

MECHANIKA KLASYCZNA R

Wykład prof. K. Meissnera

- ? listopada 2025 o 9.00, sala ? - pierwsze kolokwium
- ? stycznia 2026 o 9.00, sala ? - drugie kolokwium
- ? stycznia 2026 o 9.00, sala ? - pierwszy egzamin pisemny
- termin pisemnego egzaminu poprawkowego zostanie uzgodniony później z osobami nim (z konieczności) zainteresowanymi

ZADANIA Z MECHANIKI¹

¹Tu zamieszczam wszystkie zadania, także te, które są przerabiane na zajęciach (rozwiązania tych zadań są zamieszczone w dalszej części tego pliku). Symbol ^R nie oznacza, że jest to zadanie “radzieckie” (choć niektóre z nich takie są) tylko coś innego.

1 KINEMATYKA

Zadanie 1.1^R

Dane są cztery wektory $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{D}$. Wyrazić wielkość

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$$

przez same iloczyny skalarne tych wektorów. Przedstawić wektor

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$$

w postaci kombinacji liniowej wyrażeń, z których występuje tylko po jednym iloczynie wektorowym dwu wektorów.

Zadanie 1.2^R

Dany jest tor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda)$, gdzie λ jest jakimś parametrem. Wiadomo, że przy dowolnej wartości λ

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = 0 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = \mathbf{0}.$$

Pokazać, że tor taki jest po prostu punktem (tzn. że $\mathbf{r}(\lambda)$ jest stałym wektorem).

Zadanie 1.3^R

Dany jest układ współrzędnych (x, y) na płaszczyźnie oraz okrąg o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0)$. Dana jest też prosta p styczna do okręgu, która toczy się po nim bez poślizgu. (Bez poślizgu to znaczy, że jeśli w dwu różnych chwilach czasu zaznaczymy i na okręgu i na prostej punkty styczności, to odległość między tymi punktami na prostej będzie równa długości łuku pomiędzy punktami styczności na okręgu). Biegunowy kąt α wyznaczający punkt styczności prostej p z okręgiem zmienia się z czasem: $\alpha = \alpha(t)$. W chwili $t = 0$ prosta ta przechodzi przez punkt $(R, 0)$, tj. $\alpha(0) = 0$. Punkt A prostej ma w chwili $t = 0$ współrzędne (R, y_A) . Znaleźć jego współrzędne w dowolnej chwili czasu.

Zadanie 1.4^R

Wyprowadzić wzory na składowe wektorów prędkości i przyspieszania we współrzędnych biegunowych (r, φ) na płaszczyźnie i we współrzędnych sferycznych (r, θ, φ) w przestrzeni trójwymiarowej.

Zadanie 1.5^R

Podać (tj. wyprowadzić) wzory na wszystkie trzy kartezjańskie składowe L^i wektora (orbitalnego) momentu pędu cząstki o masie m wyrażone przez: a) zmienne (i ich pochodne po czasie) ρ, ϕ, z cylindrycznego układu współrzędnych, b) zmienne (i ich pochodne) r, θ, ϕ sferycznego układu współrzędnych. W obu przypadkach podać także wzory na $\mathbf{L}^2$. Podać także składowe wektora $\mathbf{L}$ w bazach wersorów $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ oraz $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ związanych z tymi układami współrzędnych wyrażone przez zmienne tychże układów.

Zadanie 1.6^R

W układzie kartezjańskim tensor elastycznych odkształceń ciała ma składowe

$$U_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right),$$

gdzie $u_i(\mathbf{x})$ to składowe wektora przemieszczeń. Rozpatrując ciało płaskie mogące odkształcać się tylko w płaszczyźnie $xy \equiv x_1x_2$ wyprowadzić składowe tensora odkształceń w układzie cylindrycznym wyrażając je oczywiście przez pochodne po zmiennych r i φ składowych wektora przemieszczeń w tymże układzie.²

Zadanie 1.7^R

Wyprowadzić wzory wyrażające współczynniki rozkładu wektora prędkości $\mathbf{v}$, wektora przyspieszenia $\mathbf{a}$ oraz pochodnej po czasie $\dot{\mathbf{a}}$ wektora przyspieszenia na trzy ortonormalne wektory

$$\mathbf{t} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dl}, \quad \mathbf{n} \equiv \rho \frac{d\mathbf{t}}{dl}, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{b} \equiv \mathbf{t} \times \mathbf{n},$$

($dl \ v = |\mathbf{v}|$, jest tu różniczką długości toru), przez szybkość $v = |\mathbf{v}|$, promień ρ (lokalnej) krzywizny toru, ich pochodne po czasie oraz skręcenie (torsję) τ . Promień ρ krzywizny i skręcenie τ są zdefiniowane związkami

$$\frac{d\mathbf{t}}{dl} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dl} = \alpha \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

Współczynnik γ w drugim związku nie jest niezależny od ρ i τ i trzeba go wyznaczyć.³

Zadanie 1.8^R

Płaska kolistą tarcza obraca się wokół prostopadłej do niej osi ze stałą prędkością kątową ω . Od środka tarczy rusza żuczek⁴ i podąża ku jej brzegowi ze stałą prędkością v_0 skierowaną wzdłuż promienia tarczy. Jak wygląda ruch żuczka w nieruchomym kartezjańskim

²Wystarczy zająć się przypadkiem dwuwymiarowym, żeby zobaczyć, jak to robić. Rachunki są dość żmudne, a przypadek trzech wymiarów nic od strony koncepcyjnej by nie wniósł; wzory w trzech wymiarach w układach cylindrycznym i sferycznym można znaleźć w *Teorii sprężystości* Landaua i Lifszycy (tom VII ich sławetnego *Kursu fizyki teoretycznej*). Zauważmy jeszcze, że tensor jest obiektem geometrycznym. Jeśli ograniczamy się do ortogonalnych układów krzywoliniowych i posługujemy unormowanymi wektorami bazowymi związanymi z takim układem, można tensor odkształceń $\mathbf{U}$ traktować jak “biwektor”

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \vec{\nabla}).$$

$\vec{\nabla}$ jest tu “wektorem” gradientu, a strzałka nad nim pokazuje, w którą stronę działa związane z nim różniczkowanie.

