik kwadratowej podmacierzy wyjętej z badanej macierzy.

by była od razu ($r(A) = 5$ w takim przypadku) ale jeśli wyjdzie zero, to dalej nic nie będziemy wiedzieć (jest 6 różnych minorów stopnia 5 i kt'oryś by mógł nie być zerowy; ale obliczać sześć wyznaczników 5×5? brr...). Zatem trzeba najpierw trochę popracować tj. wykonać na macierzy kilka operacji, które nie zmieniają jej rzeędu. Np z pomocą pierwszej jej kolumny - po to ten wektor daliśmy na przód - wyzerujmy resztę trzeciego piętra:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & -8 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & -8 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W drugim kroku wykorzystaliśmy trzecią kolumnę żeby w drugiej, czwartej, piątej i szóstej wyzerować ostatnie pięterko. I właściwie to już: wyszły aż cztery kolumny (druga, czwarta, piąta i szósta) parami proporcjonalne jedna do drugiej więc tylko jedna z nich może być niezależna: ustawmy je wszystkie z prawej strony

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -8 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -8 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i zobaczmy (dla samokontroli oczywiście!) czy z pierwszych trzech kolumn da się wyjąc niezerowy minor stopnia 3 (musi się dać, chyba że się gdzieś pomyliliśmy). No da się: znów ten w lewym górnym rogu jest niezerowy, ale i ten wlewym dolnym też. Zatem $r(A) = 3$, czyli tylko trzy wektory z sześciu są liniowo niezależne.

Zadanie 6.9: Zapisujemy układ w postaci macierzowej (żeby było czyetlniej)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

i sprawdzamy wyznacznik macierzy układu: licząc po skosach $\det A = 1 + 1 + 1 - 1 - (-1) - (-1) = 4 \neq 0$. Zatem układ ma rozwiązanie i jest ono jednoznaczne, bo macierz, A jest odwracalna. Teraz zaprzęgamy kramersięta:

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(6 + 2 - 2 + 6) = 3\,,$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(6 - 2 - 2 + 6) = 2\,,$$

$$x_3 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(2 + 6 - 6 + 6) = 1\,.$$

Oczywiście dla kontroli wstawiamy te otrzymane x-y do perwotnych równań: $3+2+1 = 6$, $-3+2+1 = 0$ i $3-2+1 = 2$. Zgadza się.

Drugi układzik rozwiązujemy tak samo, bo też wyznacznik macierzy nie znika (też jest równy 4). Znajdujemy: $y_1 = 0$, $y_2 = -3$, $y_3 = 6$.

A w trzecim przykładzie wyznacznik macierzy układu znika:

$$\mathrm{det}A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Kramersięta więc tego układu nie ugryzą (kramersięta to są takie małe szczenięta i czasem coś pogryzą, ale musi być nie za twarde) i z faktu, że $\mathrm{det}A = 0$ nie wynika jeszcze, że rozwiązanie nie istnieje, tylko to, że tak się nie rozwiąże. Tu jednak jak się od trzeciego równania odejmie pierwsze, to dostanie się $2z_2 - 2z_3 = 4$, co w połączeniu z drugim $z_2 - z_3 = 3$ uwidacznia, że układ jest sprzeczny, czyli rozwiązanie nie istnieje. Ale gdyby zmienić liczby po prawej stronie wyjściowych eównań z $(3,\ 3,\ 2)$ na np. $(6,\ -2,\ 2)$ to po odjęciu pierwszego od trzeciego otrzymalibyśmy równanie dublujęce drugie (tzn. proporcjonalne do drugiego) i rozwiązanie by istniało i to nawet nieskończenie wiele rozwiązań!. Morał więc jest taki, że o tym, czy kwamersięta są przydatne, decyduje wyłącznie postać lewych stron równań układu (czyli macierz A układu) ale o tym, czy rozwiązanie istnieje i czy jest jednoznaczne decyduje połączenie lewych i prawych stron równań.

Zadanie 6.10: Każdy kto na mechanice rozpatrywał układ czterech mas na prostej połączonych sprężynkami i taki, że dwie skrajne sprężynki są przyczepione do ścianek, rozumie, że taki układ nie ma modu translacyjnego i wobec tego macierz ta musi mieć niezerowy wyznacznik,[26] czyli rząd równy 4. No ale jak kogoś ten argument nie przekonuje, a nie może akurat użyć *Mathematici* żeby sobie ułatwić[27] obliczanie wyznacznika 4×4, to jedziemy systematycznie: dodajemy $\frac{1}{2}$ pierwszej kolumny do drugiej

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

W drugim kroku jeszcze wyzerowaliśmy wszystko w dół w pierwszej kolumnie dodając do następnych odpowiednie ilości pierwszego wiersza. No i teraz z Laplace'a by można wyznacznik obliczyć, i zobaczyć, że nie znika, ale dodajmy jeszcze $\frac{2}{3}$ drugiej kolumny do

[26] Pamiętam, jak na algebrze, gdy byłem studentem pierwszego roku, prof. K. Napiórkowski powiedział coś co mi się wtedy wydało fascynujęce: mianowicie, że wartości własne macierzy - bedziemy o tym mówić - czyli widmo macierzy, albo operatora liniowego, ma coś wspólnego z widmem atomu wodoru. Chodzi o to żeby w tej matematyce jednak zawsze widzieć fizykę!

[27] Chociaż tu, to laplasowawanie by było szybkie, bo jest sporo zer.

trzeciej

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Znów w drugim kroku wyzerowaliśmy wszystko w dół w drugiej kolumnie dodając odpowiednie ilości drugiego wiersza. No i teraz już niema wątpliwości, że wyznacznik nie znika, czyli rząd macierzy jest równy 4.

Teraz druga macierz. Znów dla wygody przestawmy ostatnią kolumnę na początek i odejmijmy ją od pozostałych w takiej proporcji, by wyzerować resztę pierwszego wiersza

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Jak zawsze w drugim kroku wyzerowaliśmy pierwszą kolumnę w dół. No to poprzestawiajmy wiersze: niech czwarty pójdzie jako drugi i użyjmy ostatniej kolumny, by wyzerować resztę drugiego wiersza:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I jeszcze wyzerowaliśmy co się dało w ostatniej kolumnie. Pierwsza i ostatnia kolumna są już liniowo niezależne, a jak się czujnie popatrzy, to widać, że trzecia minus czwarta daje drugą. Czyli razem cztery kolumny są liniowo niezależne i rząd macierzy jest równy 4.

Zadanie 7.1: Pierwszy układ jest układem czterech równań na trzy niewiadome. Inaczej: próbujemy wyrazić wektor z $\mathbb{R}^4$ stojący po prawej stronie jako kombinację liniową trzech wektorów stojących po lewej (x_1, x_2, x_3 miały by być współczynnikami tej kombinacji liniowej). Rząd $r(A)$ macierzy A układu jest z pewnością nie wyższy niż 3, a rząd macierzy rozszerzonej A^R może w ogólności być równy $r(A)+1$, czyli aż 4. Gdyby był równy $r(A)+1$, rozwiązanie by nie istniało. Rząd macierzy A sprawdzamy wyjmując z niej po prostu jakiś minor stopnia 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0\,,$$

(żeby sie łatwiej go obliczało najpierw do ostatniej kolumny dodaliśmy dwa razy drugą, a potem od drugiej odjęliśmy pierwszą). Zamiast sprawdzać, czy rząd macierzy rozszerzonej nie jest wyższy, po prostu zaczynamy rozwiązywać i albo wyjdzie, albo nie. Weźmy trzy dolne równania: to jest wtedy układ Cramerowski 3×3

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9\,, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7\,, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12\,, \end{aligned}$$

Odejmujemy od pierwszego cztery razy trzecie, od drugiego dwa razy trzecie i mamy

$$\begin{aligned} -29x_2 + 19x_3 &= -39\,, \\ -13x_2 + 9x_3 &= -17\,. \end{aligned}$$

Dalej już metodą "fiku-miku":

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & 19 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -39 \\ -17 \end{pmatrix} = \frac{-1}{14} \begin{pmatrix} 9 & -19 \\ 13 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -39 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wyszło zadziwiająco prosto jak na paskudność występujących liczb! Teraz z ostatniego równania $x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12$ odczytujemy, że $x_1 = 3$. I teraz moment decydujący: sprawdzamy, czy pierwsze, dotąd nieużyte równanie $2x_1+5x_2-8x_3 = 8$, jest spełnione, czy nie: jak jest, to układ ma rozwiązanie, a jak nie, to nie. Na szczęście ma: $2{\cdot}3+5{\cdot}2-8{\cdot}1 = 8$. Oznacza to (choć tego nie sprawdziliśmy bezpośrednio), iż $r(A^R) = r(A) = 3$. Zatem $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ jest (jedynym) rozwiązaniem tego układu.

Rząd macierzy A drugiego układu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jest równy 3. Bo rzeczywiście: $\mathbf{C}_1 = -2\,\mathbf{C}_2$, oraz $\mathbf{C}_2 + 4\,\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_5$. Zatem z pięciu jej kolumn tylko 3 są liniowo niezależne; że są można się przekonać obliczając jakiś minor stopnia 3 wyjęty z kolumn $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_4$, np. (minor stworzony z wierszy pierwszego, drugiego i czwartego tych kolumn znika!)

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\,.$$

Rozwiązujemy więc metodą regulaminową zredukowany układ (bez trzeciego równania) przenosząc na prawą stronę $x \equiv \alpha$ i $w \equiv \beta$

$$\begin{aligned} -y + z + 2v &= 2 - 2\alpha - 3\beta\,, \\ -3y + 2z + 4v &= 3 - 6\alpha - 5\beta\,, \\ -2y + z + v &= 1 - 4\alpha - 2\beta\,. \end{aligned}$$

Gaussujemy zmienną y korzystając z pierwszego:

$$-z - 2v = -3 + 4\beta\,,$$
$$-z - 3v = -3 + 4\beta\,,$$

i widzimy, że $z = 3 - 4\beta$, $v = 0$. Teraz to do równania $-y + z + 2v = 2 - 2\alpha - 3\beta$ i mamy $y = 1 + 2\alpha - \beta$. Ogólne rozwiązanie ma zatem postać

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 + 2\alpha - \beta \\ 3 - 4\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Postacie dwóch ostatnich wektorów wynikają oczywiście ze związków $\mathbf{C}_1 = -2\,\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_2 + 4\,\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_5$. Macierz A działając te wektory daje zero; rozwiązanie ma więc standardową strukturę: rozwiązanie szczegolne (z $\alpha = \beta = 0$) równania niejednorodnego + najogólniejsze rozwiązanie równania jednorodnego (z zerowym wektorem po prawej stronie.

Warto jeszcze zobaczyć, co by było, gdybyśmy rozwiązywali trzy pierwsze równania (wyznacznik utworzony z trzech pierwszych wierszy kolumn $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_4$ znika). Mielibyśmy wtedy

$$\begin{aligned} -\ \ y + \ \ z + 2v &= 2 - 2\alpha \ \ - 3\beta\,, \\ -3y + 2z + 4v &= 3 - 6\alpha \ \ - 5\beta\,, \\ -3y + 4z + 8v &= 9 - 6\alpha - 13\beta\,. \end{aligned}$$

WyGaussowując przy pomocy pierwszego zmienną y z drugiego i trzeciego dostalibyśmy jedno i to samo rówanie $z + 2v = 3 - 4\beta$. Teraz nie możemy jednoznacznie wyznaczyć z i v, więc piszemy np. $z = 3 - 4\beta - 2v$ i wstawiamy do $-y + z + 2v = 2 - 2\alpha - 3\beta$. To da $y = 1 + 2\alpha - \beta$ (tak jak metoda regulaminowa), ale wciąż nie wiemy, ile ma być z, a ile v. Żeby to ustalić, wstawiamy wyznaczone jak wyżej y i z do nieużytego równania czwartego $-2y + z + v = 1 - 4\alpha - 2\beta$ i dopiero teraz znajdujemy, że $v = 0$.

Zadanie 7.2: Wyznacznik macierzy A układu jest równy

$$\det A = -a^2(1 + a) + a(1 + a) - 2(1 - a^2) = (a - 2)(1 - a^2)\,.$$

Oprócz przypadków $a = 2$, $a = \pm 1$ rząd macierzy A jest maksymalny, jest ona nieosobliwa, a więc odwracalna i rozwiązanie istnieje i jest wtedy jednoznaczne. Znajdziemy je. Zamiast wykorzystywać Kramersięta, rozwiążemy go "na piechotę". Piszemy

$$\begin{aligned} a\,x + (1 - a)\,y + (1 + a)\,z &= \ a - 2\,, \\ 2\,x \qquad - a\,y \qquad\qquad\quad &= \ 4a\,, \\ x \qquad\qquad\quad + (1 + a)\,z &= -1\,. \end{aligned}$$

Odejmujemy od pierwszego trzecie, co (po uproszczeniu przez $a-1$ - założyliśmy, że $a \neq 2, \pm 1$!) da równanie $x-y=1$, które w połączeniu z drugim pozwala łatwo znaleźć x i y. A potem już z. W rezultacie

$$x = \frac{-3a}{a-2}, \qquad y = \frac{2-4a}{a-2}, \qquad z = \frac{2}{a-2}.$$

Widać stąd, że gdy $a = \pm 1$ można stąd dostać jakieś rozwiązanie, choć nie bedzie to rozwiązanie najogólniejsze. Gdy zaś $a=2$, rozwiązanie nie istnieje. Istotnie: w tym przypadku macierz problemu ma postać

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

i jej kolumny $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ spełniają związek $-3\mathbf{C}_1 - 3\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 = \mathbf{0}$, który pozwala wyrazić np. $\mathbf{C}_1$ jako kombinację liniową $\mathbf{C}_2$ i $\mathbf{C}_3$. Macierz A jest rzędu 2. Zatem przy badaniu rzędu macierzy rozszerzonej wystarczy badać rząd macierzy rozszerzonej bez pierwszej kolumny, czyli rząd

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ wyznacznik tej macierzy nie znika, rząd macierzy rozszerzonej jest równy 3 i problem istotnie nie ma wtedy rozwiązania. Gdy $a=1$, problem ma postać

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

i kolumny macierzy A spełniają związek $2\mathbf{C}_1 + 4\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_3 = \mathbf{0}$, wiec rząd A jest równy 2. Widać jednak gołym okiem, że np. $x=0$, $y=-4$, $z=-1/2$ jest możliwym rozwiązaniem. Nie jest ono jednoznaczne: można doń dodać z dowolnym współczynnikiem λ wektor na którym zeruje się macierz A:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ogólne rozwiązanie znalezione wyżej, po wstawieniu doń $a=1$, dałoby $x=3$, $y=2$, $z=-2$, co w powyższym ogólnym rozwiązaniu odpowiada $\lambda = 3/2$. Wreszcie, gdy $a=-1$, problem ma postać

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Rząd macierzy A jest równy 2, ale taki sam jest i rząd macierzy rozszerzonej. Wstawiając $a = -1$ do rozwiązania z dowolnym a i dodając do tego co wyjdzie z niego z dowolnym współczynnikiem λ oczywisty wektor, na którym ta macierz się zeruje znajdujemy ogólne rozwiązanie w tym przypadku

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 7.3: Wyznacznik macierzy A układu jest równy

$$\det A = (a-5)^2(a-2) + 8 - (a-2) - 8(a-5) = a^3 - 12a^2 + 36a = a\,(a-6)^2\,.$$

Zatem gdy $a = 6$ rząd macierzy jest równy 1, ale układ ma rozwiązanie bo wektor po prawej stronie jest dokładnie proporcjonalny do każdej z kolumn. Zatem wtedy najogólniejsze rozwiązanie ma postać: $x = 1 - \xi - \eta$, $y = -\frac{1}{2}\xi$, $z = -\eta$, z dowolnymi ξ i η.

