Zadania z analizy III.

(Cześć zadań pochodzi z notatek dr R. Suszka, a część od innych kolegów matematyków)

Powierzchnie

Zadanie

Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(1,1,1)$ i równoległej do płaszczyzny stycznej w punkcie $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}})$ do elipsoidy

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1\,.$$

Jaka jest odległość między tymi płaszczyznami?

Zadanie

Sprawdzić, czy przeciwobraz zera odwzorowania $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$P(x,y,z) = 8(x^2 + y^2 + 2z^2) - 24xy + 1\,,$$

jest powierzchnią regularną w otoczeniu punktu o współrzędnych $\frac{1}{4}(\sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{2}\,)$, a następnie wyznaczyć przestrzeń (płaszczyznę) styczną tej powierzchni w tym punkcie.

Zadanie

Czy przeciwobraz zera funkcji $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8(x^2 + y^2 + z^2) - 24xy + 1 \\ 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 1 \end{pmatrix},$$

jest powierzchnią regularną? Znajdź wektory styczne do niej punkcie $\frac{1}{4}(\sqrt{6}, \sqrt{6}, 2)$.

Zadanie

Sparametryzować krzywą będącą przecięciem powierzchni zadanej wzorem $x^2+y^2-z^2 = 0$ (odwrócony stożek) z płaszczyzną $z = 1$. Znaleźć wektory normalne do tej krzywej w każdym jej punkcie.

Zadanie

Czy odwzorowanie $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$

$$x = \frac{t\,(1+t^2)}{1+t^4}\,, \qquad y = \frac{t\,(1-t^2)}{1+t^4}$$

zadaje wszędzie krzywą regularną?

Zadanie
Dla jakich wartości rzeczywistego parametru x_0 przeciwobraz zera odwzorowania $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ \frac{1}{4}(x-x_0)^2+(y/3)^2+z^2-1 \end{pmatrix},$$

jest krzywą regularną?

Zadanie
Współrzędne bisferyczne (ξ, η, φ) w $\mathbb{R}^3$ zadane są wzorami

$$x = \frac{\sin\xi\cos\varphi}{\mathrm{ch}\eta - \cos\xi}, \qquad y = \frac{\sin\xi\sin\varphi}{\mathrm{ch}\eta - \cos\xi}, \qquad z = \frac{\mathrm{sh}\eta}{\mathrm{ch}\eta - \cos\xi}.$$

Czym są powierzchnie stałego η? Znaleźć tensor metryczny w tych współrzędnych. Czy są one współrzędnymi ortogonalnymi? Jeśli tak, zapisać w nich "fizyczne" operatory gradientu, dywergencji i rotacji.

Formy: własciwości algebraiczne, pochodne zewnętrzne, formy pierwotne

Zadanie
Niech θ^1 i θ^2 będą dwiema liniowo niezależnymi jedno-formami nad d-wymiarową p. wektorową V. Pokazać, że jeśli $n+1$-forma $\omega_{(n+1)}$ $(n+1 \leq d)$ jest taka, że $\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \omega_{(n+1)} = 0$, to istnieją takie dwie n-formy $\omega^1_{(n)}$, $\omega^2_{(n)}$, że

$$\omega_{(n+1)} = \theta^1 \wedge \omega^1_{(n)} + \theta^2 \wedge \omega^2_{(n)}.$$

Zadanie
Dwu forma $\omega_{(2)}$ jest prosta, jeśli $\omega_{(2)} = \theta^1 \wedge \theta^2$ dla jakichś dwu jedno-form θ^1 i θ^2. Pokazać, że jeśli $\omega^1_{(2)}$ i $\omega^2_{(2)}$ są dwiema dwu-formami prostymi, to $\omega^1_{(2)} + \omega^2_{(2)}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega^1_{(2)} \wedge \omega^2_{(2)} = 0$.