³Parametryzacja krzywej jej długością l jest dla matematyków “kanoniczna”. Ich naogół interesuje następujące zagadnienie: mając zadane ρ i τ jako funkcje długości, zrekonstruować samą krzywą (oczywiście ρ i τ wyznaczają krzywą tylko dokładnością do jej dowolnego przesunięcia i dowolnego obrotu jako całości).

⁴Żuczek gnojarek z muszką plujką na grzbiecie, zgodnie z posenką “Muszka plujka i żuczek gnojarek// stanowili dość dobraną parę...”

układzie (którego początek pokrywa się ze środkiem tarczy)? Znaleźć następnie w tym nieruchomym układzie:

- a) wzory zadające ruch we współrzędnych biegunowych (r, φ) ,
- b) równanie toru, po którym porusza się punkt (zarówno we współrzędnych biegunowych jak i kartezjańskich),
- c) składowe radialną i transwersalną wektorów prędkości ($\mathbf{v}$) i przyspieszenia ($\mathbf{a}$), tzn. rzuty tych wektorów na wersory $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_\varphi$ układu biegunowego,
- d) $|\mathbf{v}|$ oraz $|\mathbf{a}|$,
- e) wektory styczny $\mathbf{t}$ i normalny $\mathbf{n}$ do toru ruchu w każdym jego punkcie (zob. Zadanie 1.1), oraz składowe $a_t \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{t}$ i $a_n \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ wektora przyspieszenia $\mathbf{a}$,
- f) zależność promienia krzywizny toru ρ od czasu (i sprawdzić tym samym związek $a_n = v^2/\rho$),
- g) długość toru zakreślanego przez żuczkę w nieruchomym układzie w funkcji czasu t .

Zadanie 1.9^R

Wiedząc, że podczas płaskiego ruchu cząstki kąt pomiędzy kierunkiem jej wektora wodzącego $\mathbf{r}$ i wektorem jej prędkości $\mathbf{v}$ jest stały (i równy α) znaleźć we współrzędnych biegunowych:

- a) wzór na tor cząstki,
- b) długość toru w funkcji położenia cząstki.

Przyjąć jako warunki początkowe $\varphi(0) = 0$ i $r(0) = r_0$. Zależność szybkości $|\mathbf{v}(t)|$ od czasu może być dowolna.

Zadanie 1.10^R

Wyznaczyć tor, po jakim powinien z prędkością większą od prędkości dźwięku lecieć samolot, by do obserwatora stojącego na ziemi dźwięk silnika samolotu dochodził z całego toru w tej samej chwili.

Zadanie 1.11^R

Znaleźć i przedyskutować tor i ruch psa, który goni zając uciekającego z prędkością v po prostej. Pies biegnie z prędkością c taką, że jest ona stale skierowana w stronę zająca. Zbadać kiedy pies zając dogoni i podać punkt i chwilę złapania szaraka.

Wskazówka: Wybrać układ współrzędnych kartezjańskich xy tak, by w chwili początkowej $t = 0$ pies był w początku układu, a zając w punkcie $(a, 0)$; prosta po której ucieka zając jest wtedy prostą $x = a$. Wykazać, że zachodzi związek

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a-x} \left\{ -y + \frac{v}{c} \int_0^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right\},$$

i stąd, różniczkując, uzyskać różniczkowe równanie wyznaczające tor.

Zadanie 1.12^R

Lustro wody w studni obniża się ze stałą prędkością w . W chwili $t = 0$, gdy lustro wody znajdowało się na pewnej nieznannej głębokości, do studni upuszczono (tzn. puszczone z zerową prędkością początkową) kamień. Odgłos pluśnięcia tego kamienia o lustro wody

dotarło spuszczonego kamień w chwili t_1 . Po czasie T od upuszczenia pierwszego kamienia upuszczono drugi kamień, odgłos pluśnięcia którego dotarło spuszczonego go w chwili $T + t_2$. Przyjmując, że (stała) prędkość dźwięku w powietrzu jest równa v_s (i znana) obliczyć na podstawie podanych danych prędkość w opadania lustra wody.

Zadanie 1.13

Nad punktem P na ziemi z samolotu lecącego na stałej wysokości H z prędkością $\mathbf{v}$ wyskoczył spadochroniarz i otworzył spadochron po czasie t_1 , na ziemi zaś wylądował po czasie t_2 (od opuszczenia samolotu). Zakładając, że od otwarcia spadochronu spadał on ze stałą prędkością $\mathbf{u}$ znaleźć:

- 1) prędkość samolotu względem skoczka w funkcji czasu
- 2) odległość samolot-skoczek w funkcji czasu
- 3) ruch skoczka względem punktu P .

(Wszystkie te wielkości wygodnie jest przedstawić graficznie).

Zadanie 1.14^R

Ustawione na ziemi działo może wystrzeliwać pociski o początkowej szybkości v w dowolnym kącie w stosunku do płaszczyzny horyzontu i w dowolnym kierunku azymutalnym. Pomijając wpływ siły Coriolisa wyznaczyć równanie powierzchni ograniczającej obszar, do każdego punktu którego pocisk może dotrzeć.

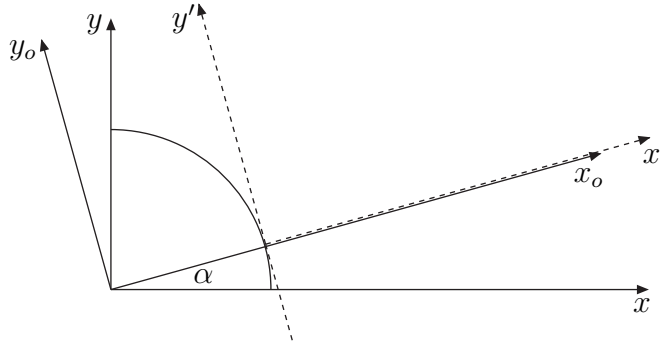
Zadanie 1.15^R

Punkt porusza się ze stałą szybkością v po leżącej w płaszczyźnie (x, y) krzywej o równaniu $y(x) = (2/3)ax^{3/2}$ ($a > 0$). Podać zależność od czasu współrzędnych x i y jego położenia przyjmując, że $x(0) = 0$. Podać kartezjańskie składowe wektora $\mathbf{v}$ prędkości i wektora $\mathbf{a}$ przyspieszenia punktu oraz składowe przyspieszenia styczną i normalną do toru. Wyznaczyć także promień ρ krzywizny toru punktu jako funkcji jej długości l .