Gdy $a = 0$ rząd macierzy jest równy 2 i tylko dwie jej kolumny są liniowo niezależne: gołym okiem widć, że wtedy $\mathbf{C}_3 = -\mathbf{C}_3 - 2\,\mathbf{C}_2$. Ale macierz rozszerzona (dwie pierwsze kolumny macierzy A i wektor $\mathbf{C}_B$ stojący po prawej stronie)

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ma rząd równy 3 b jej wyznacznik nie znika. Zatem w tym przypadku rozwiązania niema. Spodziewamy się więc, że jak zakładając, iże $a \neq 0$ i $a \neq 6$, kiedy to rozwiązanie zawsze istenieje i jest jednozaczne, znajdziemy ogólne rozwiązanie kramersiętami, to będą one osobliwe w $a = 0$ ale nieosobliwe w $a = 6$. I rzeczywiście

$$x = \frac{1}{a\,(a-6)^2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 1 & 2 & a-5 \end{vmatrix} = \frac{a^2 - 12a + 36}{a\,(a-6)^2} = \frac{1}{a}\,,$$

$$y = \frac{1}{a\,(a-6)^2}\begin{vmatrix} a-5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a-5 \end{vmatrix} = \frac{2a^2 - 24a + 72}{a\,(a-6)^2} = \frac{2}{a}\,,$$

$$z = \frac{1}{a\,(a-6)^2}\begin{vmatrix} a-5 & 2 & 1 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^2 - 12a + 36}{a\,(a-6)^2} = \frac{1}{a}\,.$$

Zadanie 7.4: Wszystko jak w poprzednim zadaniu: wyznacznik macierzy A układu jest równy

$$\det A = 3a^3 - 18a^2 + 15a = 2a\,(a-1)(a-5)\,.$$

Ponieważ wszystkie pierwiastki równania $\det A(a) = 0$ są pojedyńcze, rząd macierzy, gdy $a = 0$, $a = 1$ lub $a = 5$, jest równy 2. Gdy a nie jest równe żadnej z tych wartości układ ma rozwiązanie i jest ono jednoznaczne. Kramersiąte dają

$$x_1 = \frac{1}{3a\,(a-1)(a-5)} \begin{vmatrix} 1 & 1+a & 2 \\ 0 & 3-a & 2 \\ 3 & 3+a & 1+3a \end{vmatrix} = \frac{-3a^2+18a-15}{3a\,(a-1)(a-5)} = -\frac{1}{a}\,,$$

$$x_2 = \frac{1}{3a\,(a-1)(a-5)} \begin{vmatrix} 2-a & 1 & 1+a \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1+3a \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$x_3 = \frac{1}{3a\,(a-1)(a-5)} \begin{vmatrix} 2-a & 1+a & 1 \\ 2 & 3-a & 0 \\ 1 & 3+a & 3 \end{vmatrix} = \frac{3a^2-18a+15}{3a\,(a-1)(a-5)} = \frac{1}{a}\,.$$

Jak zwykle, ponieważ x_1 i x_3 są osobliwe, gdy $a = 0$, w tym przypadku rozwiązanie nie istnieje (rząd macierzy A jest równy 2, a rząd macierzy rozszerzonej jest równy 3 - zlecam sprawdzenie tego!). Z kolei gdy $a = 1$ lub $a = 5$, kramersięta dają jakieś rozwiązania (co oznacza, że rząd macierzy rozszerzonej też jest równy 2) ale nie są one najogólniejsze. Gdy $a = 1$ ($= 5$) kolumny macierzy A spełniają związek $\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$ (związek $8\mathbf{C}_1 + 5\mathbf{C}_2 - 3\mathbf{C}_3 = \mathbf{0}$) więc najogólniejszymi rozwiźaniami w tych dwóch przypadkach są

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (a=1)\,, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (a=5)\,.$$

Zadanie 8.1: Po prostu obliczamy:

$$(\hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \hat{\mathbf{e}}^2 + \hat{\mathbf{e}}^2 \wedge \hat{\mathbf{e}}^3)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{v})\,\hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{w}) - \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{v})\,\hat{\mathbf{e}}^1(\mathbf{w}) + \hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{v})\,\hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{w}) - \hat{\mathbf{e}}^3(\mathbf{v})\,\hat{\mathbf{e}}^2(\mathbf{w})\,.$$

Ponieważ $\hat{\mathbf{e}}^i$ działając na wektor daje jego i-tą składową w bazie dualnej, więc powyższe wyrażenie jest równe

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 7 - 3 \cdot 0 = 18\,.$$

Zadanie 8.2:
a) Aby zastosować kryterium minorowe zapisujemy formę macierzowo

$$Q = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obliczamy kolejne minory: $M_{11} = 1$, $M_{22} = -3$, $M_{33} = -7$. Ponieważ nie wszystkie minory są dodatnie, forma nie jest dodatnio określona. Gdyby wziąć formę $-Q$ (tj.

pomnożyć wszystkie elementy macierzy przez -1), to kolejne minory byłyby równe $M'_{11} = -1$, $M'_{22} = -3$, $M'_{33} = 7$, czyli znów nie wszystkie by były dodatnie. Forma nie jest więc też ujemnie określona (forma Q jest ujemnie określona, gdy forma $-Q$ jest dodatnio określona).

Sygnaturę formy (która - już wiemy - nie jest ani $(+,+,+)$ ani $(-,-,-)$, bo forma nie jest ani dodatnio, ani ujemnie określona) znajdujemy metodą Lagrange'a, czyli sukcesywnie zwijając ją do pełnych kwadratów, np. zaczynając od jej "x-owego końca":

$$\begin{aligned} Q &= \left[(x+2y+z)^2 - 4y^2 - z^2 - 4yz\right] + y^2 + 3z^2 + 2yz \\ &= (x+2y+z)^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2yz = (x+2y+z)^2 - 3(y+\frac{1}{3}z)^2 + 2z^2 + \frac{1}{3}z^2 \\ &= (x+2y+z)^2 - 3(y+\frac{1}{3}z)^2 + \frac{7}{3}z^2\,. \end{aligned}$$

Sygnatura formy jest więc $(+,-,+)$ albo $(+,+,-)$ albo $(-,+,+)$, jak kto woli.

Na koniec pisząc $x \equiv v^1_{(e)}$, $y \equiv v^2_{(e)}$, $z \equiv v^3_{(e)}$, czyli traktując zmienne x, y, z jak składowe wektora w jakiejś bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, widzimy, że forma będzie miała postać diagonalną w nowej bazie $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, w której składowymi tego samego wektora będą $v^1_{(f)} = v^1_{(e)} + 2v^2_{(e)} + v^3_{(e)}$, $v^2_{(f)} = v^2_{(e)} + \frac{1}{3}v^3_{(e)}$ oraz $v^3_{(f)} = v^3_{(e)}$. Zatem macierzą zmiany bazy będzie

$$R_{(f\leftarrow e)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz tę łatwo odwrócić bo ma (zawsze ma, jeśli forma została zdiagonalizowana wpierw metodą Lagrange'a) postać górnotrójkątną; można też odkręcić związki między składowymi: $v^3_{(e)} = v^3_{(f)}$, $v^2_{(e)} = v^2_{(f)} - \frac{1}{3}v^3_{(e)} = v^2_{(f)} - \frac{1}{3}v^3_{(f)}$ i

$$v^1_{(e)} = v^1_{(f)} - 2v^2_{(e)} - v^3_{(e)} = v^1_{(f)} - 2\left(v^2_{(f)} - \frac{1}{3}v^3_{(f)}\right) - v^3_{(f)} = v^1_{(f)} - 2v^2_{(f)} - \frac{1}{3}v^3_{(f)}\,.$$

Stąd odczytujemy

$$R_{(e\leftarrow f)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I teraz można sprawdzić, że $Q^{(f)} = [R_{(e\leftarrow f)}]^T \cdot Q^{(e)} \cdot R_{(e\leftarrow f)}$ jest macierzą diagonalną:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = Q^{(f)}\,.$$

Baza $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ jest wiec dana przez związki

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

W tej bazie łatwo podać przykładowe wektory $\mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_-$ oraz $\mathbf{v}_0$, na których forma przyjmuje wartości dodatnie, ujemne i zerową:

$$\mathbf{v}_+ = a\,\mathbf{f}_1 + b\,\mathbf{f}_3\,, \qquad \mathbf{v}_- = c\,\mathbf{f}_2\,, \qquad \mathbf{v}_0 = a\,\mathbf{f}_1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3a^2+7b^2}\,\mathbf{f}_2 + b\,\mathbf{f}_3\,.$$

a, b i c są tu dowolnymi liczbami; postacie wektorów $\mathbf{v}_+$ i $\mathbf{v}_-$ nie są oczywiście jedynymi możliwymi. Działając na kolumienki utworzone ze składowych tych wektorów macierzą $R_{(e\leftarrow f)}$ można podać postać tych wektorów w wyjściowej bazie $\mathbf{e}_i$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_+ &= (a - \frac{1}{3}b)\,\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}b\,\mathbf{e}_2 + b\,\mathbf{e}_3\,,\\
\mathbf{v}_- &= -2c\,\mathbf{e}_1 + c\,\mathbf{e}_2\,,\\
\mathbf{v}_0 &= \left(\mp\frac{2}{3}\sqrt{3a^2+7b^2} + a - \frac{1}{3}b\right)\mathbf{e}_1 + \left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3a^2+7c^2} - \frac{1}{3}b\right)\mathbf{e}_2 + b\,\mathbf{e}_3\,.
\end{aligned}$$

b) Tak jak poprzednio zapisujemy formę w formie (taki dowcip oczywiście) macierzowej

$$Q = xy + xz + yz + z^2 = (x,y,z)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Minory: $M_{11} = 0$, $M_{22} = -\frac{1}{4}$, $M_{33} = 0$, od razu mówią, że forma na pewnych wektorach daje zero: po pierwsze, gdy $x =$ cokolwiek, $y = z = 0$, ale także na $x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = -\lambda$, bo macierz Q działając na taki wektor od razu daje zero.[28] Formę można też łatwo zlagrangeować, zaczynając od jej końca z^2:

$$\begin{aligned}
Q = xy + xz + yz + z^2 &= \left[(z + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy\right] + xy\\
&= (z + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2\,.
\end{aligned}$$

Sygnatura formy jest więc $(+,-,0)$. Teraz chcemy znaleźć nową bazę, w której forma będzie diagonalna. Widać, że w nowej bazie (nawijmy ją $\mathbf{f}_i$, a starą $\mathbf{e}_i$. tak iż $x = v^1_{(e)}$, $y = v^2_{(e)}$, $z = v^3_{(e)}$) składowymi wektora będą $v^1_{(f)} = \frac{1}{2}v^1_{(e)} + \frac{1}{2}v^2_{(e)} + v^3_{(e)}$ i $v^2_{(f)} = v^1_{(e)} - v^2_{(e)}$. Nic na razie nie wyznacza jednak składowej $v^3_{(f)}$. Skoro nie wyznacza, to napiszmy ogólnie $v^2_{(f)} = a\,v^1_{(e)} + b\,v^2_{(e)} + c\,v^3_{(e)}$. Jedynym warunkiem ograniczającym liczby a, b i c jest, by utworzona w ten sposób macierz zmiany bazy

$$R_{(f\leftarrow e)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

[28] Innymi słowy, wektor o $x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = -\lambda$ jest wektorem własnym tej macierzy odpowiadającym wartości własnej zero. (O wektorach własnych i wartościach własnych bedziemy sie uczyć już wkrótce). Jeśli forma jest dodatnio lub ujemnie określona, to daje zero tylko na wektorze zerowym; jeśli ma sygnaturę mieszaną, to może dawać zero nawet wtedy, gdy Q działając na wektor nie jest od razu zerem - tak jest właśnie z wektorem postaci $x =$cokolwiek, $y = z = 0$. Jeśli jednak największy minor jest zerowy, to istnieje conajmniej jeden wektor, na którym macierz Q od razu daje zero.

była dobrą macierzą zmiany bazy, czyli by była odwracalna. To zaś oznacza, że jej wyznacznik nie może być równy zeru: $a+b-c \neq 0$. Warunek ten wyjdzie zresztą "w praniu". Aby znaleźć bazę, w której forma Q bedzie diagonalna musimy odwrócić macierz $R_{(f\leftarrow e)}$. Piszemy więc układ równań

$$\begin{aligned} v^1_{(f)} &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z\,, \\ v^2_{(f)} &= \ \ x - \ \ y \\ v^3_{(f)} &= ax + by + cz\,, \end{aligned}$$

i rozwiązujemy go, eliminując z pierwszego i trzeciego $y = x - v^2_{(f)}$:

$$\begin{aligned} v^1_{(f)} + \frac{1}{2}v^2_{(f)} &= \qquad\quad x + z\,, \\ bv^2_{(f)} + v^3_{(f)} &= (a+b)x + cz\,. \end{aligned}$$

Po dalszych prostych fiku-miku dostajemy

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a+b-c}\left[-cv^1_{(f)} + \frac{1}{2}\,(2b-c)v^2_{(f)} + v^3_{(f)}\right], \\ y &= \frac{1}{a+b-c}\left[-cv^1_{(f)} - \frac{1}{2}\,(2a-c)v^2_{(f)} + v^3_{(f)}\right], \\ z &= \frac{1}{a+b-c}\left[(a+b)v^1_{(f)} + \frac{1}{2}\,(a-b)v^2_{(f)} - v^3_{(f)}\right]. \end{aligned}$$

Daje to

$$R_{(e\leftarrow f)} = [R_{(f\leftarrow e)}]^{-1} = \frac{1}{a+b-c}\begin{pmatrix} -c & \frac{1}{2}\,(2b-c) & 1 \\ -c & -\frac{1}{2}\,(2a-c) & 1 \\ a+b & \frac{1}{2}\,(a-b) & -1 \end{pmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że jest to rzeczywiście macierz odwrotna do $R_{(f\leftarrow e)}$. Otrzymana macierz odwrotna rzeczywiście diagonalizuje macierz formy Q (zapiszemy to etapami, bo się nie mieści w linii):

$$Q^{(f)} \cdot R_{(e\leftarrow f)} = \frac{1}{a+b-c}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & \frac{1}{2}\,(2b-c) & 1 \\ -c & -\frac{1}{2}\,(2a-c) & 1 \\ a+b & \frac{1}{2}\,(a-b) & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I teraz $Q^{(f)} = [R_{(e\leftarrow f)}]^T \cdot Q^{(f)} \cdot R_{(e\leftarrow f)}$, czyli

$$Q^{(f)} = \frac{1}{a+b-c}\begin{pmatrix} -c & -c & a+b \\ \frac{1}{2}\,(2b-c) & -\frac{1}{2}\,(2a-c) & \frac{1}{2}\,(a-b) \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tak jak musiało wyjść (dzięki konstrukcji). Baza $\mathbf{f}_j$, w której forma Q jest diagonalna, jest więc dana związkami

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \frac{1}{a+b-c}\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} -c & \frac{1}{2}\,(2b-c) & 1 \\ -c & -\frac{1}{2}\,(2a-c) & 1 \\ a+b & \frac{1}{2}\,(a-b) & -1 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście można tu położyć dowolne a, b i c, byle $a+b-c \neq 0$.

