

Profesorowi Iwo Białynickiemu-Biruli  
na jego dziewięćdziesięciolecie,  
kwantowej teorii pola na jej stulecie.

# Postawić kwantową teorię pola z głowy na nogi Bringing quantum field theory down to Earth

część 3\*

Piotr Chankowski\*\*

Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

**Abstrakt.** Wbrew wrażeniu jakie można odnieść z większości standardowych podręczników, równania falowe Diraca, Kleina–Gordona i inne nie są podstawą kwantowej teorii pola. W niniejszym artykule staram się pokazać, jak powinna być ona poprawnie formułowana i omawiam pewne jej aspekty, które na ogół nie są przedstawiane właściwie. Celem artykułu jest spowodowanie zmiany w nauczaniu kwantowej teorii pola. Tekst został podzielony na trzy części. W niniejszej trzeciej (i ostatniej) omawiam przepis LSZ pozwalający wyznaczać elementy macierzy  $S$  i inne fizyczne wielkości bez czynienia zwykłych bardzo restrykcyjnych założeń oraz zalety i słabości formułowania kwantowej teorii pola za pomocą całek po trajektoriach.

**Słowa kluczowe:** cząstki, pola, kwantowa teoria pola, równania falowe, renormalizacja, redukcja LSZ, całki po trajektoriach

**Abstract.** Despite the impression that can be gained from most of the standard textbooks, Dirac, Klein-Gordon and other wave equations do not constitute the basis of quantum field theory. In this article I attempt to show how it should be formulated properly and discuss some of its aspects which usually are presented unsatisfactorily. The aim of the text is to cause the change in the way quantum field theory is taught. The text is split into three parts. In the third part (the last one) I discuss the LSZ prescription which allows to extract  $S$ -matrix elements without making the usual, very restrictive assumptions and advantages and weak sides of formulating quantum field theory with the help of path integrals.

**Keywords:** particles, fields, quantum field theory, wave equations, renormalization, LSZ reduction, path integrals

## „Serce” kwantowej teorii pola – przepis „redukcyjny” Lehmana, Symanzika i Zimmermana (LSZ)

W poprzednich dwóch częściach omówiłem dwa sformułowania kwantowej teorii pola: jako teorii oddziałujących cząstek (relatywistycznych lub nie) i jako kwantowej teorii układu, którym jest pole lub pola oraz fizyczny sens procedury renormalizacji. Wyjaśniłem, że w obu podejściach wyznaczanie elementów macierzy  $S$  przedstawiane w standardowych podręcznikach (zapewne z powodów historycznych) wykorzystuje niejawnie silne, na ogół niespełnione, założenie o ścisłej odpowiedniości stanów własnych pełnego hamiltonianu  $H_0 + V_{\text{int}}$  teorii z oddziaływaniem i hamiltonianu swobodnego  $H_0$ . Teraz wypada zająć się wreszcie problemem, jak ogólnie, nie

opierając się na tym restrykcyjnym założeniu, powinno się w ramach kwantowej teorii pola wyznaczać wielkości mierzalne (tzn. te, które są skończone tylko dzięki renormalizacji parametrów teorii), takie jak masy „ubranych” cząstek, elementy macierzy  $S$ , czy elementy macierzowe między stanami in i out operatorów reprezentujących prądy Noether różnych symetrii. Okazuje się, że w tym celu należy wykorzystać  $n$ -punktowe funkcje Greena<sup>1</sup> zdefiniowane jako wartości oczekiwane w stanie podstawowym  $|\Omega\rangle$  pełnego hamiltonianu  $H$  teorii chronologicznie uporządkowanych iloczynów  $n$  heisenbergowskich, elementarnych bądź złożonych, operatorów  $O_{l_i}^H(x_i)$ :

$$iG_{l_1, \dots, l_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T [ O_{l_1}^H(x_1) \dots O_{l_n}^H(x_n) ] | \Omega \rangle.$$

\*część 1: *Postępy fizyki* 74 (3) 5(2023)

część 2: *Postępy Fizyki* 74 (4) 5 (2023)

\*\*ORCID: 0000-0002-8897-3426

Kontakt z autorem: Piotr.Chankowski@fuw.edu.pl

1. Ścisłej rzecz ujmując, części spójne funkcji Greena – można je zdefiniować nie odwołując się do diagramów Feynmana.