Zadanie
Niech zbiór jednoform $\{\mathbf{f}^i\}_{i=1,2n}$ będzie bazą przestrzeni jedno-form na $2n$ wymiarowej p. wektorowej V. Obliczyć n-tą zewnętrzną potęgę (czyli $\omega \wedge \ldots \wedge \omega$ n-krotnie) formy

$$\omega = \mathbf{f}^1 \wedge \mathbf{f}^2 + \mathbf{f}^3 \wedge \mathbf{f}^4 + \ldots \mathbf{f}^{2n-1} \wedge \mathbf{f}^{2n}.$$

Zadanie
Sprawdzić, czy poniższe formy są zamknięte. Jeśli są, podać przykład formy pierwotnej

$$\omega = \frac{y\,dx - x\,dy}{2x^2 - xy + y^2},$$
$$\omega = y\cos x\,dx - \sin x\,dy,$$

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{y(x+y)}\,,$$
$$\omega = y^2\,e^z \cos x\,dx + 2y\,e^z \sin x\,dy + y^2\,e^z \sin x\,dz\,,$$
$$\omega = (2xy^3 + 4x)\,dx + (3x^2y^2 - 9y^2)\,dy\,,$$
$$\omega = 2xz\,dx + 4yz^2\,dy + (x^2 + 4y^2z - 9z^2)\,dz\,,$$
$$\omega = (yz - 2y^2)\,dx \wedge dy - (3z^2 + xy)\,dy \wedge dz - 2x\,dz \wedge dx\,,$$
$$\omega = (x^2 + y^2 + z^2)^{-2}(z^2\,dx \wedge dy + xz\,dy \wedge dz + yz\,dz \wedge dx)\,,$$
$$\omega = \frac{1}{xy^2z}\,(zt\,dx \wedge dy + tx\,dy \wedge dz + xy\,dz \wedge dt + yz\,dt \wedge dx),$$
$$\omega = y\,(x-t)\,dt \wedge dx + x\,t\,dy \wedge dt - x\,(t + 3xz)\,dx \wedge dy + x^3\,dy \wedge dz\,,$$
$$\omega = \mathrm{sh}x_1\,dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 \wedge dx_6 - \cos x_5\,e^{x_1 - x_3}\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5\,,$$
$$\omega = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$$

Czy ostatnią formę można scałkować po okręgu o środku w p. $(0,0)$?

Zadanie
Obliczyć pochodne zewnętrzne form

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)}\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$
$$\omega = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\,(z\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx)\,,$$
$$\omega = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2}\,\big(-xz\,dy \wedge dz - yz\,dz \wedge dx + (x^2 + y^2)\,dx \wedge dy\big)\,,$$
$$\omega = \frac{xz\,dx + yz\,dy + (x^2 + y^2)dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Jeśli sa to formy zamknięte, podać przykładową jednoformę $\eta = \eta_x dx + \eta_y dy + \eta_z dz$, której pochodne zewnętrzne dają (lokalnie) powyższe formy.
Wskazówka: Pomocne może być zapisanie tych form w zmiennych sferycznych lub innych.

Zadanie
Czy forma ($f'_x \equiv \partial f / \partial x$, etc.)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\left[(yf'_z - zf'_y)\,dy \wedge dz + (zf'_x - xf'_z)\,dz \wedge dx + (xf'_y - yf'_x)\,dx \wedge dy\right]$$

jest zamknięta? Jeśli jest, podać jakąś jej formę pierwotną.

Zadanie
Sprawdzić, czy podane niżej pola wektorowe mają potencjały skalarne i/lub wektorowe. Znaleźć przykładowe potencjały, jeśli odpowiedź jest pozytywna.