Zadanie 1.16^R

Turysta wchodzi na górkę, której zbocze wznosi się zgodnie ze wzorem $z(x) = \sqrt{ax}$, gdzie $a > 0$, przy czym składowa jego prędkości w kierunku pionowym jest stała i równa u . Oblicz czas, po którym turysta rozpoczynając z punktu o $x = 0$ dotrze do schroniska znajdującego się na zboczu na wysokości h . Podaj współrzędne (x, z) położenia turysty w każdej chwili czasu a także jego prędkość i przyspieszenie. Jaką drogę pokona docierając do schroniska? Wyznacz także krzywiznę zbocza jako funkcję wysokości z .

CZĘŚĆ (CHYBA PRAWIE WSZYSTKO) TEGO, CO BYŁO NA ĆWICZENIACH



Rysunek 1: Trzy układy współrzędnych.

1. KINEMATYKA

Zadanie 1.3

Dany jest układ współrzędnych (x, y) na płaszczyźnie oraz okrąg o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0)$. Dana jest też prosta p styczna do okręgu, która toczy się po nim bez poślizgu. (Bez poślizgu to znaczy, że jeśli w dwu różnych chwilach czasu zaznaczymy i na okręgu i na prostej punkty styczności, to odległość między tymi punktami na prostej będzie równa długości łuku pomiędzy punktami styczności na okręgu). Biegunowy kąt α wyznaczający punkt styczności prostej p z okręgiem zmienia się z czasem: $\alpha = \alpha(t)$. W chwili $t = 0$ prosta ta przechodzi przez punkt $(R, 0)$, tj. $\alpha(0) = 0$. Punkt A prostej ma w chwili $t = 0$ współrzędne (R, y_A) . Znaleźć jego współrzędne w dowolnej chwili czasu.

Rozwiązanie:

Wyrażmy najpierw współrzędne kartezjańskie (x, y) dowolnego punktu na płaszczyźnie xy przez jego współrzędne (x_0, y_0) w układzie, który ma z nieruchomym układem wspólny początek i jest obrócony o kąt α przeciwnie do wskazówek zegara:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha, \\ y &= x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Poprawność tego wzoru nietrudno sprawdzić: gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ powinno być $x_0 = y$ i $y_0 = -x$. Następnie wyrażamy współrzędne (x_0, y_0) przez współrzędne (x', y') układu przesuniętego o R wzdłuż osi x_0

$$\begin{aligned} x &= (x' + R) \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= (x' + R) \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

(x', y') jest układem o początku O' leżącym na okręgu o promieniu R . Prosta p w momencie, gdy jest do tego okręgu styczna w O' , pokrywa się z osią y' . Jeśli prosta ta z położenia zajmowanego w $t = 0$ przetoczyła się bez poślizgu stale pozostając styczną do okręgu w O' , to punkt A przesunął się w kierunku punktu styczności prostej z okręgiem (lub od niego oddalił - zależnie od tego, czy $y_A > 0$, czy $y_A < 0$ i od tego, w którą stronę po okręgu przetacza się prosta p) o odległość $R\alpha$. Przyjmując, że kąt α rośnie przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, zauważamy, że w układzie (x', y') punkt A ma po

przetoczeniu się współrzędne $(0, y_A - R\alpha)$. Stąd, w wyjściowym układzie kartezjańskim xy jego współrzędnymi będą

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos \alpha(t) - (y_A - R\alpha(t)) \sin \alpha(t), \\y(t) &= R \sin \alpha(t) + (y_A - R\alpha(t)) \cos \alpha(t).\end{aligned}$$

Zależność $\alpha(t)$ może być, oczywiście, dowolna.

Zadanie 1.4

Wyprowadzić wzory na składowe wektorów prędkości i przyspieszenia we współrzędnych biegunowych (r, φ) na płaszczyźnie i we współrzędnych sferycznych (r, θ, φ) w przestrzeni trójwymiarowej.

Rozwiązanie:

Ze współrzędnymi kartezjańskimi x, y i z stowarzyszone są ustalone jednostkowe wektory (wersory) $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Wektory położenia $\mathbf{r}$, prędkości $\mathbf{v}$ i przyspieszenia $\mathbf{a}$ zapisane jako kombinacje liniowe tych wersorów wyrażają się oczywistymi wzorami

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z,$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_x \dot{x} + \mathbf{e}_y \dot{y} + \mathbf{e}_z \dot{z},$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x \ddot{x} + \mathbf{e}_y \ddot{y} + \mathbf{e}_z \ddot{z}.$$

Układ współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie zadają wzory

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Ze współrzędnymi tymi stowarzyszone są wersory $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_\varphi$, które zmieniają się od punktu do punktu. (Należałoby więc pisać $\mathbf{e}_r(x, y)$ i $\mathbf{e}_\varphi(x, y)$ lub $\mathbf{e}_r(\varphi)$ i $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ - w istocie wersory zależą tylko od kąta φ .) Sporządzając odpowiedni rysunek (i rozpatrując przypadki $\varphi = 0$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$) łatwo jest zobaczyć, że⁵

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi,$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi.$$

Wzory te łatwo odwrócić i otrzymać

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi,$$

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi.$$

Oczywiście każdy wektor można zapisać albo w bazie wersorów kartezjańskich $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$, albo w bazie wersorów $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ w odpowiednim punkcie.⁶ Piszemy zatem (wprowadzając oczywiste skrótowe oznaczenia)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{e}_x r \cos \varphi + \mathbf{e}_y r \sin \varphi \\ &= (\mathbf{e}_r c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) r c_\varphi + (\mathbf{e}_r s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) r s_\varphi = \mathbf{e}_r r, \end{aligned}$$

⁵Dalej zobaczymy, że wzory takie można zawsze otrzymać bezpośrednio ze wzorów definiujących krzywoliniowe (tu biegunowe) współrzędne.