W bazie $\mathbf{f}_i$ łatwo podać przykładowe wektory $\mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_-$ oraz $\mathbf{v}_0$, na których forma przyjmuje wartości dodatnie, ujemne i zerową:

$$\mathbf{v}_+ = \alpha\,\mathbf{f}_1 + \beta\,\mathbf{f}_3\,, \qquad \mathbf{v}_- = \gamma\,\mathbf{f}_2\,, \qquad \mathbf{v}_0 = \alpha\,\mathbf{f}_1 \pm 2|\alpha|\,\mathbf{f}_2 + \beta\,\mathbf{f}_3\,.$$

α, β i γ są tu dowolnymi liczbami; postacie wektorów $\mathbf{v}_+$ i $\mathbf{v}_-$ nie są oczywiście jedynymi możliwymi. Działając na kolumienki utworzone ze składowych tych wektorów macierzą $R_{(e\leftarrow f)}$ można podać postać tych wektorów w wyjściowej bazie $\mathbf{e}_i$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_+ &= \frac{1}{a+b-c}\left[(\beta - c\,\alpha)\,\mathbf{e}_1 + (\beta - c\,\alpha)\,\mathbf{e}_2 + (-\beta + (a+b)\alpha)\,\mathbf{e}_3\right],\\
\mathbf{v}_- &= \frac{\gamma}{2(a+b-c)}\left[(2b-c)\,\mathbf{e}_1 - (2a-c)\,\mathbf{e}_2 + (a-b)\,\mathbf{e}_3\right],\\
\mathbf{v}_0 &= \frac{1}{a+b-c}\left[(\beta - c\alpha \pm (2b-c)|\alpha|)\,\mathbf{e}_1 + (\beta - c\,\alpha \mp (2a-c)|\alpha|)\,\mathbf{e}_2\right.\\
&\qquad\qquad \left. + (-\beta + (a+b)\alpha \pm (a-b)|\alpha|)\,\mathbf{e}_3\right].
\end{aligned}$$

Zadanie 8.3:

a) Po zapisaniu w formy macierzowo mamy

$$Q = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Kolejne minory są równe: $M_{11} = 0$, $M_{22} = -\frac{1}{4}$, $M_{33} = 0$ i (laplasując względem pierwszego wiersza)

$$M_{44} = \frac{1}{2^4}\left\{-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\} = \frac{1}{16}\,\{0+0\} = 0\,.$$

Widać, że forma nie może być ani dodatnio, ani ujemnie określona. Diagonalizowanie jej metodą Lagrange'a najlepiej zacząć od przepisania jej w postaci $Q = (x_1+x_3)(x_2+x_4)$ i podstawienia $y_1 = x_1 + x_3$, $y_2 = x_2 + x_4$. Żeby to była porządna zamiana zmiennych, tzn. żeby mieć cztery niezależne nowe zmienne definiujemy $y_3 = x_1 - x_3$, $y_4 = x_2 - x_4$. W nowych zmiennych forma ma prostą postać $Q = y_1 y_2$. I teraz już wystarczy przejść do zmiennych $y_1 = z_1 + z_2$, $y_2 = z_1 - z_2$, $y_3 = z_3$ i $y_4 = z_4$, żeby dostać formę w postaci diagonalnej $Q = z_1^2 - z_2^2$, czyli zobaczyć, że ma ona sygnaturę $(+, -, 0, 0)$. Znajdziemy jeszcze bazę, w której macierz formy jest diagonalna. Idąc za zrobionymi podstawieniami:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_3) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3)\,,\\
x_2 &= \frac{1}{2}(y_2 + y_4) = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_4)\,,\\
x_3 &= \frac{1}{2}(y_1 - y_3) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - z_3)\,,\\
x_4 &= \frac{1}{2}(y_2 - y_4) = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 - z_4)\,.
\end{aligned}$$

Daje to macierz zmiany bazy $R_{(e\leftarrow f)}$ (baza $\mathbf{e}_i$, to ta, w której składowymi wektorów są x_i, a baza $\mathbf{f}_i$, to ta, w której składowymi wektorów są z_i) i tym samym bazę $\mathbf{f}_i$:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Macierzy tej już nie trzeba odwracać! Sprawdzamy, że diagonalizuje ona formę

$$\begin{aligned}
Q^{(f)} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

tak jak miało być.

b) Po zapisaniu w formy macierzowo mamy

$$Q = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Kolejne minory są równe: $M_{11} = 0$, $M_{22} = -\frac{1}{4}$, $M_{33} = 0$ i $M_{44} = 0$. Forma nie może być więc ani dodatnio ani ujemnie określona. Diagonalizacja metodą lagrange'a wymaga wytworzenia jakiegoś "x^2". Podstawmy więc $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$ i $x_4 = y_4$. Forma przybierze wówczas formę (znów dowcip)

$$Q = y_1^2 - y_2^2 + (y_1 + y_2)(y_3 + y_4) + (y_1 - y_2)y_4 + y_3y_3$$

$$
\begin{aligned}
&= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 + 2y_1y_4 + y_2y_3 + y_3y_4 \\
&= \left[(y_1 + \frac{1}{2}y_3 + y_4)^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - y_4^2 - y_3y_4\right] - y_2^2 + y_2y_3 + y_3y_4 \\
&= (y_1 + \frac{1}{2}y_3 + y_4)^2 - y_2^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - y_4^2 + y_2y_3 \\
&= (y_1 + \frac{1}{2}y_3 + y_4)^2 - (y_2 - \frac{1}{2}y_3)^2 - y_4^2 .
\end{aligned}
$$

Widać więc, że sygnatura formy to $(+,-,-,0)$. Aby znaleźć bazę, w której forma jest diagonalna, wprowadzamy składowe z_i wektorów w tej bazie (nazwijmy ją $\mathbf{f}_i$) równe $z_1 = y_1+\frac{1}{2}y_3+y_4$, $z_2 = y_2-\frac{1}{2}y_3$, $z_2 = y_3$, $z_4 = y_4$. Odwracamy: $y_1 = z_1-\frac{1}{2}z_2-z_4$, $y_2 = z_2+\frac{1}{2}z_3$, $y_3 = z_3$, $y_4 = z_4$. Zatem składowe w wyjściowej bazie (nazwijmy ją $\mathbf{e}_i$) wyrażają się przez składowe w bazie $\mathbf{f}_i$ wzorami $x_1 = z_1 + z_2 - z_4$, $x_2 = z_1 - z_2 - z_3 - z_4$, $x_3 = z_3$, $x_4 = z_4$. To od razu daje potrzebną do diagonalizacji formy macierz $R_{(e\leftarrow f)}$ i

$$
Q^{(e)} \cdot R_{(e\leftarrow f)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},
$$

a zatem macierz $Q^{(f)} = [R_{(e\leftarrow f)}]^T \cdot Q^{(e)} \cdot R_{(e\leftarrow f)}$ jest rzeczywiście diagonalna:

$$
Q^{(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Baza $\mathbf{f}_i$, w której forma Q ma tę postać wiąże się z wyjściową bazą $\mathbf{e}_i$ przez macierz $R_{(e\leftarrow f)}$

$$
(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Macierz $R_{(f\leftarrow e)}$ odwrotna do $R_{(e\leftarrow f)}$ nie jest nam do niczego tu potrzebna, ale łatwo ją znaleźć odwracając wzory: $z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3) + x_4$, $z_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3)$, $z_3 = x_3$, $z_4 = x_4$; stąd

$$
R_{(f\leftarrow e)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

c) Forma ta zapisana jawnie ma postać

$$
Q = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1(x_2 + x_3 + x_4) + x_2(x_2 + x_4) + x_3x_4
$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Trzy pierwsze minory macierzy tej formy są dodatnie: $M_{11} = 2$, $M_{22} = 15/4$ i $M_{33} = 27/4$. Jeśli czwarty minor, czyli wyznacznik całej macierzy jest też dodatni, to ma ona sygnaturę $(+, +, +, +)$. Ale liczenie wyznacznika macierzy 4×4 jest męczące więc lepiej zLagrangeować. Diagonalizacja metodą Lagrange'a wymaga trochę cierpliwości:

$$\begin{aligned}
Q &= 2 \left[\left(x_1 + \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_4) \right)^2 - \frac{1}{16}(x_2 + x_3 + x_4)^2 \right] \\
&\quad + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4 \\
&= 2 \left(x_1 + \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_4) \right)^2 + \frac{3}{4} \left\{ \frac{5}{2} x_2^2 + \frac{5}{2} x_3^2 + \frac{5}{2} x_4^2 + x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4 \right\} \\
&= 2 \left(x_1 + \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_4) \right)^2 \\
&\quad + \frac{3}{4} \left\{ \frac{5}{2} \left[\left(x_2 + \frac{1}{5}(x_3 + x_4) \right)^2 - \frac{1}{25}(x_3 + x_4)^2 \right] + \frac{5}{2} x_3^2 + \frac{5}{2} x_4^2 + x_3x_4 \right\} \\
&= 2 \left(x_1 + \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_4) \right)^2 + \frac{15}{8} \left(x_2 + \frac{1}{5}(x_3 + x_4) \right)^2 + \frac{3}{4} \left\{ 3x_3^2 + 3x_4^2 + x_3x_4 \right\} \\
&= 2 \left(x_1 + \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_4) \right)^2 + \frac{15}{8} \left(x_2 + \frac{1}{5}(x_3 + x_4) \right)^2 + \frac{9}{5} \left(x_3 + \frac{1}{6}x_4 \right)^2 + \frac{7}{4} x^4 .
\end{aligned}$$

Widać, że rzeczywiście sygnaturą formy jest $(+, +, +, +)$. Bazę $\mathbf{f}_i$, w której macierz jest diagonalna przez wyjściową bazę $\mathbf{e}_i$ można wyrazić odwracając związki $y_1 = x_1 + \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_4)$, $y_2 = x_2 + \frac{1}{5}(x_3 + x_4)$, $y_3 = x_3 + \frac{1}{6}x_4$, $y_4 = x_4$. Jak zwykle jest to proste: $x_4 = y_4$, $x_3 = y_3 - \frac{1}{6}y_4$, $x_2 = y_2 - \frac{1}{5}y_3 - \frac{1}{6}y_4$ i $x_1 = y_1 - \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{5}y_3 - \frac{1}{6}y_4$. Zatem

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -1/5 & -1/6 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz ta to oczywiście $R_{(e \leftarrow f)}$. Kto chce, może sprawdzić, że $[R_{(e \leftarrow f)}]^T \cdot Q^{(e)} \cdot R_{(e \leftarrow f)}$ jest macierzą diagonalną i ma na diagonali (idąc od lewego górnego rogu) liczby 2, 15/8, 9/5 i 7/4.

Zadanie 8.4: Diagonalizujemy formę metodą Lagrange'a zaczynając od x-a, ale potem zwijając do pełnego kwadratu z-y, a nie y-ki:

$$Q = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\lambda xy + 2xz = (x + \lambda y + z)^2 - (\lambda y + z)^2 + y^2 + 3z^2$$

$$= (x + \lambda y + z)^2 + (1 - \lambda^2)y^2 - 2\lambda yz + 2z^2$$
$$= (x + \lambda y + z)^2 + 2\left(z - \frac{\lambda}{2}\, y\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\,\lambda^2\right) y^2 \, .$$

Widać, że forma ma sygnaturę $(+, +, +)$, czyli jest dodatnio określona, gdy $|\lambda| < \sqrt{2/3}$. Gdy $|\lambda| = \sqrt{2/3}$ sygnaturą jej jest $(+, +, 0)$ - forma jest wtedy dodatnio półokreślona (to coś jak "półinteligent), i wreszcie, gdy $|\lambda| > \sqrt{2/3}$ sygnaturą formy jest $(+, +, -)$. Łatwo też znaleźć macierz diagonalizującą tę formę: jeśli składowymi wektorów w bazie $\mathbf{f}_i$, w którerj forma jest diagonalna będą $v_1 = x + \lambda y + z$, $v_2 = y$, $v_3 = -\frac{\lambda}{2} y + z$, czyli macierzą $R_{(f \leftarrow e)}$ będzie

$$R_{(f \leftarrow e)} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 \end{pmatrix} ,$$

to $y = v_2$, $z = v_3 + \frac{\lambda}{2} v_2$ i $x = v_1 - \frac{3}{2}\lambda v_2 - v_3$ i

$$Q^{(e)} \cdot R_{(e \leftarrow f)} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2}\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 - \frac{3}{2}\lambda^2 & -\lambda \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

i $Q^{(f)} = [R_{(e \leftarrow f)}]^T \cdot Q^{(e)} \cdot R_{(e \leftarrow f)}$ ma postać diagonalną

$$Q^{(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\lambda & 1 & \frac{1}{2}\lambda \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 - \frac{3}{2}\lambda^2 & -\lambda \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3}{2}\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Gdyby metodę Lagrange'a zastosować od drugiego końca, dostalibyśmy

$$\begin{aligned} Q &= x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\lambda xy + 2xz \\ &= 3\left[(z + \frac{1}{3}x)^2 - \frac{1}{9}x^2\right] + x^2 + y^2 \\ &= 3(z + \frac{1}{3}x)^2 + y^2 + 2\lambda xy + \frac{2}{3}x^2 \\ &= 3(z + \frac{1}{3}x)^2 + (y + \lambda x)^2 + \left(\frac{2}{3} - \lambda^2\right) x^2 \, , \end{aligned}$$

i wnioski co do sygnatury w zależności od wartości parametru λ byłyby takie same jak poprzednio.