$$\mathbf{V} = (x + y)\,\mathbf{e}_x + (-x + y)\,\mathbf{e}_y - 2z\,\mathbf{e}_z,$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V} &= 2y\,\mathbf{e}_x + (2x+3z)\,\mathbf{e}_y + 3y\,\mathbf{e}_z,\\
\mathbf{V} &= (x^2-z^2)\,\mathbf{e}_x + 2\,\mathbf{e}_y + 2xz\,\mathbf{e}_z,\\
\mathbf{V} &= (x^2+y^2)\,\mathbf{e}_x + (-2xy+z^2)\,\mathbf{e}_y + xz\,\mathbf{e}_z,\\
\mathbf{V} &= (yz\,e^x + e^{yz})\,\mathbf{e}_x + (z\,e^x + xz\,e^{yz})\,\mathbf{e}_y + (y\,e^x + xy\,e^{yz})\,\mathbf{e}_z,\\
\mathbf{V} &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \qquad \mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z\,,\\
\mathbf{V} &= \left(1 + \frac{1}{x+y}\right)\mathbf{e}_x + \frac{1}{x+y}\,\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z,\\
\mathbf{V} &= \frac{1}{xy^2z^3}\,(yz\,\mathbf{e}_x - xz\ln x\,\mathbf{e}_y - 2xy\ln x\,\mathbf{e}_z),\\
\mathbf{V} &= x^2\,\mathbf{e}_x + y^2\,\mathbf{e}_y - 2z(x+y)\,\mathbf{e}_z,\\
\mathbf{V} &= \frac{1}{r^3}(xz\,\mathbf{e}_x + yz\,\mathbf{e}_y + (x^2+y^2)\,\mathbf{e}_z)\,, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,\\
\mathbf{V} &= yz\,\mathbf{e}_x + (yz)^2\,\mathbf{e}_y + (yz)^3\,\mathbf{e}_z,\\
\mathbf{V} &= \frac{1}{(x+y)^2+z^2}\,[(x+y-z)\,(\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y) + (x+y+z)\,\mathbf{e}_z]\,,\\
\mathbf{V} &= \frac{1}{\rho}\,[y\,\mathbf{e}_x - x\,\mathbf{e}_y + \rho\,\mathbf{e}_z]\,, \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}\,,\\
\mathbf{V} &= (x+y)\,\mathbf{e}_x + (x+z)\,\mathbf{e}_y + (y-z)\,\mathbf{e}_z\,.
\end{aligned}
$$

Zadanie

Używając form różniczkowych wykazać tożsamości

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{A}) = 0\,,\\
&\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) = 0\,,\\
&\mathrm{div}\cdot(\phi\mathbf{A}) = \mathrm{grad}\phi\cdot\mathbf{A} + \phi\,\mathrm{div}\cdot\mathbf{A}\,,\\
&\mathrm{div}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathrm{rot}\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{B})\,,\\
&\mathrm{rot}(\phi\mathbf{A}) = \mathrm{grad}\phi\times\mathbf{A} + \phi\,\mathrm{rot}\mathbf{A}\,.
\end{aligned}
$$

Zadanie

Niech funkcja $f(x,y)$ znika na brzegu $\partial\Omega_2$ pewnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Zdefiniujmy dwie dwu-formy:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= f(x,y)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx\wedge dy\,,\\
\omega_2 &= -\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\wedge dy\,.
\end{aligned}
$$

Pokazać, że

$$
\int_\Omega \omega_1 = \int_\Omega \omega_2\,.
$$

Na tej podstawie uzasadnieć, że jeśli $\nabla^2 f = 0$ w obszarze Ω (i f znika na brzegu $\partial\Omega$ tego obszaru), to $f(x,y) \equiv 0$ w Ω. (To jest twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania równania Laplace'a (lub Poissona) w dwuwymiarowej elektrostatyce).

Formy: czynniki całkujące i równania różniczkowe

Zadanie
Dana jest jedno-forma

$$\omega = z\,dx + x\,dy + y\,dz\,.$$

Pokazać, że $d(f\omega) = 0$ tylko, gdy $f \equiv 0$.

Zadanie
Metodą czynnika całkującego (lub jakąś inną) znaleźć krzywe całkowe równań (przechodzących przez - jeśli jest wskazany - punkt płaszczyzny)

- $(x + 2y)\,dx + (2x + y)\,dy = 0$,
- $(x^2 - y)\,dx - (x + \sin^2 y)\,dy = 0$,
- $-y\,dx + (x + y^2)\,dy = 0$, przez punkt $(0, 1)$,
- $(x^2 + x + y)\,dx + (2x^2 y - x)\,dy = 0$, przez punkt $(1, 0)$,
- $(y\cos x - x\sin x)\,dx + (y\sin x + x\cos x)\,dy = 0$, przez punkt $(\pi, 0)$,
- $(2y^2x^3 - y)\,dx + (2y^3x^3 - x)\,dy = 0$,
- $(xy^2 - y)\,dx + x^2 y\,dy = 0$,
- $(2x + 3x^2 y)\,dx + (x^3 - 3y^2)\,dy = 0$,
- $(y^4 - 4xy)\,dx + (2xy^3 - 3x^2)\,dy = 0$,
- $y\,(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0$,
- $(3x^3y+y^2)\,dx+(x^4+xy)\,dy = 0$ przez punkt $(1, -1)$, (szukać cz. całk. $\lambda = f(x)g(y)$),
- $\frac{y'+\sin y}{1+\cos y} + x = 0$, przez punkt $(1, \frac{\pi}{2})$

W większości przypadków chynnik całkujący λ dla formy $\omega = P\,dx + Q\,dy$ można dobrać czujnie patrząc na warunek $\lambda(P'_y - Q'_x) = \lambda'_x Q - \lambda'_y P$.