⁶Na pozór wersory $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ zdefiniowane w dowolnym punkcie stanowią bazę, w której można rozłożyć dowolny wektor, np. wektor prędkości odpowiadający innemu położeniu. Jednak przy bardziej geometrycznym spojrzeniu okazuje się, że gdyby zajmować się ruchem na dowolnej tzw. rozmaitości, to z każdym punktem takiej rozmaitości stowarzyszona jest naprawdę inna przestrzeń wektorowa. I to elementami przestrzeni wektorowej właściwej dla danego punktu rozmaitości - tzw. przestrzeni stycznej do rozmaitości w tym punkcie - są wektory prędkości i przyspieszenia zdefiniowane w danym punkcie rozmaitości. Wektory te, można zatem rozkładać tylko na bazowe wektory przestrzeni stycznej właściwej dla danego punktu rozmaitości przestrzeni stycznej.

jak też można się było spodziewać. Analogicznie

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{e}_x (\dot{r}c_\varphi - r\dot{\varphi}s_\varphi) + \mathbf{e}_y (\dot{r}s_\varphi + r\dot{\varphi}c_\varphi) \\ &= (\mathbf{e}_r c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) (\dot{r}c_\varphi - r\dot{\varphi}s_\varphi) \\ &\quad + (\mathbf{e}_r s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) (\dot{r}s_\varphi + r\dot{\varphi}c_\varphi) = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\varphi r\dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Składowa r -owa prędkości jest oczywista - gdyby ruch odbywał się wzdłuż promienia tylko, jego prędkość w tym kierunku byłaby w oczywisty sposób równa $\dot{r}$. Podobnie oczywista jest składowa φ -fowa: $r\dot{\varphi}$ jest po prostu prędkością liniową związaną z ruchem po okręgu o promieniu r . Wreszcie

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{e}_x (\ddot{r}c_\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}s_\varphi - r\ddot{\varphi}s_\varphi - r\dot{\varphi}^2c_\varphi) \\ &\quad + \mathbf{e}_y (\ddot{r}s_\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}c_\varphi + r\ddot{\varphi}c_\varphi - r\dot{\varphi}^2s_\varphi) \\ &= (\mathbf{e}_r c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) (\ddot{r}c_\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}s_\varphi - r\ddot{\varphi}s_\varphi - r\dot{\varphi}^2c_\varphi) \\ &\quad + (\mathbf{e}_r s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) (\ddot{r}s_\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}c_\varphi + r\ddot{\varphi}c_\varphi - r\dot{\varphi}^2s_\varphi) = \mathbf{e}_r (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \mathbf{e}_\varphi (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}).\end{aligned}$$

Znów większość wyrazów występujących w końcowym wzorze jest oczywista: $\ddot{r}$ jest przyspieszeniem ruchu wzdłuż promienia, $-r\dot{\varphi}^2$ jest przyspieszeniem dośrodkowym w ruchu po okręgu o promieniu r , a $r\ddot{\varphi}$ jest liniowym przyspieszeniem związanym z przyspieszaniem ruchu po okręgu o promieniu r . Jedynie wyrazu $2\dot{r}\dot{\varphi}$ nie można łatwo otrzymać na podstawie rozpatrywania takich szczególnych postaci ruchu.

Zauważmy też, że powyższe wzory można by było otrzymać nieco inaczej, gdyby najpierw znaleźć pochodne po czasie wektorów $\mathbf{e}_r(\varphi)$ i $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$. To zaś jest łatwe (wektory $\mathbf{e}_x$ i $\mathbf{e}_y$ jako stałe, nie podlegają różniczkowaniu):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r &= \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_x c_\varphi + \mathbf{e}_y s_\varphi) = -\dot{\varphi}s_\varphi(\mathbf{e}_r c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) \\ &\quad + \dot{\varphi}c_\varphi(\mathbf{e}_r s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) = \mathbf{e}_\varphi \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{e}_\varphi &= \frac{d}{dt}(-\mathbf{e}_x s_\varphi + \mathbf{e}_y c_\varphi) = -\dot{\varphi}c_\varphi(\mathbf{e}_r c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) \\ &\quad - \dot{\varphi}s_\varphi(\mathbf{e}_r s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) = -\mathbf{e}_r \dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Można (i właściwie należy) uogólnić te wzory tak, by nie występowała w nich zależność od czasu; należy po prostu pytać, jak zmieniają się wektory przy przejściu od punktu o współrzędnych (r, φ) do sąsiedniego o współrzędnych $(r + dr, \varphi + d\varphi)$. Zmiany te są dane przez

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Mając te wzory można już prędkość i przyspieszenie znaleźć “na piechotę”:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_r r) = \mathbf{e}_r \dot{r} + \dot{\mathbf{e}}_r r = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\varphi r\dot{\varphi},$$

i podobnie

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\varphi r \dot{\varphi}) = \mathbf{e}_r \ddot{r} + \mathbf{e}_\varphi \dot{r} \dot{\varphi} + \mathbf{e}_\varphi (\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) - \mathbf{e}_\varphi r \dot{\varphi}^2 \\ &= \mathbf{e}_r (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) + \mathbf{e}_\varphi (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}),\end{aligned}$$

tak jak i poprzednim sposobem.

W przypadku układu współrzędnych sferycznych zadnych wzorami

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \equiv r s_\theta c_\varphi, \\ x &= r \sin \theta \sin \varphi \equiv r s_\theta s_\varphi, \\ x &= r \cos \theta \equiv r c_\theta,\end{aligned}$$

trudniej jest graficznie zobaczyć, że

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x s_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_y s_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_z c_\theta, \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_x c_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_y c_\theta s_\varphi - \mathbf{e}_z s_\theta, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_x s_\varphi + \mathbf{e}_y c_\varphi.\end{aligned}$$

Wzory te można jednak natychmiast dostać wspomnianym już sposobem, który przedstawimy niżej. Aby je odwrócić, tj. wyrazić $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ przez wersory $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, mnożymy pierwsze z wypisanych wyżej równań przez $s_\theta (c_\theta)$, drugie przez $c_\theta (s_\theta)$, dodajemy (odejmujemy) je do (od) siebie i zestawiamy z trzecim, otrzymując układ (ostatnie z poprzednich równań teraz napisane zostało jako środkowe)

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r s_\theta + \mathbf{e}_\theta c_\theta &= \mathbf{e}_x c_\varphi + \mathbf{e}_y s_\varphi, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_x s_\varphi + \mathbf{e}_y c_\varphi, \\ \mathbf{e}_r c_\theta - \mathbf{e}_\theta s_\theta &= \mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

który już łatwo rozwiązać ze względu na $\mathbf{e}_x$ i $\mathbf{e}_y$ ($\mathbf{e}_z$ już jest). Ostatecznie

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_r s_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi, \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_r s_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_r c_\theta - \mathbf{e}_\theta s_\theta.\end{aligned}$$