Zadanie 8.5: Postępujemy standardowo: najpierw normujemy wektor $\mathbf{v}_1$. Niech wektory tworzonej nowej bazy nazywaja się $\mathbf{f}_1$:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\right) .$$

jest oczywiste (powinno być!), że $(\mathbf{f}_1|\mathbf{f}_1)_S = 1$. Następnie tworzymy wektor $\mathbf{f}_2'$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_2' &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{f}_1\,(\mathbf{f}_1|\mathbf{v}_2)_S \\
&= \mathbf{v}_2 - \mathbf{f}_1\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3|2\,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)_S \\
&= \mathbf{v}_2 - \mathbf{f}_1\,\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\,(4\,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-5\,\mathbf{e}_3)\,.
\end{aligned}$$

Wektor ten trzeba teraz unormować $(\mathbf{f}_2'|\mathbf{f}_2')_S = 42/9$, więc $\mathbf{f}_2 = (3/\sqrt{42}\,)\mathbf{f}_2'$, czyli

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{42}}\,(4\,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-5\,\mathbf{e}_3)\,.$$

Wreszcie tworzymy wektor $\mathbf{f}_3'$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_3' &= \mathbf{v}_3 - \mathbf{f}_2(\mathbf{f}_2|\mathbf{v}_3)_S - \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1|\mathbf{v}_3)_S \\
&= \mathbf{v}_3 - \mathbf{f}_2\,\frac{1}{\sqrt{42}}\,(4\,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-5\,\mathbf{e}_3|3\,\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)_S \\
&\qquad -\mathbf{f}_1\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3|3\,\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)_S \\
&= \mathbf{v}_3 - \mathbf{f}_2\,\frac{8}{\sqrt{42}} - \mathbf{f}_1\,\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{7}\,(-2\,\mathbf{e}_1+3\,\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)\,.
\end{aligned}$$

Na koniec normujemy i ten wektor: $(\mathbf{f}_3'|\mathbf{f}_3')_S = 50/7$, więc $\mathbf{f}_3 = \sqrt{7/50}\,\mathbf{f}_3'$, czyli

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(-2\,\mathbf{e}_1+3\,\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)\,.$$

Wektory nowej bazy wiążą się z wektorami starej bazy przez macierz $R_{(f\leftarrow e)}$:

$$(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 4/\sqrt{42} & -2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{42} & 3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{3} & 5/\sqrt{42} & -1/\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

I w drugą stronę:

$$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = (\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 4/\sqrt{42} & 1/\sqrt{42} & 5/\sqrt{42} \\ -2/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

Jest to proste, bo $R_{(f\leftarrow e)} = [R_{(f\leftarrow e)}]^{-1} = [R_{(f\leftarrow e)}]^T$, jako że obie bazy są ortonormalne w tym samym iloczynie skalarnym.

Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ jest równa

$$Vol = (\hat{\mathbf{e}}_1\wedge\hat{\mathbf{e}}_2\wedge\hat{\mathbf{e}}_3)(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10\,.$$

Zadanie 8.6: Wprowadzamy kanoniczną bazę przestrzeni wielomianów $\mathbf{e}_0(x) = 1$, $\mathbf{e}_1(x) = x$, $\mathbf{e}_2(x) = x^2$. W bazie tej ogólny wielomian $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ma składowe a_0, a_1 i a_2. Forma Q działając na taki ogólny wielomian daje

$$\begin{aligned} Q[w(x)] &= \int_{-1}^{1} dx\,(a_0 + a_2 x^2 + a_1 x)(a_0 + a_2 x^2 - a_1 x) \\ &= \int_{-1}^{1} dx\,\left[a_0^2 + (2a_0a_2 - a_1^2)x^2 + a_2^2 x^4\right] = 2a_0^2 + \frac{2}{3}(2a_0a_2 - a_1^2) + \frac{2}{5}a_2^2 \\ &= (a_0, a_1, a_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Macierz stojaca o ostatniej linii to macierz $Q^{(e)}$ formy Q w bazie kanonicznej. Formę w tej postaci, zapisaną jako funkcja składowych wielomianu w bazie kanonicznej, można teraz zwyczajnie zLagrangeować

$$Q(a_0, a_1, a_2) = 2\left(a_0 + \frac{1}{3}\,a_2\right)^2 - \frac{2}{3}\,a_1^2 + \frac{8}{45}\,a_2^2\,.$$

Jak widać nie jest ona dodatnio określona: ma sygnaturę $(+,-,+)$. Czyli w bazie $\mathbf{w}_1(x)$, $\mathbf{w}_2(x)$, $\mathbf{w}_3(x)$, w której macierz $Q^{(w)}$ formy Q jest diagonalna ogólny wielomian ma składowe $b_0 = a_0 + \frac{1}{3}a_2$, $b_1 = a_1$ i $b_2 = a_2$. Odwracając te związki, $a_0 = b_0 - \frac{1}{3}b_2$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, znajdujemy potrzebną macierz $R_{(e\leftarrow w)}$ zmiany bazy

$$R_{(e\leftarrow w)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Możemy sprawdzić, że rezeczywiści diagonalizuje ona macierz formy $Q^{(w)} = [R_{(e\leftarrow w)}]^T \cdot Q^{(e)} \cdot R_{(e\leftarrow w)}$:

$$Q^{(w)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{45} \end{pmatrix}.$$

Zatem wielomiany tworzące nową bazę są dane przez $\mathbf{w}_i(x) = \mathbf{e}_j(x)[R_{(e\leftarrow w)}]^j{}_i$, czyli

$$(\mathbf{w}_0(x), \mathbf{w}_1(x), \mathbf{w}_2(x)) = (1,\, x,\, x^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Innymi słowy, $\mathbf{w}_0(x) = 1$, $\mathbf{w}_1(x) = x$, $\mathbf{w}_2(x) = -\frac{1}{3} + x^2$.

Zadanie 8.7: Forma jest niewątpliwie symetryczna, $B(w,v) = B(v,w)$. Pozostaje tylko sprawdzić, czy definiowana przez nią forma kwadratowa $Q(w) = B(w,w)$ jest dodatnio określona. Niech $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Wtedy

$$\begin{aligned} B(w,w) &= [w(-1)]^2 + [w(0)]^2 - [w(1)]^2 + [w(2)]^2 \\ &= (a_0 - a_1 + a_2)^2 + a_0^2 - (a_0 + a_1 + a_2)^2 + (a_0 + 2a_1 + 4a_2)^2 \\ &= 2a_0^2 + 4a_1^2 + 16a_2^2 + 12a_1a_2 + 8a_0a_2 \\ &= (a_0, a_1, a_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teraz wystarczy zastosować kryterium minorowe: $M_{11} = 2 > 0$, $M_{22} = 8 > 0$, $M_{33} = 8 \cdot 18 - 64 - 72 = -8 < 0$. Wynika z niego, że forma nie jest dodatnio określona. Zatem badana forma biliniowa nie może być iloczynem skalarnym.

Zadanie 8.8 W przestrzeni macierzy wprowadzamy bazę

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

i obliczamy, cierpliwie mnożąc macierze:

$$Q(\mathbf{m}_1) = 2\,, \quad Q(\mathbf{m}_2) = 2\,, \quad Q(\mathbf{m}_3) = 5\,, \quad Q(\mathbf{m}_4) = 5\,,$$

a także

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) = 4\,, \quad Q(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3) = 11\,, \quad Q(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_4) = 7\,, \\ Q(\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3) = 7\,, \quad Q(\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_4) = 11\,, \quad Q(\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4) = 10\,, \end{aligned}$$

Teraz korzystamy ze wzoru

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \{Q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - Q(\mathbf{v}) - Q(\mathbf{w}\}\,,$$

i znajdujemy oczywiście $B(\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i) = Q(\mathbf{m}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ oraz

$$\begin{aligned} B(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = 0\,, \quad B(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3) = 2\,, \quad B(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_4) = 0\,, \\ B(\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3) = 0\,, \quad B(\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_4) = 2\,, \quad B(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4) = 0\,, \end{aligned}$$

Stąd już mamy macierz formy dwuliniowej B, czyli macierz formy Q:

$$Q^{(\mathbf{m})} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aby ją zlagrangeować obkładamy ją z obu stron wektorkiem (x, y, z, t) (tzn. obliczamy wartość Q na wektorze-macierzy postaci $\mathbf{m}_1 x + \mathbf{m}_2 y + \mathbf{m}_3 z + \mathbf{m}_4 t$) i dostajemy

$$\begin{aligned} Q(x, y, z, t) &= x(2x + 2z) + y(2y + 2t) + z(2x + 5z) + t(2y + 5t) \\ &= 2x^2 + 4xz + 5z^2 + 2y^2 + 4yt + 5t^2 \\ &= 2(x + z)^2 + 3z^2 + 2(y + t)^2 + 3t^2 \qquad . \end{aligned}$$

Tak wiec sygnatura formy jest $(+,+,+,+)$. Widać zresztą, że najlepiej przeporządkować bazę i używać bazy $(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_3,\mathbf{m}_2,\mathbf{m}_4)$, bo wtedy macierz formy będzie blokowo diagonalna

$$Q^{(\mathbf{m})} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ze zlagrangeowanej postaci formy widać natychmiast, iż w bazie, w której składowymi wektora-macierzy by były $(x+z,z,y+t,t)$, macierz formyby była diagonalna. Zatem macierz zmiany od (przeporządkowanej) bazy $\mathbf{m}_i$ do takiej nowej bazy $\mathbf{w}_i$ ma postać

$$R_{(\mathbf{w}\leftarrow\mathbf{m})} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ są to w gruncie rzeczy dwie macierze 2×2, macierz odwrotna jest oczywista:

$$R_{(\mathbf{m}\leftarrow\mathbf{w})} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stad natychmiast widać, że baza diagonalizująca to

$$(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3,\mathbf{w}_4) = (\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_3,\mathbf{m}_2,\mathbf{m}_4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

czyli macierze

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Zadanie 9.1 *a*) Wielomian charakterystyczny $W_F(\lambda) = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$ daje wartości własne $\lambda_1=-1$ i $\lambda_2=1$ o krotności 2. Mimo to są trzy wektory własne

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Wielomian charakterystyczny $W_F(\lambda) = -\lambda^3+\lambda^2$ daje wartości własne $\lambda_1=1$ i $\lambda_2=0$ o krotności 2. Są tylko dwa wektory własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Wielomian charakterystyczny $W_F(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 20\lambda^2 - 16\lambda$ daje $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$ o krotności 2 i $\lambda_3 = 4$. Mimo to są cztery wektory własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

bo macierz ta może być uznana za macierz formy kwadratowej, a formy są zawsze, jak już wiemy, diagonalizowalne np. metodą Lagrange'a; metoda Lagrange's nie daje jednak wektorów własnych, a to, że można ja przeprowadzić na wiele sposobów pokazuje, iż jest wiele różnych baz, w których takie macierze są diagonalne - baza wektorów własnych jest tylko jedną z takich baz.

Zadanie 9.2: Niech $R^{-1} \cdot F \cdot R$ będzie macierzą diagonalną. Wtedy $R^{-1} \cdot \exp(F) \cdot R$ jest też macierzą diagonalną (wynika to z samego sposobu jawnego znajdywania macierzy $\exp(F)$ z pomocą macierzy diagonalizujących F). Wyznacznik macierzy nie zmienia się przy jej diagonalizacji, tj.

$$\mathrm{Det}(F) = \mathrm{Det}(R^{-1} \cdot F \cdot R) = \mathrm{Det}(F_{\mathrm{diag}})\,.$$

Stąd

$$\mathrm{Det}(\exp(F)) = \mathrm{Det}(\exp(F_{\mathrm{diag}}))\,.$$

Z kolei $\exp(F_{\mathrm{diag}})$ jest macierzą mającą na diagonali eksponensy wartości własnych macierzy F. Zatem $\mathrm{Det}(\exp(F))$ jest iloczynem exponensów wartości własnych, czyli eponensem sumy tychże wartości własnych, a to jest exponens śladu macierzy F właśnie.

Podana macierz ma ślad równy zero, więc $\mathrm{Det}(\exp(F)) = 1$.

Zadanie 9.3: Trzeba odwrócić macierz $R_{(e\leftarrow w)}$. To już umiemy:

$$R_{(w\leftarrow e)} = (R_{(e\leftarrow w)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teraz możemy zdiagonalizować F: $F_{(w)(w)} = R_{(w\leftarrow e)} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{(e\leftarrow w)}$:

$$F_{(w)(w)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -6 & 11 & -6 \\ -8 & 16 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$(F_{(w)(w)})^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \qquad (F_{(w)(w)})^{2020} = F_{(w)(w)}\,,$$

i po powrocie do bazy $\mathbf{e}_i$,

$$
\begin{aligned}
(F_{(e)(e)})^{2020} &= R_{(e\leftarrow w)} \cdot (F_{(w)(w)})^{2020} \cdot R_{(w\leftarrow e)} = R_{(e\leftarrow w)} \cdot I \cdot R_{(w\leftarrow e)} = I\,, \\
(F_{(e)(e)})^{2021} &= R_{(e\leftarrow w)} \cdot (F_{(w)(w)})^{2021} \cdot R_{(w\leftarrow e)} = R_{(e\leftarrow w)} \cdot F_{(w)(w)} \cdot R_{(w\leftarrow e)} = F_{(e)(e)}\,.
\end{aligned}
$$

Analogicznie

$$
\exp(tF_{(e)(e)}) = R_{(e\leftarrow w)} \cdot \exp(tF_{(w)(w)}) \cdot R_{(w\leftarrow e)} \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^t & -2e^{-t} + 2e^t & e^{-t} - e^t \\ 3e^{-t} - 3e^t & -5e^{-t} + 6e^t & 3e^{-t} - 3e^t \\ 4e^{-t} - 4e^t & -8e^{-t} + 8e^t & 5e^{-t} - 4e^t \end{pmatrix}.
$$

Sprawdzianem jest oczywiście to, że $[\exp(tF_{(e)(e)})]^{-1} = \exp(-tF_{(e)(e)})$.