Zadanie
Metodą wykorzystującą czynnik całkujący (lub jakąkolwiek inną) znaleźć krzywą całkową równania różniczkowego

$$(x^3 y - 2y^2)\,dx + x^4\,dy = 0\,,$$

przechodzącą przez punkt $(1, 2)$.
Wskazówka: Zbadać, dla jakich wartości parametrów naturalnych $a, b \in \mathbb{N}$ funkcja $\mu(x, y) = f(x^a y^b)$ jest czynnikiem całkującym powyższego równania.

Formy: całkowanie po krzywych, powierzchniach i objętościach

Zadanie
Scałkować poniższe jedno-formy po podanych krzywych. Jeśli krzywa jest zamknięta, sprawdzić wynik za pomocą twierdzenie Stokesa.

- $\omega = (x^2 + y^2)^{-1}(y^2\, dx - x^2\, dy)$
  po górnej połówce elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ zaczynając od punktu $(-a, 0)$.

- $\omega = e^y \cos x\, dx$
  po trójkącie którego wierzchołkami są punkty przecięcia się prostych $x = 0$, $y = 0$ i $3x + 7y = 21$. Trójkąt obiegamy przeciwnie do kierunku obrotu wskazówek zegara.

- $\omega = (x^3 + 2y)\, dx + (z + \sin y)\, dy + (x + \sin z^2)\, dz$
  po krzywej będącej przecięciem walca $x^2 + y^2 = 4$ z płaszczyzną $z = x + 4$.

- $\omega = 3y\, dx + 2yz\, dy + z^3(x + \sqrt{1 + z^2}\, \mathrm{sh} z^2)\, dz$
  po przecięciu elipsoidy $2(x/3)^2 + 2(y/3)^2 + (z/3)^2 = 1$ z powierzchnią $2z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

- $\omega = (z^2 - y^2)\, dx - 2xy\, dy + e^{\sqrt{z}} \cos z\, dz$
  po krzywej zadanej parametrycznie wzorami $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = 8 - \cos^2\theta - \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

- $\omega = (x^2 - y^2)\, dx + (y^2 - z^2)\, dy + (z^2 - x^2)\, dz$
  po brzegu obszaru $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$

- $\omega = y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$
  po krzywej będącej przecięciem sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ i walca $x^2 + y^2 = Rx$ (czyli po Viviance) zawartej w obszarze $x, y, z \geq 0$; punktem początkowym jest $(R, 0, 0)$.

- $\omega = (x^2 - y^2 + 2ax)\, dx - 2xy\, dy$
  po dolnej połowie okręgu o promieniu R i środku w punkcie (b, b) od mniejszego x do większego.

- $\omega = (1 + x^2 + y^2)^{-1/2}(x\, dx + y\, dy)$ po ćwiartce elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ of punktu $(a, 0)$ do punktu $(0, b)$.

- $\omega = y\, dx - x\, dy + dz$
  po krzywej zadanej wzorami $x = (1 + \cos\theta)\cos\theta$, $y = (1 + \cos\theta)\sin\theta$, $z = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

- $\omega = x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$
  po krzywej zadanej wzorami $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z \sin^2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

- $\omega = (x - y^3)\,dx + x^3\,dy$
  po okręgu $x^2 + y^2 = 1$ zorientowanym przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara.

Zadanie
Obliczyć pracę wykonaną przez pole siły **F** wzdłuż podanej krzywej

- $\mathbf{F} = k\,(y\,\mathbf{e}_x - x\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z)$
  wzdłuż krzywej zadanej wzorami $z = a\cos z$, $y = b\sin z$ od punktu $A = (a, 0, 0)$ do $B = (-a, 0, \pi)$.