Można teraz standardowym sposobem znaleźć pochodne wersorów $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ po kątach θ i φ (jest mniej więcej jasne, że ich pochodne po r muszą zniknąć). Obliczymy, żeby było sprawniej, pochodne zupełne po czasie (wektory mnożące $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ i $\dot{\varphi}$ będą wtedy pochodnymi różniczkowanych wersorów po współrzędnych r , θ i φ):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x (\dot{\theta} c_\theta c_\varphi - \dot{\varphi} s_\theta s_\varphi) + \mathbf{e}_y (\dot{\theta} c_\theta s_\varphi + \dot{\varphi} s_\theta c_\varphi) + \mathbf{e}_z (-\dot{\theta} s_\theta) \\ &= (\mathbf{e}_r s_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) (\dot{\theta} c_\theta c_\varphi - \dot{\varphi} s_\theta s_\varphi) \\ &\quad + (\mathbf{e}_r s_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) (\dot{\theta} c_\theta s_\varphi + \dot{\varphi} s_\theta c_\varphi) \\ &\quad + (\mathbf{e}_r c_\theta - \mathbf{e}_\theta s_\theta) (-\dot{\theta} s_\theta) \\ &= \mathbf{e}_\theta \dot{\theta} + \mathbf{e}_\varphi \dot{\varphi} s_\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_x \left(-\dot{\theta} s_\theta c_\varphi - \dot{\varphi} c_\theta s_\varphi \right) + \mathbf{e}_y \left(-\dot{\theta} s_\theta s_\varphi + \dot{\varphi} c_\theta c_\varphi \right) + \mathbf{e}_z \left(-\dot{\theta} c_\theta \right) \\
&= (\mathbf{e}_r s_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) \left(-\dot{\theta} s_\theta c_\varphi - \dot{\varphi} c_\theta s_\varphi \right) \\
&\quad + (\mathbf{e}_r s_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) \left(-\dot{\theta} s_\theta s_\varphi + \dot{\varphi} c_\theta c_\varphi \right) \\
&\quad + (\mathbf{e}_r c_\theta - \mathbf{e}_\theta s_\theta) \left(-\dot{\theta} c_\theta \right) \\
&= -\mathbf{e}_r \dot{\theta} + \mathbf{e}_\varphi \dot{\varphi} c_\theta,
\end{aligned}$$

i wreszcie

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_x (-\dot{\varphi} c_\varphi) + \mathbf{e}_y (-\dot{\varphi} s_\varphi) \\
&= (\mathbf{e}_r s_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) (-\dot{\varphi} c_\varphi) \\
&\quad + (\mathbf{e}_r s_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) (-\dot{\varphi} s_\varphi) \\
&= -\mathbf{e}_r \dot{\varphi} s_\theta - \mathbf{e}_\theta \dot{\varphi} c_\theta.
\end{aligned}$$

Stąd bezpośrednio odczytujemy pochodne wektorów $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ i $\mathbf{e}_\varphi$ po kątach

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\varphi s_\theta, \\
\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_r, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\varphi c_\theta, \\
\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_r s_\theta - \mathbf{e}_\theta c_\theta.
\end{aligned}$$

Można teraz łatwo napisać wzory na prędkość i przyspieszenie:⁷

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\mathbf{e}_r r) = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\theta r \dot{\theta} + \mathbf{e}_\varphi r \dot{\varphi} s_\theta,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\theta r \dot{\theta} + \mathbf{e}_\varphi r \dot{\varphi} s_\theta \right) = \mathbf{e}_r \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 s_\theta^2 \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_\theta \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 s_\theta c_\theta \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_\varphi \left(r \ddot{\varphi} s_\theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} s_\theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} c_\theta \right).
\end{aligned}$$

Znów część wyrazów daje się prosto zinterpretować: człon $-r \dot{\theta}^2$ w składowej a_r jest oczywiście przyspieszeniem dośrodkowym ruchu po wielkim kole (po południku), a człon $r \ddot{\theta}$ w składowej a_θ jest przyspieszeniem liniowym takiego ruchu; ruch po równoleżniku

⁷W popularnym u nas (przynajmniej na naszym warszawskim Wydziale Fizyki) podręczniku mechaniki autorstwa G. Białkowskiego wzory na składowe przyspieszenia (wzór 2.12 s. 44) są podane z błędami: w składowej a_r brak czynnika s_θ^2 , a w składowej a_θ opuszczony został ostatni człon z $\dot{\varphi}^2$.

daje też przyspieszenie dośrodkowe, ale promień równoleżnika zależy od kąta θ i jest równy rs_θ - przyspieszenie to jest jednak skierowane do środka leżącego w płaszczyźnie równoleżnikowej (a nie ku początkowi układu) i wobec tego rozkłada się z czynnikiem s_θ na kierunek $\mathbf{e}_r$ i z czynnikiem c_θ na kierunek $\mathbf{e}_\theta$ - co wyjaśnia pochodzenie ostatnich członów składowych a_r i a_θ ; wreszcie, pierwszy człon składowej a_φ jest oczywistym przyspieszeniem liniowym ruchu po równoleżniku.

Można to trochę uogólnić i znacznie uprościć znajdowanie składowych prędkości w układzie krzywoliniowym. Niech ξ^1, ξ^2, ξ^3 będą trzema współrzędnymi krzywoliniowego układu. Oznacza to, że dane są wzory

$$\begin{aligned}x &= x(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \\y &= y(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \\z &= z(\xi^1, \xi^2, \xi^3).\end{aligned}$$

W naturalny sposób z układem takim stowarzyszone są trzy wektory $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, dane wzorem⁸

$$\mathbf{i}_j(\xi) = \mathbf{e}_a \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j},$$

gdzie $x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z$, a $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_z$, są trzema kartezjańskimi wektorami tworzącymi układ ortonormalny: $(\mathbf{e}_a | \mathbf{e}_b) \equiv \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_{ab}$. Wektory $\mathbf{i}_j$ są, jak łatwo zrozumieć, styczne do krzywych wytyczanych w trójwymiarowej przestrzeni, gdy zmienia się tylko parametr ξ^j przy ustalonych pozostałych dwu pozostałych ξ . W ogólnym przypadku wektory te nie tworzą układu ortonormalnego: macierz ich iloczynów skalarnych

$$(\mathbf{i}_j | \mathbf{i}_k) = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^b}{\partial \xi^k} (\mathbf{e}_a | \mathbf{e}_b) = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^k},$$

definiuje tensor metryczny $g_{jk}(\xi)$:

$$g_{jk}(\xi) \equiv (\mathbf{i}_j | \mathbf{i}_k) = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^k}.$$