Zadanie 9.4: Laplasujemy wyznacznik D_n względem pierwszego wiersza

$$
D_n = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}\,.
$$

Drugi wyznacznik został jeszcze raz zlaplasowany względem swojej pierwszej kolumny. Otrzymujemy więc związek rekurencyjny. Oczywiście jego warunkami początkowymi są $D_1 = 3$ i

$$
D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\,.
$$

Związek ten można zapisać macierzowo

$$
\begin{pmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{pmatrix}.
$$

Z kolei

$$
\begin{pmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-2} \\ D_{n-3} \end{pmatrix},
$$

itd. Kontynuując w prawo możn dojść do

$$
\begin{pmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix}.
$$

Czyli wystarczy podziałać $n-2$-gą potęgą macierzy F na wektorek warunków początkowych. Potęgę tę można znaleźć na kilka sposobów, z których ten polegający na operowaniu macierzami diagonalizującymi jest najmniej sympatyczny. Dlatego posłużymy się tu metodą panów C&H. Wielomian charakterystyczny macierzy F ma postać

$$
W_F(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)\,.
$$

Wartościami własnymi macierzy F są więc $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$ obie o krotności 1 (macierz F jest więc diagonalizowalna). Jej dwa wektory własne łatwo znaleźć

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Piszemy teraz tożsamość wielomianową

$$\lambda^n = W_F(\lambda)\, Q_{F,n}(\lambda) + a_1\lambda + a_0 \,.$$

Podstawiając do niej $\lambda = 1$ i $\lambda = 2$ otrzymujemy dwa równania na a_0 i a_1, których rozwiązanie daje $a_0 = 2 - 2^n$ i $a_1 = 2^n - 1$. Wykorzystując twierdzenie CH dostajemy więc

$$F^n = W_F(F)\, Q_{F,n}(F) + a_1 F + a_0 I = a_1 F + a_0 I \,,$$

bo $W_F(F) = 0$. Jawnie więc

$$F^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$

Ponieważ macierz F jest diagonalizowalna, tj. ma dwa liniowo niezależne wektory własne, które mogą tworzyć bazę, tę samą macierz F^n można otrzymać też innym sposobem. Rozkładamy ogólny wektor na wektory własne F

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (-a + 2b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a - b) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Działamy na tę równość macierzą F^n:

$$\begin{aligned} F^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= (-a + 2b)\, 1^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a - b)\, 2^n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a + 2b + 2^{n+1}a - 2^{n+1}b \\ -a + 2b + 2^n a - 2^n b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wyszła oczywiście ta sama macierz F^n.

Rekurencję dającą wyznacznik D_n rozwiązujemy działając macierzą F^{n-2} na warunek początkowy

$$F^{n-2} \begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} - 1 & 2 - 2^{n-1} \\ 2^{n-2} - 1 & 2 - 2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Odczytujemy z górnego pięterka, że $D_n = 2^{n=1} - 1$. Dolne pięterko daje oczywiście D_{n-1}.

Tę samą rekurencję $D_n = 3D_{n-2} - 2D_{n-1}$ można też rozwiązać (nawet szybciej) podstawiając do niej $D_n = A\lambda^n$. Na λ dostaje się to samo równanie charakterystyczne, co poprzednio: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Zatem $D_n = A\,1^n + B\,2^n$ i żądając, by $D_1 = 3$, $D_2 = 7$ wyznacza się stałe $A = -2$ i $B = 2$.

Zadanie 9.5: Wartości własne F to $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$. Metodą pp. C&H znajdujemy

$$\cos(tF) = a_1 F + a_0 I\,, \qquad \sin(tF) = b_1 F + b_0 I\,,$$

gdzie $a_1 = \cos 2t - \cos t$, $a_0 = -\cos 2t + 2\cos t$ oraz $b_1 = \sin 2t - \sin t$, $b_0 = -\sin 2t + 2\sin t$. Zatem

$$\cos(tF) = \begin{pmatrix} -2\cos 2t + 3\cos t & -2\cos 2t + 2\cos t \\ 3\cos 2t - 3\cos t & 3\cos 2t - 2\cos t \end{pmatrix},$$
$$\sin(tF) = \begin{pmatrix} -2\sin 2t + 3\sin t & -2\sin 2t + 2\sin t \\ 3\sin 2t - 3\sin t & 3\sin 2t - 2\sin t \end{pmatrix},$$

Pracowicie podnosimy te macierze do kwadratu (dosyć to upiorne, więc posłużyłem się Mathematica)

$$\cos^2(tF) = \begin{pmatrix} 3\cos^2 t - 2\cos^2 2t & 2(1+2\cos 2t)\sin^2 t \\ -3(1+2\cos 2t)\sin^2 t & 3\cos^2 2t - 2\cos^2 t \end{pmatrix},$$
$$\sin^2(tF) = \begin{pmatrix} -(1+4\cos^2 2t)\sin^2 t & -2(1+2\cos 2t)\sin^2 t \\ 3(1+2\cos 2t)\sin^2 t & 2(2+3\cos 2t)\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

i, co wymaga pewniej biegłości w trygonometrycznych tożsamościach (ale Mathematica to robi bez zastanawiania się) $\cos^2(tF) + \sin^2(tF) = I$.

Zadanie 9.6: Równanie charakterystyczne $W_F(\lambda) = (\lambda - 3)^2 + 1 = 0$ nie ma rzeczywistych pierwiastków, więc macierz ta w przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$ nie ma wektorów własnych. Ma takowe w skompleksyfikowanej przestrzeni wektorowej V^C, tj. takiej, w której dopuszcza się kombinacje liniowe wektorów bazy z zespolonymi współczynnikami. W takiej przestrzeni $\lambda_\pm = 3 \pm i$, a wektory własne można wybrać np. w postaci (utożsamiamy tu wektor z jego składowymi w bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$)

$$\mathbf{w}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix},$$

czyli

$$(\mathbf{w}_+, \mathbf{w}_-) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

Figurująca tu macierz to $R_{(e\leftarrow w)}$. Macierz odwrotną dostajemy przez znane fiku-miku

$$R_{(w\leftarrow e)} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & i \end{pmatrix}.$$

Sprawdzamy $F_{(w)(w)} = R_{(w\leftarrow e)} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{(e\leftarrow w)}$ powinna być macierzą diagonalną z wartościami własnymi na diagonali. I jest

$$\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & 3-i \end{pmatrix}.$$

Macierz F^n najłatwiej znaleźć zatrudniając panów C&H: $\lambda^n = W_F(\lambda)Q_F(\lambda) + a_1\lambda + a_0$ i wstawiając za λ wartości własne znajdujemy

$$
\begin{aligned}
(3+i)^n &= (3+i)\,a_1 + a_0\,,\\
(3-i)^n &= (3-i)\,a_1 + a_0\,.
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2i}\left[(3+i)^n - (3-i)^n\right],\\
a_0 &= \frac{1}{2i}\left[(3+i)(3-i)^n - (3-i)(3+i)^n\right].
\end{aligned}
$$

Zatem $F^n = a_1F + a_0I$, czyli

$$
F^n = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i[(3+i)^n + (3-i)^n] & (3-i)^n - (3+i)^n \\ (3+i)^n - (3-i)^n & i[(3+i)^n + (3-i)^n] \end{pmatrix}.
$$

Macierz $\exp(tF)$ można znaleźć tym samym sposobem, ale można jeszcze inaczej, korzystając z tego, że $F = 3I + T$, gdzie

$$
T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

jest prawie (bo brakuje czynnika i) generatorem dwuwymiarowych obrotów i dzięki temu $T^2 = -I$, $T^3 = -T$, a $T^4 = I$. Zatem

$$
\begin{aligned}
e^{tF} = e^{3tI}\,e^{tJ} &= e^{3t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\,T^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\,T^{2n+1}\right)\\
&= e^{3t}\left(I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\
&= e^{3t}\,(I\cos t + F\sin t) = e^{3t}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Uwaga: numer $\exp(3tI + tT) = \exp(3tI)\exp(tT)$ przechodzi tylko dlatego, że $IT = TI$ bo I to jest macierz jednostkowa! Poza tym $\exp(3tI) = \exp(3t)I$. Proszę sprawdzić metodą panów C&H, albo metodą przez diagonalizację, że wyjdzie to samo.

Zadanie 9.7: Macierz F ma dwie zespolone wartości własne.

$$
W_F(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2\,,
$$

skąd znajdujemy $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$. Wektory własne znajdujemy rozwiazując równanie

$$
\begin{pmatrix} 2\mp i & 1 \\ -5 & -2\mp i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Rozwiązaniami są

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-i \end{pmatrix}.$$

Aby napisać macierze F^n i $\exp(tF)$ wykorzystamy najpierw metodę panów C&H:

$$\lambda^n = W_F(\lambda)\, Q_{F,n}(\lambda) + a_1\lambda + a_0\,,$$

i podstawiając tu $\lambda = \lambda_1$ i $\lambda = \lambda_2$ dostajemy

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= a_1(1+i) + a_0\,,\\ (1-i)^n &= a_1(1-i) + a_0\,,\end{aligned}$$

skąd znajdujemy $a_1 = [(1+i)^n - (1-i)^n]/2i$ oraz $a_0 = [(1+i)(1-i)^n - (1-i)(1+i)^n]/2i$. Oba współczynniki, a_0 i a_1 są czysto rzeczywiste, tak jak być powinno. Zatem, wykorzystując twierdzenie C-H,

$$\begin{aligned}F^n &= W_F(F)\, Q_{F,n}(F) + a_1F + a_0I = a_1F + a_0I\\ &= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} (2+i)(1+i)^n - (2-i)(1-i)^n & (1+i)^n - (1-i)^n \\ 5(1-i)^n - 5(1+i)^n & -(2-i)(1+i)^n - (2+i)(1-i)^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Można (i należy!) sprawdzić, że wzór ten dajepoprawnie F, F^2. W podobny sposób znajdujemy $\exp(tF)$ jako kombinację $a_1F + a_0I$, w której a_1 i a_0 są rozwiązaniami układu

$$\begin{aligned}e^{t(1+i)} &= a_1(1+i) + a_0\,,\\ e^{t(1-i)} &= a_1(1-i) + a_0\,.\end{aligned}$$

Otrzymujemy $a_1 = e^t \sin t$, $a_0 = e^t(\cos t - \sin t)$

$$e^{tF} = e^t \sin t \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + e^t(\cos t - \sin t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t & \sin t \\ -5\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}.$$

Te same macierze F^n i $\exp(tF)$ można otrzymać także rozkładając ogólny wektor na wektory własne macierzy F:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{(1-2i)a - ib}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix} + \frac{(1+2i)a + ib}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2-i \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$F^n\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{(1-2i)a - ib}{2}\,(1+i)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix} + \frac{(1+2i)a + ib}{2}\,(1-i)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2-i \end{pmatrix}.$$

Dodając te wektory i "odczepiając się" od ogólnego wektora zapisujemy to w postaci

$$F^n\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

gdzie współczynniki x_{ij} okazują się tymi samymi elementami macierzy F^n, ktŕore znaleliśmy już wyżej. Tak samo

$$e^{tF}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{(1-2i)a-ib}{2}\, e^{t(1+i)}\begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix} + \frac{(1+2i)a+ib}{2}\, e^{t(1-i)}\begin{pmatrix} 1 \\ -2-i \end{pmatrix},$$

i po uporządkowaniu i "odczepieniu się" od dowolnego wektora znajdziemy te samą macierz, co poprzednio.

Zadanie 9.8: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2+3i$, $\lambda_3 = 2-3i$. Odpowiadające im wektory własne (można je zawsze pomnożyć przez jakąś zespoloną liczbę$\neq 0$):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2-3i \\ 3+3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 9.9: Najpierw sprawdzimy, czy macierz X jest diagonalizowalna. Pierwiastkami jej wieloamianu charakterystycznego

$$W_X(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-4)(\lambda-1)^2,$$

są $\lambda_2 = 4$ (jednokrotny) i $\lambda_1 = 1$ o krotności 2. Nadal więc nie wiadomo, czy macierz jest diagonalizowalna. Szukamy więc jej wektorów własnych: równanie

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ma jako swoje rozwiązanie $a = c = 1$, $b = 0$, a równanie

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ma dwa niezależne rozwiązania: $a = b = 0$, $c = 1$ oraz $a = b = 1$ i $c = 0$. Są więc trzy wektory własne (przyjmujemy, że macierz F jest macierzą odwzorowania zapisanego w bazie $\mathbf{e}_i$)

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i macierz X jest diagonalizowalna. Macierz tu stojąca to $R_{(e\leftarrow w)}$. Odwrotna ma postać

$$R_{(w\leftarrow e)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzamy iloczyn $R_{(w\leftarrow e)} \cdot X(e)(e) \cdot R_{(e\leftarrow w)}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \equiv D.$$

Jest ok. Zatem $X = X_{(e)(e)} = R_{(e\leftarrow w)} \cdot D \cdot R_{(w\leftarrow e)}$. Jeśli teraz napiszemy macierz Y taką, że $Y^2 = D$, to macierz $R_{(e\leftarrow w)} \cdot Y \cdot R_{(w\leftarrow e)}$ podniesiona do kwdratu da X. Macierz D jest diagonalna i, zgodnie z tym, co było w skrypcie, macierz Y sklada się z bloków odpowiadających podprzestrzeniom własnym macierzy D: wartości własnej $\lambda_3 = 4$ odpowiada w macierzy Y blok 1×1 o elemencie ± 2 w prawym dolnym jej rogu. Natomiast wartości własnej $\lambda = 1$ odpowiada w macierzy Y blok 2×2 wypełniający jej lewy górny róg. Najogólniejsza macierz, które podniesiona do kwadratu daje $I_{2\times 2}$ została znaleziona w skrypcie w zadaniu 44. Miała ona postać

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -ad - bc & 2ac \\ -2bd & ad + bc \end{pmatrix},$$

i to tę macierz (w której a, b c i d są dowolne - byle $ad - bc \neq 0$, mogą być nawet zespolone - w ten sposób rozszerzamy naszą konstrukcję na wszystkie macierze zespolone, które podniesione do kwadratu dają X) należy wstawić jako lewy górny blok macierzy Y. Zatem macierze, które podniesione do kwadratu dają X można zapisać w postaci

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ad - bc & 2ac & 0 \\ -2bd & ad + bc & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2(ad - bc) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 9.10: Łatwo jest podać postać trzech macierzy oddzielnych obrotów wokół trzech osi (wyznaczanych przez wektory bazy $\mathbf{e}_i$). Prosty rysunek pozwala się przekonać, że jeśli obrót następuje wokół osi wektora $\mathbf{e}_3$ o kąt φ (przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara), to

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi\,, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi\,, \end{aligned}$$

Transformację tę można zapisać jako

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\approx (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - i\varphi \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Wydzielona macierz, nazwijmy ją $J^3 \equiv J^z$, jest *generatorem* obrotów wokół osi z (wektora $\mathbf{e}_3$). Czynnik $-i$ wydzielony z niej został zgodnie z powszechną konwencją (może nie matematyków, ale napewno fizyków). Analogicznie można rozpatrzyć obroty wokół osi y oraz wokół osi z i ustalić, że

$$J^1 = J^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^2 = J^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Można też sprawdzić stosując poznane już metody, że

$$e^{-i\vartheta J^x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad e^{-i\varphi J^2} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix},$$
$$e^{-i\varphi J^3} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Podaną w zadaniu macierz można przedstawić jako sumę J^x, J^y i J^z:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -i\left(-2J^1 + J^2 - 2J^3\right) = -i3\left(n^1J^1 + n^2J^2 + n^3J^3\right),$$

gdzie $n^1 = -2/3$, $n^2 = 1/3$ i $n^3 = -2/3$ są składowymi w bazie $\mathbf{e}_i$ jednostkowego wektora $\mathbf{n}$. Macierz $R_{(e\leftarrow e')} = \exp(\frac{\pi}{3}J)$ realizuje więc zmianę bazy będącą obrotem o kąt π wokół osi $\mathbf{n}$.