T oznacza operację uporządkowania według wzrastających z prawa na lewo wartości  $x_i^0$ , a wskaźniki  $l_i$  poszczególnych operatorów odpowiadają zarówno ich właściwościom transformacyjnym ze względu na grupę Lorentza, jak i grupy symetrii wewnętrznych (globalnych i/lub cechowania). Funkcje takie można zdefiniować w obu omówionych sformułowaniach kwantowej teorii pola. Co więcej, nie zakłada się przy tym jakie cząstki reprezentują stany własne pełnego hamiltonianu (ani, czy w ogóle stany te mogą mieć interpretację stanów *in* i *out* odpowiadających jakimś cząstkom). Jedyne co się przyjmuje, co i tak jest podstawowym wymogiem, jaki musi spełniać każdy sensowny model mechaniki kwantowej, to istnienie (normalizowalnego) stanu podstawowego  $|\Omega\rangle$ .

Wykorzystując właściwości iloczynu chronologicznego oraz podstawowe zasady mechaniki kwantowej (możliwość zapisania operatora jednostkowego w postaci sumy rzutów na podprzestrzenie własne  $H$ ) można pokazać, że jeśli istnieje stan własny  $|\mathbf{p}, \sigma, m_{\text{ph}}\rangle$  pełnego hamiltonianu teorii mający, ze względu na swoje właściwości transformacyjne pod działaniem symetrii Poincarégo interpretację stanu pojedynczej (stabilnej) cząstki o masie  $m_{\text{ph}}$  i spinie  $s$ , to transformata Fouriera  $i\tilde{G}_{l_1, \dots, l_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  zdefiniowanej wyżej funkcji Greena (jej spójnej części) potraktowana jak funkcja czteropędów  $p_i$  ma, jeśli tylko nie znika element macierzowy  $\langle \mathbf{p}, \sigma, m_{\text{ph}} | O_i^H(0) | \Omega \rangle$ , biegun prosty w  $p_i^2 = m_{\text{ph}}^2$  i biegun ten pochodzi od granicy  $x_i^0 = \infty$  lub  $-\infty$  osiąganey przy całkowaniu po  $d^4x_i$  przy obliczaniu transformaty Fouriera.<sup>2</sup> Szczególnie prosty jest przypadek dwupunktowej funkcji Greena, tj. funkcji operatora  $O_i^H$  (elementarnego bądź złożonego) i jego hermitowskiego sprzężenia  $O_i^{H\dagger}$ , bo jeśli ma ona jako funkcja  $p^2$  taki biegun, to jego residuum dane wyrażeniem

$$i \sum_{\sigma} \langle \Omega | O_i^H(0) | \mathbf{p}, \sigma, m_{\text{ph}} \rangle \langle \mathbf{p}, \sigma, m_{\text{ph}} | O_i^{H\dagger}(0) | \Omega \rangle,$$

jest, z dokładnością do zależnego od szczegółów teorii (tj. od oddziaływania) stałego i rzeczywistego czynnika  $\mathcal{Z}_O$ , wyznaczone jednoznacznie (znów jest to problem czyisto teoriogrupowy) przez właściwości transformacyjne przy przekształceniach Poincarégo operatora  $O_i^H(x)$  oraz stanu  $|\mathbf{p}, \sigma, m_{\text{ph}}\rangle$  pojedynczej fizycznej cząstki o masie  $m_{\text{ph}}$ , pędzie  $\mathbf{p}$  i rzucie spinu  $\sigma$ . Z dokładnością do  $\mathcal{Z}_O$

musi więc być ono dane iloczynem  $u_i(\mathbf{p}, \sigma)u_j^*(\mathbf{p}, \sigma)$  (lub  $v_i^*(\mathbf{p}, \sigma)v_j(\mathbf{p}, \sigma)$ , jeśli cząstkę uważamy za antycząstkę, co jest oczywiście sprawą umowy) funkcji  $u_i(\mathbf{p}, \sigma)$  lub  $v_i(\mathbf{p}, \sigma)$  występujących w operatorze pola transformującym się tak jak  $O_i^H(x)$  jaki można by było bezpośrednio z tą cząstką związać w sensie omówionym przy okazji formułowania kwantowej teorii pola jako teorii oddziałujących cząstek, zastępując tylko operatory kreacji i anihilacji cząstek „gołych” analogicznymi operatorami kreującymi i anihilującymi cząstkę „fizyczną” w stanie *in* lub *out* ze stanu podstawowego  $|\Omega\rangle$  pełnego hamiltonianu teorii.