Tensor ten jest w ogólnym przypadku niediagonalny. W trójwymiarowej przestrzeni istnieje jednak 11 układów współrzędnych krzywoliniowych (wśród nich cylindryczny, sferyczny, paraboliczny, etc.), wyróżniających się tym, że stowarzyszone z nimi wektory $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ są (w każdym punkcie) wzajemnie prostopadłe. Tensor metryczny ma więc w tych układach postać

$$g_{jk}(\xi) = h_j^2(\xi) \delta_{jk}.$$

Współczynniki h_i nazywają się współczynnikami Lamé. W takich układach krzywoliniowych można stworzyć łatwo stowarzyszone z nim wektory $\mathbf{e}_j(\xi)$, $j = 1, 2, 3$ stanowiące

⁸Jak zwykle obowiązuje tu konwencja sumacyjna wujka Albercika i po wskaźnikach powtarzających się na dwu różnych poziomach (na górze i na dole) jest zawsze domyślne sumowanie.

w każdym punkcie układ ortonormalny (bazę ortonormalną). Wystarczy tylko podzielić dane w sposób naturalny wektory $\mathbf{i}_j$ przez ich długości h_j :

$$\mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{i}_j}{h_j}.$$

Dowolny wektor $\mathbf{V}$ (“zaczepiony” w danym punkcie, tzn. należący do przestrzeni stycznej w tym punkcie) można rozłożyć albo w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{i}_j$, albo w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{e}_j$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}_j V_{(\mathbf{i}_k)}^j = \mathbf{e}_j V_{(\mathbf{e}_k)}^j \equiv \mathbf{e}_j \bar{V}^j.$$

(Dwie pierwsze postacie wektora $\mathbf{V}$ są tu zapisane w notacji z mojego słynnego skryptu do algebry; ostatnia postać jest wzięta z Gravitation and Cosmology S. Weinberga.) Jasne jest więc, że $\bar{V}^j \equiv V_{(\mathbf{e}_k)}^j = h_j V_{(\mathbf{i}_k)}^j$. W przypadku układu sferycznego $\xi^1 = r$, $\xi^2 = \theta$, $\xi^3 = \varphi$, składowymi wektorów $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ w bazie wersorów kartezjańskich ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) są

$$\begin{pmatrix} s_\theta c_\varphi \\ s_\theta s_\varphi \\ c_\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r c_\theta c_\varphi \\ r c_\theta s_\varphi \\ -r s_\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -r s_\theta s_\varphi \\ r s_\theta c_\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

skąd $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r s_\theta$ i wektory $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, są dane przez unormowanie tych wypisanych wyżej (tj. podzielenie każdego z nich przez odpowiedni czynnik h), czyli wzorami, które zostały wypisane już wcześniej “spod dużego palucha” (a w istocie wykorzystując właśnie podany tu sposób).

Składowe wektora prędkości w bazie ortonormalnej⁹ tworzonej przez wektory $\mathbf{e}_j$ stwarzające z jednym z owych 11 układów krzywoliniowych można teraz otrzymać bez żadnych rachunków:¹⁰

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_a \dot{x}^a = \mathbf{e}_a \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{d\xi^j}{dt} = \mathbf{i}_j \frac{d\xi^j}{dt} = \sum_j \mathbf{e}_j \left(h_j \frac{d\xi^j}{dt} \right).$$

Tak więc w układzie sferycznym $v_r = h_r \dot{r} = \dot{r}$, $v_\theta = h_\theta \dot{\theta} = r \dot{\theta}$ i $v_\varphi = h_\varphi \dot{\varphi} = r s_\theta \dot{\varphi}$. Jak widać, nie wymaga to odwracania wzorów wiążących wersory $\mathbf{e}_j$ wersorami kartezjańskimi $\mathbf{e}_a$.

Zasadne jest pytanie, czy ta sama metoda upraszcza znalezienie składowych krzywoliniowych wektora przyspieszenia. Niestety nie za bardzo. Zobaczmy:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_a \ddot{x}^a = \mathbf{e}_a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{d\xi^j}{dt} \right) = \mathbf{e}_a \left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^j \partial \xi^k} \dot{\xi}^j \dot{\xi}^k + \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \ddot{\xi}^j \right).$$

⁹Przypomnijmy jednak, że to jest tylko takie dążenie do wygody oraz siła przyzwyczajenia, które powodują, że w problemach fizycznych jakie rozpatruje się w mechanice korzysta się na ogół z baz ortonormalnych - w istocie bazą może być dowolny układ liniowo niezależnych wektorów rozpinających całą przestrzeń wektorową. Dlatego na zaawansowanym poziomie, np. w Ogólnej teorii względności, jako bazy używa się bardziej “naturalnych” wektorów $\mathbf{i}_j$.

¹⁰Po ostatniej równości piszemy tu jawnie znak sumy, bo wprowadzenie czynników Lamé zakłóca konwencję sumacyjną Einsteina - wskaźnik j po którym biegnie suma powtarza się trzykrotnie.

Z drugiego członu w nawiasie daje się tak jak poprzednio wyciągnąć przed nawias macierz $\partial x^a / \partial \xi^j$, która w połączeniu z wektorem $\mathbf{e}_a$ da wektor $\mathbf{i}_j$, ale z pierwszego członu nie. Wszystko co można zrobić, to napisać

$$\mathbf{a} = \sum_j \mathbf{e}_j h_j \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^i \partial \xi^k} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^k + \ddot{\xi}^j \right).$$

Macierz $\partial \xi^j / \partial x^a$ stojąca w pierwszym członie jest odwrotna do macierzy $D_j^a \equiv \partial x^a / \partial \xi^j$:

$$\frac{\partial \xi^j}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \xi^j} = \delta_a^b, \quad \frac{\partial x^a}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^a} = \delta_i^j.$$