- $\mathbf{F} = \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\,(\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi)$ ((ρ, φ) są współrzędnymi biegunowymi)
  wzdłuż krzywych: *i* prostej $x = y$ od punktu $(0, 0)$ do nieskończoności, *ii)* okręgu o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0)$; orientacje krzywych wybrać sobie według uznania.

- $\mathbf{F} = (\sqrt{x} + y^3)\,\mathbf{e}_x + (x^2 + \sqrt{y})\,\mathbf{e}_y$
  po krzywej $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

- $\mathbf{F} = k\,(z\,\mathbf{e}_x + x\,\mathbf{e}_y + y\,\mathbf{e}_z)$
  wzdłuż krzywej będącej przecięciem powierzchni zadanych wzorami $x^2 + y^2 = 1$ i $x + y + z = 1$. Orientacja krzywej zgodna z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (patrząc od punktu $(0, 0, 0)$).

- $\mathbf{F} = k\,((1 - y)\,\mathbf{e}_x + x^2\,\mathbf{e}_y + (2xy + z)\,\mathbf{e}_z)$
  wzdłuż krzywej będącej przecięciem powierzchni zadanych wzorami $z - x^2 - y^2 = 0$ i $x + y = 1$ na drodze od punktu $(2, -1, 5)$ do $(1, 0, 1)$. Orientacja krzywej jest zgodna z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (patrząc od punktu $(0, 0, 0)$).

- $\mathbf{F} = (6xz^2 - 3x^2yz)\,\mathbf{e}_x + 2x^2z\,\mathbf{e}_y + 3x^2z\,\mathbf{e}_z$
  wzdłuż krzywej będącej brzegiem powierzchni zadanej wzorami $z = xy$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

- $\mathbf{F} = x\,\mathbf{e}_x + (x + y)\,\mathbf{e}_y + (x + y + z)\,\mathbf{e}_x$
  po krzywej zamkniętej będącej przecięciem walca $x^2 + y^2 = 1$ i płaszczyzny $z = y$.

Zadanie
Obliczyć całki z dwu-form po podanych powierzchniach

- $\omega_1 = dx \wedge dy$, $\omega_2 = z\,dx \wedge dy$, $\omega_3 = z^2 dx \wedge dy$
  po elipsoidzie $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ zorientowanej na zewnątrz.

- $\omega = y\,dy \wedge dz + xz\,dx \wedge dy$
  po powierzchni zadanej parametrycznie $x = s,\ y = t,\ z = 1 + s^2 + t^2,\ s, t \in [0, 1]$

- $\omega = x\,dy \wedge dy + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$
  po brzegu obszaru $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\ z \geq 0$. Wynik sprawdzić posługując się twierdzeniem Stokesa.

- $\omega = z\,(dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy)$
  po zorientowanym na zewnątrz brzegu obszaru $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x, y, z \geq 0$.

- $\omega = x^3 e^y\,dy \wedge dz - 3x^2 e^y\,dz \wedge dx$
  po powierzchni połówki elipsoidy $6x^2 + 2y^2 + (z-1)^2 = 5,\ z \geq 0$.

- $\omega = x\,dy \wedge dz$
  po powierzchni zadanego parametrycznie torusa: $x = (4 + r\cos\psi)\cos\varphi,\ y = (4 + r\cos\psi)\sin\varphi,\ z = r\sin\psi,\ r \in [0, 1],\ \psi, \varphi \in [0, 2\pi]$

- $\omega = yu\,dx \wedge dz + yz\,du \wedge dz + xu\,dz \wedge dy + xz\,dy \wedge du$
  po powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^4$, zadanej parametrycznie wzorami $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ z = \cos\varphi,\ u = \sin\varphi,\ \theta, \varphi \in [0, \pi/2]$

Zadanie
Obliczyć całkę z dwu-formy

$$\omega = \frac{z^2}{\sqrt{(y-4)^2 + z^2}}\,dy \wedge dz + \frac{z^2}{\sqrt{(x-4)^2 + z^2}}\,dz \wedge dx\,,$$

po tej części powierzchni torusa zadanego wzorem $(\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 9$, która leży w obszarze $x, y \geq 0$. Powierzchnia torusa jest zorientowana na zewnątrz.