Równanie charakterystyczne macierzy J

$$W_J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 9\lambda,$$

daje jako jej wartości własne $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3i$ i $\lambda_3 = -i$. Macierz $\exp(J\pi/3)$ znajdujemy metodą panów C&H: z równań

$$\begin{aligned} e^{0\cdot\pi/3} &= a_2\cdot 0^2 + a_1\cdot 0 + a_0, \\ e^{i\pi} &= a_2\cdot(3i)^2 + a_1\cdot(3i) + a_0, \\ e^{-i\pi} &= a_2\cdot(-3i)^2 + a_1\cdot(-3i) + a_0, \end{aligned}$$

znajdujemy (pamietamy: $e^{\pm i\pi} = -1$ po prostu!) $a_0 = 1$, $a_2 = 0$, $a_2 = 2/9$. Zatem

$$\begin{aligned} e^{\pi J/3} = \frac{2}{9}J^2 + I &= \frac{2}{9}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ -4 & -7 & -4 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jak łatwo obliczyć wyznacznik tej macierzy jest równy 1, tak jak każdego uczciwego obrotu. Można też sprawdzić, że wektor **n** jest jej wektorem własnym z wartością własną równą jeden:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ -4 & -7 & -4 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

co jest mniej więcej oczywiste (ale w zaproponowanym tu podejściu niezupełnie jeszcze uzasadnione, bo macierz R jest tu traktowana jak macierz zmiany bazy, a nie jak macierz odwzorowania przyporządkowującego żywemu wektorowi żywy obrócony wektor; jeden punkt widzenia z drugim można powiązać, ale wymaga to pewnej gimnastyki myślowej, więc na razie nie będziemy się w to wdawać): obrót nie zmienia wektora równoległego do osi obrotu.

Zadanie 10.1: Macierz F ma jedną podwójną wartość własną, bo

$$W_F(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 .$$

Ma ona tylko jeden wektor własny: równanie

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ma tylko jedno liniowo niezależne rozwiązanie

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aby napisać macierze F^n i $\exp(tF)$ wykorzystamy najpierw metodę panów C&H opierając się na tym, że skoro $\lambda = 1$ jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu charakterystycznego, to zarówno $W_F(1) = 0$, jak i $W'_F(1) = 0$. Zatem w obu tożsamościach wielomianowych

$$\begin{aligned} \lambda^n &= W_F(\lambda)\, Q_{F,n}(\lambda) + a_1\lambda + a_0 , \\ n\lambda^{n-1} &= W'_F(\lambda)\, Q_{F,n}(\lambda) + W_F(\lambda)\, Q'_{F,n}(\lambda) + a_1 , \end{aligned}$$

z których druga wynika z pierwszej przez zróżniczkowanie stronami po λ, po podstawieniu $\lambda = 1$ znikają człony z W_F i $Q_{F,n}$. Dostaje się w ten sposób dwa równania na a_1 i a_0

$$1 = a_1 + a_0 , \qquad n = a_1 ,$$

Stąd

$$F^n = nF + (1-n)I = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & 1-2n \end{pmatrix}.$$

Wzór ten łatwo sprawdzić dla kilku pierwszych wartości n. Analogicznie, rozwiązanie równań otrzymanych przez podstawienie $\lambda = 1$ do tożsamości

$$\begin{aligned} e^{t\lambda} &= W_F(\lambda)\, Q_{F,e}(\lambda) + a_1\lambda + a_0\,, \\ t\, e^{t\lambda} &= W'_F(\lambda)\, Q_{F,e}(\lambda) + W_F(\lambda)\, Q'_{F,e}(\lambda) + a_1\,, \end{aligned}$$

(znów druga tożsamość jest pochodną pierwszej po λ) daje $a_0 = (1-t)e^t$, $a_1 = t\, e^t$ i

$$e^{tF} = t\, e^t\, F + (1-t)\, e^t\, I = \begin{pmatrix} 2t\, e^t + e^t & 2t\, e^t \\ -2t\, e^t & e^t - 2t\, e^t \end{pmatrix}.$$

Drugi sposób opiera się na wykorzystaniu twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe, który to rozkład jest tu trywialny: cała przestrzeń wektorowa jest jedną podprzestrzenią pierwiastkową bo, jak łatwo sprawdzić,

$$(F-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}^2 = 0\,.$$

Zatem $F^n = [I + (F-I)]^n = I + n\,(F-I) + \ldots$, ale wyrazy wykropkowane są już macierzami zerowymi. Zatem

$$F^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & -2n+1 \end{pmatrix}.$$

Wyszła oczywiście ta sama macierz F^n, co metodą panów C&H. Podobnie,

$$e^{tF} = e^{tI + t(F-I)} = e^{tI} \cdot e^{t(F-I)} = e^{tI}\, [I + t(F-I) + \ldots]\,.$$

gdzie znów wyrazy wykropkowane są już macierzami zerowymi. Zatem ($e^{tI} = e^t\, I$)

$$e^{tF} = e^t \begin{pmatrix} 1+2t & 2t \\ -2t & 1-2t \end{pmatrix},$$

tak jak poprzednio.

Zadanie 10.2:
a) Rekurencję z konkretnymi warunkami początkowymi można rozwiązać podstawiając po prostu do niej Ansatz $D_n = \mathbb{A}\lambda^n$. Da to równanie (charkterystyczne) $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, które ma dwa pierwiastki, ale tu akurat zespolone. Nie zrażając się tym piszemy

$$D_n = \mathbb{A} \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \mathbb{A}^* \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^n,$$

ponieważ warunki początkowe są rzeczywiste, od razu napisaliśmy wzór tak, by wszystkie liczby D_n były rzeczywiste (muszą one takie być, skoro warunki początkowe są). Stałe dowolne są jednak wciąż dwie. Warunki początkowe $D_1 = a$, $D_2 = b$ dają

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \mathbb{A}^* \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} &= a\,, \\ \mathbb{A}\, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + \mathbb{A}^* \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} &= b\,, \end{aligned}$$

czyli $\mathbb{A}+\mathbb{A}^*+i\sqrt{3}\,(\mathbb{A}-\mathbb{A}^*)=2a$, $-(\mathbb{A}+\mathbb{A}^*)+i\sqrt{3}\,(\mathbb{A}-\mathbb{A}^*)=2b$. Dodając i odejmując te równania jedno od drugiego dostajemy $\mathbb{A}+\mathbb{A}^*=a-b$ i $i\sqrt{3}(\mathbb{A}-\mathbb{A}^*)=a+b$, a stąd

$$\mathbb{A}=\frac{a-b}{2}-i\,\frac{a+b}{2\sqrt{3}}\,.$$

Zatem przy $D_1=0$, $D_2=1$ rozwiązaniem rekurencji jest

$$D_n=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\left(1-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n,$$

a ogólny wzór ma postać

$$D_n=\frac{1}{2}\left(D_1-D_2-i\,\frac{D_1+D_2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(D_1-D_2+i\,\frac{D_1+D_2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Analogiczne rachunki powstają przy podejściu macierzowym. Rekurencję można zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix}D_n\\D_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}D_2\\D_1\end{pmatrix},$$

i jej rozwiązanie sprowadza się do podniesienia do $n-2$ potęgi macierzy F, ktřej wartościami własnymi są wyznaczone wyżej zespolone pierwiastki $\lambda=(1+i\sqrt{3})/2$ i λ^* równania charakterystycznego $\lambda^2-\lambda+1=0$. Jak to w metodzie C&H, $F^n=a_1F+a_0I$, a współczynniki a_1 i a_0 znajdujemy z równanń

$$\lambda^n=a_1\,\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+a_0\,,\qquad(\lambda^*)^n=a_1\,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}+a_0\,.$$

Dają one

$$a_1=-\frac{i}{\sqrt{3}}\,[\lambda^n-(\lambda^*)^n]\,,\qquad a_0=-\frac{i}{\sqrt{3}}\,[\lambda(\lambda^*)^n-\lambda^*\lambda^n]\,.$$

Możemy więc napisać (ponieważ potrzebna jest nam $n-2$ potęga macierzy dokonujemy w a_1 i a_0 zamiany n na $n-2$)

$$\begin{aligned}D_n&=a_1F_{11}D_2+a_0D_2+a_1F_{12}D_1=a_1(D_2-D_1)+a_0D_2\\&=-i\,\frac{D_2-D_1}{\sqrt{3}}\left[\lambda^{n-2}-(\lambda^*)^{n-2}\right]-i\,\frac{D_2}{\sqrt{3}}\left[\lambda(\lambda^*)^{n-2}-\lambda^*\lambda^{n-2}\right].\end{aligned}$$

Wygląda to nieco inaczej, niemniej jest tym samym wzorem, co otrzymany poprzednią metodą. Aby się o tym przekonać, należy poprzedni wzór przepisć korzystając ze związku $[(1\pm i\sqrt{3})/2]^2=(-1\pm i\sqrt{3})/2$ i porównując w obu wzorach odpowienie współczynniki przy D_1 i D_2.

Oczywiście, ponieważ macierz F jest diagonalizowalna, macierz F^n można znaleźć także innymi sposobami: przez diagonalizację F i przez rozłożenie wektora na który F^n ma zadziałać na wektory własne F; jeśli wektor ten jest ogólny, daje się w ten sposób otrzymać całą macierz F^n.

b) W tym przypadku równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, uzyskane po podstawieniu Ansatzu $D_n = A\lambda^n$, ma tylko jeden, podwójny pierwiastek $\lambda = 2$. Nie jest więc od razu jasne, czy można tak tę rekurencję rozwiązać. Można. Można skądeś wiedzieć, jaki tu chwyt działa, a jak się nie wie, ale się jest fizykiem, to się można posłużyć sztuczką fizyczną polegającą na odwołaniu się do ciągłości.[29] Zmieńmy tę rekurencję na $D_n = 4D_{n-1} - (4-\varepsilon^2)D_{n=2}$. Równanie charakterystyczne przejdzie w $\lambda^2 - 4\lambda + 4 - \varepsilon^2 = 0$ i będzie już miało dwa różne pierwiastki: $\lambda_1 = 2 \pm 2|\varepsilon|$. Teraz mozna napisać Ansatz

$$D_n = A_+ (2 + 2|\varepsilon|)^n + A_- (2 - 2|\varepsilon|)^n ,$$

i wyznaczyć stałe A_+ i A_- z warunków początkowych:

$$\begin{aligned} D_1 &= A_+ (2 + 2|\varepsilon|) \ + A_- (2 - 2|\varepsilon|) , \\ D_2 &= A_+ (2 + 2|\varepsilon|)^2 + A_- (2 - 2|\varepsilon|)^2 . \end{aligned}$$

Rozwiązujemy ten układzik, najlepiej z pomocą macierzowego fiku-miku

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = -\frac{1}{16(1-\varepsilon^2)|\varepsilon|} \begin{pmatrix} 4(1-|\varepsilon|)^2 & -2(1-|\varepsilon| \\ -4(1+|\varepsilon|)^2 & 2(1+|\varepsilon|) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} .$$

Zatem

$$\begin{aligned} D_n = -\frac{1}{8(1-\varepsilon^2)|\varepsilon|} &\left\{ \left[2(1-|\varepsilon|)^2 D_1 - (1-|\varepsilon|) D_2 \right] (2 + 2|\varepsilon|)^n \right. \\ &\left. + \left[-2(1+|\varepsilon|)^2 D_1 + (1+|\varepsilon|) D_2 \right] (2 - 2|\varepsilon|)^n \right\} . \end{aligned}$$

Należy teraz wziąć granicę $|\varepsilon| \to 0$. W czynniku $(1 - \varepsilon^2)$ w mianowniku można od razu położyć $\varepsilon = 0$, a żeby pozbyć się gołego $1/|\varepsilon|$, rozwijamy wyrażenie w kręconym nawiasie do pierwszego rzędu w $|\varepsilon|$:

$$\begin{aligned} D_n = -\frac{2^{n-3}}{|\varepsilon|} &\{ [2(1 - 2|\varepsilon| + \ldots) D_1 - (1 - |\varepsilon|) D_2] (1 + n|\varepsilon| + \ldots) \\ &+ [-2(1 + 2|\varepsilon| + \ldots) D_1 + (1 + |\varepsilon|) D_2] (1 - n|\varepsilon| + \ldots) \} . \end{aligned}$$

trochę porządkujemy

$$\begin{aligned} D_n = -\frac{2^{n-3}}{|\varepsilon|} &\{ 2D_1 [(1 - 2|\varepsilon|)(1 + n|\varepsilon|) - (1 + 2|\varepsilon|)(1 - n|\varepsilon|)] \\ &- D_2 [(1 - |\varepsilon|)(1 + n|\varepsilon|) - (1 + |\varepsilon|)(1 - n|\varepsilon|)] \} . \end{aligned}$$

[29] Przyroda nie jest ciągła - są atomy, kwanty itd.; ale do matematyki - dziedziny czystej, regularnej i pięknej - nieciągłość (np. takie potworki, jak funkcje nieciagłe w żadnym punkcie) wprowadzają tylko matematycy. Dlaczego? Pewnie dlatego, że sami są częścią świata fizycznego.

Wyrazy bez ε w nawiasie kreconym sie redukuja i dostajemy

$$D_n = (2-n)\,2^{n-1}D_1 + (n-1)\,2^{n-2}D_2\,.$$

Fizyk potrafi!