Otrzymany wzór na $\bar{a}^j$ (używając notacji Weinberga) zgadza się z tym, co już wiemy w przypadku układu sferycznego: kawałki z drugą pochodną ξ^j mają tam postać $h_j \ddot{\xi}^j$ (bez sumowania po j). Widać też, że jeśli kartezjańskie współrzędne x^a położenia są nieliniowymi funkcjami współrzędnych ξ^j , we wzorach na $\bar{a}^j$ muszą wystąpić człony z iloczynami pierwszych pochodnych współrzędnych ξ^j . Jawne ich otrzymanie jest jednak pracochłonne. Po pierwsze trzeba odwrócić macierz D_j^a . To jeszcze daje się w miarę łatwo zrobić. Wprawdzie jest to macierz zmiany bazy łącząca bazę ortonormalną z bazą nieortonormalną, $\mathbf{i}_j = \mathbf{e}_a D_j^a$ ($\mathbf{i}_j = \mathbf{e}_a [R_{(\mathbf{e}_a \leftarrow \mathbf{i}_j)}]_j^a$ w notacji z mojego skryptu do algebry) ale, w przypadku owych 11 specjalnych układów współrzędnych, baza $\mathbf{i}_j$ wiąże się prosto (bo tylko przez współczynniki Lamé) z bazą ortonormalną $\mathbf{e}_j$. Zatem (sumowanie jest tu po a , ale nie po j !)

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_a \left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{1}{h_j} \right) \equiv \mathbf{e}_a (D_j^a h_j^{-1}),$$

a stojąca tu w nawiasie macierz zmiany bazy R (lub $[R_{(\mathbf{e}_a \leftarrow \mathbf{e}_j)}]_j^a$ w mojej algebraicznej notacji) jako łącząca ze sobą dwie bazy ortonormalne musi być macierzą ortogonalną i jej odwrotność R^{-1} jest dana po prostu przez transpozycję: $R^{-1} = R^T$. Zatem

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{e}_j [R^T]_a^j = \mathbf{i}_j (h_j^{-1} [R^T]_a^j).$$

Stojąca tu w nawiasach okrągłych macierz jest właśnie szukaną macierzą $[D^{-1}]_a^i$ odwrotną do D_i^a .

W przypadku układu sferycznego macierz R jest macierzą stworzoną z postawionych “na sztorc” składowych (w bazie wersorów kartezjańskich) wektorów $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ i $\mathbf{e}_\varphi$. Biorąc jej transpozycję i następnie przemnażając j -ty wiersz macierzy R^T przez h_j^{-1} otrzymujemy

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} s_\theta c_\varphi & s_\theta s_\varphi & c_\theta \\ c_\theta c_\varphi / r & c_\theta s_\varphi / r & -s_\theta / r \\ -s_\varphi / (r s_\theta) & c_\varphi / (r s_\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak łatwo sprawdzić, jest to rzeczywiście macierz odwrotna do

$$D = \begin{pmatrix} s_\theta c_\varphi & r c_\theta c_\varphi & -r s_\theta s_\varphi \\ s_\theta s_\varphi & r c_\theta s_\varphi & r s_\theta c_\varphi \\ c_\theta & -r s_\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Można teraz spróbować otrzymać składowe przyspieszenia w układzie sferycznym.

$$a_r = h_r \left(\ddot{r} + s_\theta c_\varphi \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^i \partial \xi^l} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^l + s_\theta s_\varphi \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^i \partial \xi^l} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^l + c_\theta \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^i \partial \xi^l} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^l \right).$$

Ponieważ $h_r = 1$ daje to (od razu uwzględniamy, że $x_{rr} = y_{rr} = z_{rr} = 0$)

$$\begin{aligned} a_r = \ddot{r} + s_\theta c_\varphi \left(2x_{r\theta} \dot{r} \dot{\theta} + 2x_{r\varphi} \dot{r} \dot{\varphi} + 2x_{\theta\varphi} \dot{\theta} \dot{\varphi} + x_{\theta\theta} \dot{\theta}^2 + x_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 \right) \\ + s_\theta c_\varphi \left(2y_{r\theta} \dot{r} \dot{\theta} + 2y_{r\varphi} \dot{r} \dot{\varphi} + 2y_{\theta\varphi} \dot{\theta} \dot{\varphi} + y_{\theta\theta} \dot{\theta}^2 + y_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 \right) \\ + c_\theta \left(2z_{r\theta} \dot{r} \dot{\theta} + 2z_{r\varphi} \dot{r} \dot{\varphi} + 2z_{\theta\varphi} \dot{\theta} \dot{\varphi} + z_{\theta\theta} \dot{\theta}^2 + z_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 \right). \end{aligned}$$

Jak widać nie jest to bardzo przyjemne... Ale cierpliwie różniczkując możemy dojść do celu:

$$\begin{aligned} a_r = \ddot{r} + s_\theta c_\varphi \left(2c_\theta c_\varphi \dot{r} \dot{\theta} - 2s_\theta s_\varphi \dot{r} \dot{\varphi} - 2rc_\theta s_\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} - rs_\theta c_\varphi \dot{\theta}^2 - rs_\theta c_\varphi \dot{\varphi}^2 \right) \\ + s_\theta c_\varphi \left(2c_\theta s_\varphi \dot{r} \dot{\theta} + 2s_\theta c_\varphi \dot{r} \dot{\varphi} + 2rc_\theta c_\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} - rs_\theta s_\varphi \dot{\theta}^2 - rs_\theta s_\varphi \dot{\varphi}^2 \right) \\ + c_\theta \left(-2s_\theta \dot{r} \dot{\theta} - rc_\theta \dot{\theta}^2 \right), \end{aligned}$$

i po poskładaniu wszystkiego do kupy otrzymać

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - rs_\theta^2 \dot{\varphi}^2.$$

Otrzymanie a_θ i a_φ tą metodą pozostawimy już czytelnikowi.

Najszybszy jednak sposób otrzymania przyspieszeń w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych polega na odwołaniu się do równań Lagrange'a II-go rodzaju: ponieważ otrzymanie wzorów na prędkości jest, jak wynika z przeprowadzonych wyżej rozważań, bardzo proste, wystarczy wyrazić przez nie energię kinetyczną $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ i napisać lagrangian cząstki swobodnej $L = T$; wyprowadzone z niego równania Eulera - Lagrange'a dadzą natychmiast szukane wzory na przyspieszenia. Np. w układzie sferycznym

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right),$$

i równania Eulera - Lagrange'a mają postać

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= m(r\dot{\theta}^2 + r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta), \\ m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) &= mr^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ m(r^2\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \theta + 2r^2\dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ są to równania ruchu cząstki swobodnej, $m\mathbf{a} = 0$, składowe przyspieszenia muszą być proporcjonalne do wyrażeń, które się dostaje po przeniesieniu wszystkich członów na jedną stronę i podzieleniu przez m . W ustaleniu czynników proporcjonalności można się posłużyć analizą wymiarową (przyspieszenia muszą mieć wymiar $[L][T]^{-2}$ i pewnym wyczuciem (fizycznym zdrowym rozsądkiem). Drugie z wypisanych wyżej równań daje a_θ po podzieleniu przez czynnik r (analiza wymiarowa); trzecie zaś po podzieleniu przez $r \sin \theta$ (człon z $\ddot{\varphi}$ musi dawać związane ze zmianą $\dot{\varphi}$ przyspieszenie styczne do równoleżnika o promieniu $r \sin \theta$).