Zadanie
Obliczyć całki z trój-form

- $\omega = x^2 y^2 z^5\,dx \wedge dy \wedge dz$
  po obszarze $\mathbb{R}^3$ zadanym parametrycznie: $x = r\sqrt{1 + t^2}\,\cos\varphi,\ x = r\sqrt{1 + t^2}\,\sin\varphi,\ z = ct,\ r \in [0, a],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ t \in [-b, b]$.

- $\omega = t\,dx \wedge dy \wedge dz$
  po powierzchni połowy (tej, na której $t > 0$) sfery $S_3 \subset \mathbb{R}^4$ o promieniu R i środku w $(0, 0, 0, 0)$. Sprawdzić także twierdzenie Stokesa.

- $\omega = x\,dx \wedge du \wedge dz + 2yz\,dx \wedge dy \wedge dz$
  po zanurzonej w $\mathbb{R}^4$ trójwymiarowej hiperpowierzchni zadanej parametrycznie wzorami $x = r,\ y = t,\ z = s,\ u = (2t - s)^2,\ r, s, t \in [0, 1]$.

Zadanie
Obliczyć strumień pola wektorowego $\mathbf{V}$ przez podaną powierzchnię

- $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_z$
przez górną (tj. leżącą w obszarze $z \geq 0$) połowę elipsoidy $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2 = 1$ zorientowaną na zewnątrz

- $\mathbf{V} = \frac{a}{x^2+y^2+z^2}\,(x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z)$
przez zorientowaną do wewnątrz powierzchnię zamykającą (całkowicie) walec opisany nierównściami $x^2+y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq h$, raz bezpośrednio i drugi raz korzystając z twierdzenia Stokesa.

- $\mathbf{V}(x, y, z) = (y\,\mathbf{e}_x + z^2\,\mathbf{e}_y + x^2\,\mathbf{e}_z)$
przez fragment zorientowanej "do wewnątrz" powierzchni Σ (zanurzonej w $\mathbb{R}^3$) zdefiniowanej równaniem $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ wycięty z Σ płaszczyznami $z = 1$ oraz $z = H > 1$.

- $\mathbf{V} = yz\,\mathbf{e}_x + xz\,\mathbf{e}_y + xy\,\mathbf{e}_z$,
$\Sigma = \partial\Omega$, a $\Omega = \{(x, y, z) :\ z\,(1 + x^2 + y^2) \leq 2,\ 4x^2 + 4y^2 \leq (1 + z)^2,\ z \geq 0\}$. Σ jest zorientowana na zewnątrz.

- $\mathbf{V} = \mathbf{r}/r^3$
Σ jest zorientowaną na zewnątrz powierzchnią elipsoidy $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2 = 1$

- $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^3$
Σ jest zorientowaną na zewnątrz powierzchnią powstającą z przecięcia elipsoidy $(x/a)^2 + (y/a)^2 + (z/c)^2 = 1$ i sfery

- $\mathbf{V} = xy^2\,\mathbf{e}_x + x^2y\sin z\,\mathbf{e}_y + x^2\cos z\,\mathbf{e}_z$,
powierzchnia Σ (jest to torus) jest zadana parametrycznie:

$$x = (2 + \sin\theta)\cos\varphi \qquad y(2 + \sin\theta)\sin\varphi \qquad z = \cos\theta\,,$$

gdzie $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) i zorientowana na zewnątrz.

- $\mathbf{V} = -x\,(x^2 + y^2)\,\mathbf{e}_x + (z - x^2y - y^3)\,\mathbf{e}_y + 4z(x^2 + y^2)\,\mathbf{e}_z$, po powierzchni zadanej parametrycznie:

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = \frac{(1-\rho)\mathrm{arctg}(\rho\cos(e^{\sin\varphi}))}{\cos(\rho\pi/4)\ln(3 + \cos(10\varphi))\mathrm{ch}(\rho^3)}\,,$$

gdzie $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, a wektor $\mathbf{n}$ zadający orientację jest taki, że $\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z > 0$.

Uwaga w tym zadaniu chodzi o obliczenie strumienia; jesli to jest beznadziejnie trudne bezpośrednio, można wykorzystać sprytnie twierdzenie Stokesa.

Zadanie
Sprawdzić twierdzenie Stokesa całkując ω po po rozmaitości ∂M będącej brzegiem M i porównując wynik z całką z $d\omega$ po M. Pamiętać o uzgodnieniu orientacji

- $\omega = (x+y)^{-1}(dx+dy)$
  $M = \{(x,y):\, 2 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$.