W przypadku tej rekurencji sposób macierzowy jest jednak prostszy. Jak zwykle piszemy

$$\begin{pmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = F^{n-2}\begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i by znaleźć n-tą potęgę macierzy F wykorzystujemy metodę CH: $F^n = a_1F + a_0I$, gdzie a_1 i a_0 są rozwiązaniami układu (oczywiście równanie charakrerystyczne i jego jeden pierwiastek podwójny są takie same, jak w pierwszej metodzie)

$$2^n = 2a_1 + a_0\,, \qquad n\,2^{n-1} = a_1\,,$$

(drugie równanie bierze się ze zróżniczkowania tożsamości $\lambda^n = W_F(\lambda)Q_{F,n}(\lambda) + a_1\lambda + a_0$ po λ) czyli $a_0 = 2^n(1-n)$. Wstawiamy to do $D_n = a_1F_{11}D_2 + a_0D_2 + a_1F_{12}D_1 = 4a_1(D_2 - D_1) + a_0D_2$ (zamieniając w a_1 i a_0 n na $n-2$) i mamy

$$D_n = 4(n-2)\,2^{n-3}(D_2 - D_1) + 2^{n-2}(3-n)D_2\,.$$

I już. Postać macierzy F^n w tym przypadku to

$$F^n = \begin{pmatrix} n\,2^{n+1} + (1-n)\,2^n & -n\,2^{n+1} \\ n\,2^{n-1} & (1-n)\,2^n \end{pmatrix}.$$

Zachęcam do otrzymania jej metodą rozkładu na podprzestrzenie pierwiastkowe.

Zadanie 10.3: Wielomian charakterystyczny macierzy A

$$W_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -4 \\ 4 & -3-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3) = -(\lambda-1)^2(\lambda+3)\,,$$

ma dwa pierwiastki $\lambda_1 = 1$ o krotności 2 i drugi, $\lambda_2 = -3$ jednokrotny. Wektor własny odpowiadający $\lambda_2 = -3$ znajdujemy jako rozwiązanie równania

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gołym okiem widać, że $a = b = c = 1$ jest rozwiązaniem. Tu wiadomo, że jest tylko jeden. Teraz wektor, lub wektory własne odpowiadający lub odpowiadające $\lambda_2 = 1$ powienien(nny) być jako rozwiązaniem(iami) równania

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Widać (znów nieuzbrojonym okiem), że są dwa rozwiązania. Zatem zestaw wektorów własnych macierzy A, to

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -3: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz jest więc diagonalizowalna.

Macierz $\exp(tA)$ można znaleźć na trzy sposoby. Najpierw po prostu rozłożymy dowolny wektor na wektory własne (rachunki nie są skomplikowane):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-a+b+c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Działamy na obie strony tej równości macierzą $\exp(tA)$ i korzystając z tego, że po prawej stronie wektory są wektorami własnymi, otrzymujemy

$$e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^t\,(a-c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t\,(a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t}(-a+b+c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zbieramy prawą stronę w jeden wektor

$$e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2a-b-c)\,e^t + (-a+b+c)\,e^{-3t} \\ (a-c)\,e^t + (-a+b+c)\,e^{-3t} \\ (a-b)\,e^t + (-a+b+c)\,e^{-3t} \end{pmatrix},$$

i "odczepiamy sie" od wektora (a,b,c):

$$e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,e^t - e^{-3t} & e^{-3t} - e^t & e^{-3t} - e^t \\ e^t - e^{-3t} & e^{-3t} & e^{-3t} - e^t \\ e^t - e^{-3t} & e^{-3t} - e^t & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

I jest, bo macierz widniejąca po prawej stronie musi być, wobec dowolności wektora po obu stronach, macierzą $\exp(tA)$.

Znajdziemy teraz tę samą macierz $\exp(tA)$ metodą CH. Ponieważ jest to przypadek z dwukrotną wartością własną macierz A spełnia zredukowany wielomian charakterystyczny $\tilde{W}_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+3)$:

$$-(A-I)(A+3I) = -\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem każda funkcja $f(A)$ macierzy A rozwijalna w szereg potęgowy (tzn. taka, że $f(x)$ jest rozwijalna wokół zera), którą wobec tego można napisać jako tożsamość wielomianową

$$f(A) = \tilde{W}_A(A)Q_{A,f}(A) + a_1 A + a_0 I\,,$$

w której reszta jest wielomanem w A stopnia niższego, niż wielomian $\tilde{W}_A(A)$ przez który dzielimy wielomian (być może o nieskończonej liczbie wyrazów) $f(A)$, redukuje się do

$$f(A) = a_1 A + a_0 I\,.$$

Współczynniki a_1 i a_0 znajdujemy wstawiając w zwykłą tożsamość wielomianową

$$f(\lambda) = \tilde{W}_A(\lambda) Q_{A,f}(\lambda) + a_1\lambda + a_0 I\,,$$

wartości własne. W przypadku $f(A) = \exp(tA)$ mamy

$$e^t = a_1 + a_0\,, \qquad e^{-3t} = -3\,a_1 + a_0\,,$$

i stad $a_1 = (e^t - e^{-3t})/4$, $a_0 = (3\,e^t + e^{-3t})/4$. Zatem

$$U = e^{tA} = \frac{1}{4}\left(e^t - e^{-3t}\right)\begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(3\,e^t + e^{-3t}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gdy się toto złoży w jedną macierz, to wyjdzie to samo, co poprzednio.

Macierz odwrotan U^{-1} można napisać od ręki $U^{-1} = \exp(-tA)$. Wystarczy więc wszędzie w otrzymanej wyżej macierzy zmienić znak przed t. No i zachęcam do wymnożenia mcierzy

$$\begin{pmatrix} 2\,e^t - e^{-3t} & e^{-3t} - e^t & e^{-3t} - e^t \\ e^t - e^{-3t} & e^{-3t} & e^{-3t} - e^t \\ e^t - e^{-3t} & e^{-3t} - e^t & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\,e^{-t} - e^{3t} & e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{-t} - e^{3t} & e^{3t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{-t} - e^{3t} & e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Jest to sprawdzian, żeśmy dobrze obliczyli $\exp(tA)$!

Można jeszcze tę samą macierz otrzymać z jej diagonalnej postaci $\exp(tA)$

$$[\exp(tA)]_{(w)(w)} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix},$$

jaką ma ona w bazie tworzonej przez jej wektory własne. Baza ta wiąże się z wyjściową bazą $\mathbf{e}_i$ przez macierz zmiany bazy $R_{(e\leftarrow w)}$

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz odwrotną $R_{(w\leftarrow e)} = R^{-1}_{(e\leftarrow w)}$ też łatwo otrzymać rozwiazując odpowiedni układzik rówanań

$$R_{(w\leftarrow e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I teraz $\exp(tA) = [\exp(tA)]_{(e)(e)} = R_{(e\leftarrow w)} \cdot [\exp(tA)]_{(w)(w)} \cdot R_{(w\leftarrow e)}$:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po pracowitym wymnożeniu wyjdzie po raz trzeci ta sama macierz.

Zadanie 10.4: Wielomian charakterystyczny

$$W_F(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(x-2)(x-1)^2,$$

ma pierwiastek pojedyńczy $\lambda_1 = 2$ i pierwiastek podwójny $\lambda_2 = 1$. Odpowiadającymi tym wartościom własnym wektorami własnymi są

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jest więc tylko jeden wektor odpowiadający wartości własnej $\lambda_2 = 1$ i macierz nie jest diagonalizowalna. Wartości tej odpowiadć powinien zatem jeszcze wektor pierwiastkowy, na którym zeruje się macierz $(F-I)^2$; spełnia on więc równanie

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Równanie to spełnia oczywiście wektor własny o $\lambda_2 = 1$, ale tu chodzi o inny wektore od wektora własnego liniowo niezależny. Takim jest np.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe jest następujący

$$V = V_1 \oplus V_2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \oplus \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aby znaleźć macierz F^n rozkładamy ogólny wektor na wektory rozpinające podprzestrzenie pierwiastkowe

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (b-a) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-b+c) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

i działamy na tę równość macierzą F^n:

$$F^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (b-a)2^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-b+c)(I+n(F-I)+\ldots) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wykorzystaliśmy to, że pierwsze dwa wektory po prawej stronie są wektorami własnymi; przy działaniu na trzeci napisaliśmy $F^n = [I+(F-I)]^n = I+n(F-I)+\frac{1}{2}n(n-1)(F-I)^2+\ldots$, ale macierz $(F-I)^2$ i dalsze (wykropkowane) działając na wektor pierwiastkowy daje zero. Zatem

$$F^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (b-a)2^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-b+c) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + n(a-b+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zbieramy wszystko w jeden wektor i odczepiamy się od dowolnego wektora:

$$F^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)a - nb + nc \\ (n+1-2^n)a + (2^n-n)b + nc \\ (1-2^n)a + (2^n-1)b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & -n & n \\ n+1-2^n & 2^n-n & n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Uzyskana po prawej stronie macierz musi być macierzą F^n W podobny sposób dostajemy macierz $\exp(tF)$:

$$e^{tF} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{2t}(b-a) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t (a-b+c)(I+t(F-I)+\ldots) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Po analogicznych operacjach, jak wyżej, dostaje się

$$e^{tF} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)\,e^t & -t\,e^t & t\,e^t \\ (1+t)\,e^t - e^{2t} & -t\,e^2 + e^{2t} & t\,e^t \\ e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Te same macierze można dostać metodą CH.

$$f(F) = a_2F^2 + a_1F + a_0I\,,$$

gdzie współczynniki a_2, a_1 i a_0 są wznaczone przez równości

$$\begin{aligned} f(2) &= 4a_2 + 2a_1 + a_0\,, \\ f(1) &= a_2 + a_1 + a_0\,, \\ f'(1) &= 2a_2 + a_1\,, \end{aligned}$$

Rozwiązaniami są $a_0 = -2f'(1) + f(2)$, $a_1 = 3f'(1) - 2f(2) + 2f(1)$, $a_2 = -f'(1) + f(2) - f(1)$. Zatem

$$\begin{aligned} e^{tF} = {} & \left(e^{2t} - (1+t)\,e^t\right) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ & + \left((2+3t)\,e^t - 2e^{2t}\right) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \left(e^{2t} - 2t\,e^t\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Po zebraniu w całość, otrzymuje się tę samą macierz, co poprzednio.

Zadanie 10.5: Trochę to jest zadanie dla walecznych, bo rachunki są dłuższe. Ale ma ono to do siebie, że jest mniej trywialne, bo się łączą w nim różne przypadki. Najpierw wielomian charakterystyczny.

$$W_B(\lambda) = -\lambda^5 + 2\lambda^3 - \lambda = -\lambda\,(\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1) = -\lambda\,(\lambda^2 - 1)^2 = -\lambda\,(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2\,.$$

Macierz B ma więc jedną jednokrotną wartość własną $\lambda_1 = 0$ i dwie podwójne: $\lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = 1$. Wektory własne są następujące:

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wartości własnej $\lambda_3 = 1$ odpowiadają dwa wektory własne, ale wartości własnej $\lambda_2 = -1$ tylko jeden wektor. Macierz B nie jest więc diagonalizowalna.

Macierz $\exp(tB)$ można w tym przypadku znaleźć metodą CH. Ponieważ jednej podwójnej wartości własnej odpowiadają jednak dwa wektory, trzeba wykorzystać zredukowany wielomian charakterystyczny $\tilde{W}_B(\lambda) = -\lambda\,(\lambda+1)^2(\lambda-1)$, który jest czwartego stopnia. Wykorzystywana do tego tożsamość wielomianowa ma postać ($f(\lambda)$ jest dowolną funkcją rozwijalną w szereg wokół $\lambda = 0$)

$$f(\lambda) = \tilde{W}_B(\lambda) Q_{B,f}(\lambda) + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\,.$$

Podstawiamy do niej $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = 1$, co daje trzy równania

$$f(0) = a_0\,, \qquad f(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0\,, \qquad f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0\,,$$

Czwarte równanie uzyskujemy różniczkując tożsamość po λ i podstawiając $\lambda = -1$ (tę wartość własną, której odpowiada tylko jeden wektor własny i która jest odpowiedzialna za niediagonalizowalność macierzy B).

$$f'(-1) = 3a_3 - 2a_2 + a_1\,.$$

Razem są więc cztery niezbyt skomplikowane równania na cztery współczynniki. Ich rozwiązaniami są

$$\begin{aligned}
a_0 &= f(0)\,, \\
a_1 &= \frac{1}{4}\left[-2f'(-1) + f(1) + 4f(0) - 5f(-1)\right], \\
a_2 &= \frac{1}{2}\left[f(1) - 2f(0) + f(-1)\right], \\
a_3 &= \frac{1}{4}\left[2f'(-1) + f(1) - 4f(0) + 3f(-1)\right].
\end{aligned}$$

Macierz np. $\exp(tB)$ dostajemy jako

$$e^{tB} = a_3 B^3 + a_2 B^2 + a_1 B + a_0 I\,,$$

z $f'(-1) = t\,e^{-t}$, $f(1) = e^t$, $f(-1) = e^{-t}$ i $f(0) = 1$. Powinno wyjść (tak daje Mathematica) $[e^{tB}]_{11} = 1 - e^{-t} + e^t - 2t\,e^{-t}$ i (o dziwo!) $[e^{tB}]_{55} = 1$.

Podprzestrzenie pierwiastkowe odpowiadające macierzy B są oczywiście trzy $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Podprzestrzenie odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_3 = 1$ są rozpinane przez wektory własne. Podprzestrzeń V_2 jest rozpinana przez wektor własny o wartości własnej -1 i dodatkowy wektor pierwiastkowy, na którym zeruje się macierz $(B+I)^2$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Równanie to spełnia oczywiście wektor własny odpowiadający wartości własnej -1, ale trzeba znaleźć liniowo niezależny od niego inny wektor. Taki jest np. wektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 10.6: Macierz F ma pojedynczą $\lambda_1 = 3$ i podwójną wartość własną $\lambda_2 = 1$. Mimo to jest diagonalizowalna, bo ma trzy wektory własne

$$\lambda_1 = 3: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mamy tym samym macierz

$$R_{e\leftarrow w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

przejścia z bazy $\mathbf{e}_i$ (pierwotnej bazy, w której była dana macierz $F = F_{(e)(e)}$) do bazy wektorów własnych. Macierz odwrotna, $R_{w\leftarrow e}$, ma postać:

$$R_{w\leftarrow e} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

W bazie wektorów własnych macierz iloczynu skalarnego, takiego, że wektory odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne ma postać

$$S^{(w)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & C \\ 0 & C & D \end{pmatrix},$$

przy czym $A > 0$, $B > 0$ i $BD - C^2 > 0$, aby był a to forma kwadratowa dodatnio określona. W bazie $\mathbf{e}_i$ macierz tego iloczynu skalarnego ma zatem postać

$$\begin{aligned} S^{(e)} = R^T_{w\leftarrow e} \cdot S^{(w)} \cdot R_{w\leftarrow e} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & C \\ 0 & C & D \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A+B+D-2C & -A+B-D & A-B-D+2C \\ -A+B-D & A+B+D+2C & -A-B+D \\ A-B-D+2C & -A-B+D & A+B+D-2C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na koniec sprawdzamy, czy macierz $S^{(e)} \cdot F_{(e)(e)}$ jest symetryczna:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A+B+D-2C & -A+B-D & A-B-D+2C \\ -A+B-D & A+B+D+2C & -A-B+D \\ A-B-D+2C & -A-B+D & A+B+D-2C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3A+B+D-2C & -3A+B-D & 3A-B-D+2C \\ -3A+B-D & 3A+B+D+2C & -3A-B+D \\ 3A-B-D+2C & -3A-B+D & 3A+B+D-2C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rzeczywiście, jest...