Zadanie 1.9

Wiedząc, że podczas płaskiego ruchu cząstki kąt pomiędzy kierunkiem jej wektora wodzącego $\mathbf{r}$ i wektorem jej prędkości $\mathbf{v}$ jest stały (i równy α) znaleźć we współrzędnych biegunowych:

a) wzór na tor cząstki,

b) długość toru w funkcji położenia cząstki.

Przyjąć jako warunki początkowe $\varphi(0) = 0$ i $r(0) = r_0$. Zależność szybkości $|\mathbf{v}(t)|$ od czasu może być dowolna.

Rozwiązanie:

Jeśli $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ jest wektorem wodzącym (czyli wektorem położenia), a $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$, wektorem prędkości, to cosinus kąta α pomiędzy nimi jest równy

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|} = \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}}.$$

Stąd (pamiętając, że $\dot{r}/\dot{\varphi} = dr/d\varphi$) otrzymujemy natychmiast równanie różniczkowe wyznaczające tor w postaci $r = r(\varphi)$:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Warto tu się zastanowić nad znakiem (po drodze podnosiliśmy coś do kwadratu i wyciągali pierwiastek - znak mógł się zgubić). Jest on jednak poprawny: jeśli $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, to wektor prędkości jest tak skierowany, że odległość r powinna rosnąć ze wzrostem φ i rzeczywiście kotangens jest wtedy dodatni;¹¹ gdy $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, to r rośnie ale wtedy, gdy φ maleje (kąt φ jest liczony przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara) i rzeczywiście ctg jest wtedy ujemny. Z kolei, gdy $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, to r maleje, gdy kąt rośnie i ctg jest ujemny, tak jak powinien. Rozwiązaniem uzyskanego równania różniczkowego jest spirala

$$r(\varphi) = r(\varphi_0) \exp \{(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha\}.$$

Gdy chodzi o długość toru, to widać (patrz przypis niżej) że wystarczy rozpatrzyć tylko przypadki $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, kiedy to tor jest spiralą rozwijającą się i jego długość rośnie ze wzrostem φ nieograniczenie, oraz przypadek $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, gdy tor jest zacieśniającą się spiralą i powinien mieć skończoną długość nawet wtedy, gdy $\varphi \rightarrow \infty$. Przyjmując więc, że $\dot{\varphi} > 0$ obliczmy długość toru $s(t)$ jako funkcję czasu przechodząc po drodze do $s(\varphi(t))$

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t dt' |\mathbf{v}(t')| = \int_0^t dt' \sqrt{v_r^2(t') + v_\varphi^2(t')} = \int_0^t dt' \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} \\ &= \int_0^t dt' \dot{\varphi} \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right]^{1/2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right]^{1/2} \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi [r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + r^2]^{1/2} = \frac{1}{\sin \alpha} \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi r(\varphi), \end{aligned}$$

¹¹A co, gdy $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$? Powinno być tak samo, tzn. odległość r też powinna rosnąć, bo na rysunku sytuacja wygląda tak samo, ale $\operatorname{ctg} \alpha$ jest w tm zakresie kątów ujemny... No tak, ale wtedy ze wzrostem r kąt φ nie rośnie, tylko maleje więc równanie znów jest poprawne!

gdzie skorzystaliśmy ze związku $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha$ i wzoru na $dr/d\varphi$. Całkując otrzymujemy

$$s(t) = \frac{r(\varphi_0)}{\sin \alpha} \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi e^{(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{r(\varphi_0)}{\cos \alpha} e^{(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi(t)} = \frac{r(\varphi_0)}{\cos \alpha} [e^{(\varphi(t) - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha} - 1],$$

Wzór można uprościć przyjmując, że $\varphi_0 = 0$. $\operatorname{ctg} \alpha$ jest dodatni, gdy $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ i długość toru jest wtedy nieograniczona, gdy kąt φ rośnie nieograniczenie. Jeśli zaś $\operatorname{ctg} \alpha < 0$ (czyli, gdy $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), długość toru jest skończona, gdy $\varphi \rightarrow \infty$:

$$s(\infty) = -\frac{r(\varphi_0)}{\cos \alpha},$$

(oczywiście, gdy $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ to $\cos \alpha < 0$ i długość toru jest dodatnia). Przypadek $\alpha = \frac{\pi}{2}$ jest szczególny: odległość r pozostaje stała, równa $r(\varphi_0)$. Długość toru jest oczywiście nieskończona jeśli φ rośnie nieograniczenie, ale jeśli rozpatrzeć długość toru od φ_0 do $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$, to w granicy $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ uzyskany wzór daje oczywiście $s = 2\pi r(\varphi_0)$:

$$s(\varphi = 2\pi) = \lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{r(\varphi_0)}{\cos \alpha} \left[1 + 2\pi \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2}(2\pi \operatorname{ctg} \alpha)^2 + \dots - 1 \right] = 2\pi r(\varphi_0).$$

Wreszcie przypadki $\alpha = 0$ lub π są szczególne w tym znaczeniu, że wektor prędkości jest skierowany wzdłuż wektora wodzącego i kąt φ pozostaje stały.¹² Nie można więc w tym przypadku napisać równania toru w postaci $r = r(\varphi)$. Możliwy jest tylko parametryczny opis toru (naturalnym parametrem jest tu czas) $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t) = \operatorname{const} = \varphi_0$.

¹²Dobrze jest przepisać uzyskane równanie różniczkowe w (zalecanej przeze mnie na Matmie II) postaci $dr \operatorname{tg} \alpha = r d\varphi$. Wtedy widać, że gdy $\alpha = 0$ lub π , zmiana r nie pociąga za sobą zmiany kąta φ .