- $\omega = y^2\,dx + x^2\,dy$,
  $M = \{(x,y):\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ x,y,z \geq 0\}$.

- $\omega = (x+y+z)\,dx\wedge dy$,
  $M = \{(x,y,z):\, 0 \leq x^2-2x+y^2 \leq 3,\ 1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

- $\omega = (x-y^2)\,dy\wedge dz + xyz\,dz\wedge dx + z^2\,dx\wedge dy$,
  $M = \{(x,y,z):\, x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2,\ x \geq 0\}$.

- $\omega = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$,
  $M = \{(x,y,z):\, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 0$ (lub w wersji trudniejszej, $M = \{(x,y,z):\, 1 \leq (x/a)^2+(y/a)^2+(z/b)^2 \leq 4,\ z \geq 0)$,

- $\omega = 3x^3\,dy\wedge dz + 2y^2\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$
  M jest obszarem ograniczonym walcem $x^2+y^2 \leq 3$, powerzchnią o równaniu $x^2+y^2+1 \geq z^2$ i, od dołu, przez płaszczyznę $z=0$

- $\omega = x\,dy\wedge dz$
  M jest torusem opisanym parametrycznie: $x = (4+r\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (4+r\cos\psi)\sin\varphi$, $z = r\sin\psi$, $r\in[0,1]$, $\psi,\varphi\in[0,2\pi]$

Zadanie
Obliczyć całkę z pochodnej zewnętrznej jednoformy

$$\omega = y^2\,dx + x^2\,dy + xz\,dz\,,$$

po zorientowanej na zewnątrz powierzchni 1/8 elipsoidy $x^2+(y/2)^2+(z/2)^2=1$ leżącej w obszarze $x,y,z\geq 0$. Sprawdzić twierdzenie Stokesa całkując ω po brzegu tej powierzchni.

Długości, pola powierzchni, objętości

Zadanie
Obliczyć pole powierzchni bocznej, objętość oraz wysokości względem poszczególnych ścian bocznych równoległościanu rozpiętego w $\mathbb{R}^3$ na trzech wektorach

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix}7\\8\\10\end{bmatrix}.$$

Zadanie
Obliczyć długość spirali Nielsena (w $\mathbb{R}^2$) zadanej parametrycznie wzorami

$$x(t) = \alpha\int_\infty^t ds\,\frac{\cos s}{s}\,, \qquad y(t) = \alpha\int_\infty^t ds\,\frac{\sin s}{s}$$

(α jest dodatnim parametrem), od punktu o $t = 1$ do punktu o $t = t_0 > 1$.

Zadanie
Obliczyć długość loksodromy (w $\mathbb{R}^3$) zadanej parametrycznie wzorami

$$x(t) = \frac{\cos t}{\mathrm{ch}(t - t_0)}, \qquad x(y) = \frac{\sin t}{\mathrm{ch}(t - t_0)}, \qquad z(t) = \mathrm{th}(t - t_0)$$

(t_0 jest stałą), pomiędzy punktami o $t = t_0$ i $t = t_1 > 0$.

Zadanie
Obliczyć długość spirali Archimedesa zadanej w $\mathbb{R}^2$ we współrzędnych cylindrycznych (ρ, φ) wzorem

$$r = \alpha\varphi$$

($\alpha > 0$), pomiędzy punktami $\varphi = 0$ i $\varphi = 2\pi$.

Zadanie
Obliczyć całkowite pole powierzchni pseudosfery (traktrysoidy) zadanej w $\mathbb{R}^3$ parametrycznie wzorami

$$x(u, \varphi) = a\,\frac{\cos\varphi}{\mathrm{ch}u}, \qquad y(u, \varphi) = a\,\frac{\sin\varphi}{\mathrm{ch}u}, \qquad z(u, \varphi) = a\,(u - \mathrm{th}u)\,.$$

$\varphi \in [0, 2\pi]$, $u \in (-\infty, +\infty)$.

Zadanie
Obliczyć pole powierzchni placka Vivianiego, tj. tej powierzchni wycinanej ze sfery zadanej równością $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ walcem $x^2 + y^2 - Rx \leq 0$, która znajduje się w półprzestrzeni $z > 0$.