Zadanie 10.7: Wielomian charakterystyczny macierzy $H = H_{(e)(e)}$

$$W_H(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = -(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

ma jeden pierwiastek podwójny $\lambda_1 = 1$ i jeden pojedyńczy pierwiastek podwójny $\lambda_2 = -2$. Ponieważ są one rzeczywiste, zachodzi podejrzenie, że jest to odwzorowanie, ltóre przy odpowiednim doborze iloczynu skalarnego, może być samosprzężone. Do tego jednak macierz H musi być diagonalizowalna. Szukamy więc jej wektorów własnych. Najpierw wektor odpowiadający $\lambda_2 = -2$:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -6i & -6i \\ -3i & 9 & 3 \\ 3i & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nietrudno to rozwiązać i znaleść, że $a = 2$, $b = i$, $c = -i$. A teraz wektor lub wektory odpowiadający(e) $\lambda_2 = 1$:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & -6i & -6i \\ -3i & 3 & 3 \\ 3i & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tu widać gołym okiem, że są dwa liniowo niezależne wektory spełniające tę równość: $a = 1$, $b = i$, $c = 0$ oraz $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$. Macierz H ma zatem trzy wektory własne. Jest więc diagnalizowalna i powinien ostnieć iloczyn skalarny, w którym odwzorowanie H jest samosprzężone. Żeby znaleźć takie iloczyny skalarne, przechodzimy do bazy utworzonej z wektorów własnych $\mathbf{w}_i$ odwzorowania H. Jedną macierz zmiany bazy, $R_{e\leftarrow w}$ mamy "od ręki"

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ i & 1 & i \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Macierz do niej odwrotną, $R_{w\leftarrow e}$, znajdujemy odkręcając ten układ równań wektorowych

$$R_{w\leftarrow e} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i & -2i \\ -i & 1 & -1 \\ 1 & i & i \end{pmatrix}.$$

Sprawdzamy, że macierze te diagonalizują H:

$$R_{w\leftarrow e} \cdot H_{(e)(e)} \cdot R_{e\leftarrow w} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i & -2i \\ -i & 1 & -1 \\ 1 & i & i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -6i & -6i \\ -3i & 5 & 3 \\ 3i & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ i & 1 & i \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = H_{(w)(w)}.$$

W bazie tworzonej przez wektory własne iloczyn skalarny, w którym wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, zapisany jako macierz $S^w_{ij} = (\mathbf{w}_i|\mathbf{w}_j)_S$, musi mieć postać

$$S^w_{ij} = \begin{pmatrix} A & D & 0 \\ D^* & B & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Stałe A, B, D muszą być rzeczywiste i dodatnie. Dodatnia określoność $(\mathbf{v}|\mathbf{v})_S \geq 0$, jeśli $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, wymusza, by $AB - |D|^2 > 0$. No bo jeśli $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 + \gamma\mathbf{w}_3$, to

$$(\mathbf{v}|\mathbf{v})_S = A|\alpha|^2 + B|\beta|^2 - 2\,\mathrm{Re}(D\,\alpha^*\beta) + E|\gamma|^2\,.$$

Można to (trzy pierwsze wyrazy) teraz przerobić na rzeczywistą formę kwadratową pisząc $\alpha = a + i\tilde{a}$, $\beta = b + i\tilde{b}$ i $D = D_r + i\tilde{D}$, i metodą minorową ustalić warunki dodatniości. Macierz takiego iloczynu skalarnego przeflancowana do bazy $\mathbf{e}_i$ zgodnie z przepisem

$$S^{(e)}_{ij} = (\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)_S = (\mathbf{w}_l[R_{w\leftarrow e}]^l{}_i|\mathbf{w}_k[R_{w\leftarrow e}]^k{}_j)_S = ([R_{w\leftarrow e}]^l{}_i)^* S^{(w)}_{lk}[R_{w\leftarrow e}]^k{}_j\,,$$

przyjmie (troche potworną) postać

$$S^{(e)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} B+E & iB+2D^*+iE & -iB+2D^*+iE \\ -iB+2D-iE & B+E+2iD-2iD^* & -B-2iD+E+A-2iD^* \\ iB+2D-iE & -B+2iD+E+A+2iD^* & B-2iD+A+2iD^*+E \end{pmatrix}.$$

Macierz ta jest jak widać hermitowska w sensie $[S^{(e)}]_{ij} = ([S^{(e)}]_{ji})^*$, jak tego wymaga iloczyn skalarny. Możemy wreszcie sprawdzić samosprzężoność odwzorowania H, która powinna się objawiać hermitowskością macierzy $[S^{(e)}]_{ij}[H_{(e)(e)}]^i{}_k$: Obliczamy więc iloczyn $S^{(e)} \cdot H_{(e)(e)}$ i otrzymujemy

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} B-2E & iB+2D^*-2E & -iB+2D^*-2iE \\ -iB+2D+2iE & 4A+B+2i(D-D^*)-2E & 4A-B-2i(D+D^*)+2E \\ iB+2D+2iE & 4A-B+2i(D+D^*)-2E & 4A+B-2i(D-D^*)-2E \end{pmatrix}.$$

Rzeczywiście, macierz ta jest hermitowska: $[S^{(e)} \cdot H_{(e)(e)}]_{ij} = ([S^{(e)} \cdot H_{(e)(e)}]_{ji})^*$.

Zadanie 10.8 Jasne jest, że $\mathbf{v}_n = F^n \cdot \mathbf{v}_0$. Trzeba więc podnieść macierz F do n-tej potęgi i zadziałać na podany wektor.
a) pierwsze macierz jest prosta, bo $F^2 = -I$, ale żeby napisać ogólny wzór wygodniej jest posłużyć się metodą CH. Piszemy tożsamość wielomianową: $\lambda^n = W_F(\lambda)Q_{F,n}(\lambda)+a_1\lambda+a_0$ i korzystając z tego, że $W_F(\pm i) = 0$ (wartościami własnymi macierzy są $\pm i$) znajdujemy, że $2a_0 = i^n+(-i)^n$, $2ia_1 = i^n-(-i)^n$, czyli $a_0 = \cos(n\pi/2)$, $a_1 = \sin(n\pi/2)$. Z twierdzenia CH można więc napisać

$$F^n = F\cos(\frac{\pi}{2}n) + I\sin(\frac{\pi}{2}n) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}n) & \sin(\frac{\pi}{2}n) \\ -\sin(\frac{\pi}{2}n) & \cos(\frac{\pi}{2}n) \end{pmatrix}.$$

Zatem $\mathbf{v}_n = (\cos(\frac{\pi}{2}n), -\sin(\frac{\pi}{2}n))$.

b) W tym przypadku wielomian charakterystyczny macierzy $W_F(\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda+3) = -(\lambda-3)^2(\lambda-1)$ ma jeden pierwiastek pojedyńczy $\lambda = 1$ i jeden $\lambda = 3$ podwójny. Macierz F ma tylko jeden wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda = 3$, czyli nie jest diagonalizowalna. Przy wykorzystywaniu tweirdzenia CH trzeba posłużyć się sztuczką z różniczkowaniem. Równaniami wyznaczającymi współczynniki a_2, a_1 i a_0 w tożsamości wielomianowej $\lambda^n = W_F(\lambda)Q_{F,n}(\lambda) + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ są

$$\begin{aligned} 1^n &= a_2 + a_1 + a_0\,, \\ 3^n &= 9a_2 + 3a_1 + a_0\,, \\ n\,3^{n-1} &= 6a_2 + a_1\,. \end{aligned}$$

Ich rozwiązaniem są $a_2 = (2n\,3^{n-1} - 2^n + 1)/4$, $a_1 = (3^{n+1} - 3 - 8n\,3^{n-1})/2$ i $a_0 = (9 + 3^n - 2\,3^{n+1} + 14n\,3^{n-1})/4$. Zatem $F^n = a_2F^2 + a_1F + a_0I$, czyli

$$F^n = \frac{2n\,3^{n-1} - 2^n + 1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3^{n+1} - 3 - 8n\,3^{n-1}}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{9+3^n-2\,3^{n+1}+14n\,3^{n-1}}{4}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Zadanie 10.9 Wielomian charakterystyczny macierzy $F_{(\mathbf{e})(\mathbf{e})}$ ma postać (jego jedyny rzeczywisty pierwiastek dość łatwo zgadnąć):

$$W_F(\lambda)=-\lambda^3+4\lambda^2-9\lambda+10=-(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+5)\,.$$

Macierz ma zatem odpowiadające jego trzem (dwie z nich są zespolone) wartościom własnym $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1+2i$ oraz $\lambda_2=1-2i$ trzy wektory własne

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}1+i\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}1-i\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Drugi z nich i trzeci nie należą jednak do przestrzeni V, tylko do jej kompleksyfikacji. Dlatego przestrzeń V rozkłada się na sumę prostą tylko dwóch przestrzeni niezmienniczych: jednej rozpinanej przez rzeczywisty wektor własny $\mathbf{w}_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ odpowiadający wartości własnej $\lambda_1=2$ i drugiej rozpinanej przez jakieś takie dwie kombinacje liniowe dwóch pozostałych wektorów własnych odpowiadających $\lambda_2=1+2i$ i $\lambda_2=1-2i$, które są wektorami już należącymi do V. Jako te wektory najłatwiej wziąć sumę i pomnożoną przez $-i$ różnicę wypisanych wyżej kolumienek. Zatem możliwą bazę przestrzeni V realizującą jej rozkład na podprzestrzenie niezmiennicze odwzorowania F tworzą wektory

$$(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Stojąca tu macierz, to macierze zmiany bazy $R_{(\mathbf{e}\leftarrow\mathbf{w})}$. Rozwiązując układzik 3×3 równań na wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ (albo odwracając tę macierz jakimś innym sposobem) znajdujemy

$$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

Stojąca tu macierz, to $R_{(\mathbf{w}\leftarrow\mathbf{e})}$. Można teraz już skontruować rzut Π na podprzestrzeń niezmienniczą odpowiadającą $\lambda_1=2$. Jego macierz w bazie $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ ma oczywistą postać

$$\Pi_{(\mathbf{w})(\mathbf{w})}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

i po “obłożeniu jej macierzami zmiany bazy otrzymujemy

$$\Pi_{(\mathbf{e})(\mathbf{e})}=R_{(\mathbf{e}\leftarrow\mathbf{w})}\cdot\Pi_{(\mathbf{w})(\mathbf{w})}\cdot R_{(\mathbf{w}\leftarrow\mathbf{e})}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Rzut Π' na podprzestrzeń dopełniającą, która jest drugą niezmienniczą, jest dany przez

$$\Pi'_{(\mathbf{e})(\mathbf{e})} = I_{(\mathbf{w})(\mathbf{w})} - \Pi_{(\mathbf{w})(\mathbf{w})} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $\Pi + \Pi' = I$, a $\Pi \cdot F \cdot \Pi' = \Pi' \cdot F \cdot \Pi = 0$ (jest to oczywiste z samej natury podprzestrzeni niezmienniczych i definicji rzutów!), odwzorowanie F można zapisać jako sumę $F = \Pi \cdot F \cdot \Pi + \Pi' \cdot F \cdot \Pi'$. W bazie wyjściowej rozkład ten ma postać

$$F_{(\mathbf{e})(\mathbf{e})} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 10.10 Składowe wektorów własnych $\mathbf{w}_i$ są rozwiązaniami równania

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nietrudno zobaczyć, że jest taki tylko jeden, o składowych $(1, 1, 0, 0)$, czyli $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Szukamy zatem wektorów pierwiastkowych. Na pierwszym z nich, $\mathbf{r}_1$, daje zero odwzorowanie $(F - 2I)^2$, czyli jego składowe są rozwiązaniami równania

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ musi on być liniowo niezależny od $\mathbf{w}$ (którego składowe w sposób oczywisty też są rozwiązaniami tego równania), można go wziąć w postaci $\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Z kolei na drugim, $\mathbf{r}_2$, daje zero odwzorowanie $(F - 2I)^3$, czyli jego składowe są rozwiązaniami równania

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Znów musi on być wybran jako liniowo niezależny od $\mathbf{w}$ i $\mathbf{r}_1$, których składowe też, oczywiście to równanie spełniają, ale widać, że można po prostu wziąć $\mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_1$ i bedzie dobrze. Wreszcie, $(F - 2I)^4$ jest już macierzą zerową i jako ostatni wektor pierwiaskowy $\mathbf{r}_3$, który powinien dopełnić układ $(\mathbf{w}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ do bazy całej przestrzeni V można po prostu wziąć

$\mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_4$. W ten sposób rozkład wektora $\mathbf{v}$ w tej nowej bazie będzie trywialny. Piszemy teraz

$$e^{tF} \cdot \mathbf{v} = e^{2t}\, e^{t(F-2I)} \cdot \mathbf{v} = e^{2t} \left(I + t(F-2I) + \frac{t^2}{2}\,(F-2I)^2 + \frac{t^3}{6}\,(F-2I)^3 \right) \cdot \mathbf{v}\,.$$

Szereg się urywa, bo jako się rzekło, $(F-2I)^4$ jest zerowym odwzorowaniem (odwzorowuje każdy wektor w wektor zerowy). Ponieważ macierze operatorów $(F-2I)$, $(F-2I)^2$ i $(F-2I)^3$ w bazie $\mathbf{e}_i$ zostały już wyżej wypisane i ponieważ ich działanie na składowe wektora $\mathbf{v} = \mathbf{e}_4$ "wycina" z każdej macierzy jej ostatnią kolumnę, możemy natychmiast napisać:

$$e^{tF_{(\mathbf{e})(\mathbf{e})}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$