Tak więc analiza dwupunktowych funkcji Greena różnych operatorów pozwala w zasadzie ustalić, jakie cząstki będą reprezentowane przez stany asymptotyczne *in* i *out* pełnego hamiltonianu danej teorii (i czy w ogóle ma on takie stany). Wynika stąd, jako że funkcje Greena operatorów pól elementarnych mogą nie mieć biegunów prostych, a z kolei bieguny takie mogą mieć funkcje Greena operatorów złożonych (tak jest np. w chromodynamice kwantowej) i co więcej, biegun odpowiadający danej „fizycznej” cząstce na ogół wystąpi w funkcjach Greena różnych operatorów  $O_i^H(x_i)$  (np. w teorii pojedynczego samooddziałującego pola skalarnego biegun odpowiadający tej samej cząstce bezspinowej wystąpi w dwupunktowych funkcjach Greena operatorów  $\hat{\phi}_H(x)$ ,  $\hat{\phi}_H^3(x)$ ,  $\hat{\phi}_H^5(x)$ ,  $\dots$ , a także  $\partial_\mu \hat{\phi}_H(x)$ , etc., przy czym każdy operator  $\hat{\phi}_H(x)$  może tu odpowiadać inaczej przeskalowanemu polu – inne będą tylko czynniki  $\mathcal{Z}_O$  i, w przypadku operatora  $\partial_\mu \hat{\phi}_H(x)$ , funkcje  $u_i$ ), że jeśli w ogóle można przydać jakiś sens tzw. „dualizmowi cząstka-pole”, jaki rzekomo ma wynikać z kwantowej teorii pola, to nie jest on taki prosty i bezpośredni, jak to się zwykle przyjmuje, zwłaszcza przy okazji popularyzacji fizyki cząstek elementarnych. Analiza dwupunktowych funkcji Greena pozwala też wyznaczyć masy fizycznych cząstek (lub wyrazić przez te masy „gołe” parametry działania (tak jak to wyjaśniałem przy okazji dyskusji sensu renormalizacji) oraz czynniki  $\mathcal{Z}_O$  (które, nie będąc same wielkościami fizycznymi, nie muszą być skończone) odpowiadające różnym operatorom, których można użyć w wielopunktowych funkcjach Greena, by otrzymać z nich elementy macierzy  $S$  lub elementy macierzowe (między stanami *in* i *out*) wyróżnionych tu wcześniej operatorów.

Wielokrotne zastosowanie kolejno do wszystkich argumentów (do linii zewnętrznych w jej graficznym przedstawieniu) transformaty Fouriera danej  $n$ -punktowej (spójnej) funkcji Greena, tj. funkcji  $n \geq 4$  ustalonych operatorów  $O_i^H(x_i)$ , tego samego chwytu polegającego na sfaktoryzowaniu w granicy  $p_i^2 \rightarrow m_{\text{ph}}^2$  bieguna odpowiadającego w położeniowej reprezentacji funkcji Greena granicy  $x_i^0 \rightarrow -\infty$  (jeśli cząstka lub antycząstka ma należeć do stanu *in* lub  $x_i^0 \rightarrow +\infty$ , jeśli do stanu *out*) prowa-

2. Bardziej ogólnie funkcja Greena może mieć też biegun prosty jako funkcja  $q^2 = (p_1 + \dots + p_r)^2$ , tj. niezmienniczego kwadratu sumy kilku czteropędów ( $1 \leq r \leq n$ ) – bieguny takie pochodzą od obszaru całkowania, w którym  $x_1^0, \dots, x_r^0$  jednocześnie dążą do  $-\infty$  lub  $+\infty$ , a  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$  stają się takie same; odpowiadają one trwałym stanom związanym cząstek, które w omawianym w tekście sensie można uznać za związane z iloczynem  $O_{l_1}^H \dots O_{l_r}^H$  operatorów – np. w ten sposób w funkcjach Greena operatorów elementarnych elektrodynamiki elektronów i mionów powinien ujawniać się biegun odpowiadający stabilnemu stanowi związanemu  $e^- \mu^+$  lub  $e^+ \mu^-$ .

dzi, jak można zobaczyć, do przedstawienia jej w postaci zsumowanego po wszystkich zmiennych spinowych iloczynu elementu macierzy  $S$  (odpowiadającego przejściu zadanego zestawu „fizycznych” cząstek i antycząstek w  $t = -\infty$  o określonych masach, pędach i rzutach spinu w inny zestaw takich cząstek i antycząstek w  $t = \infty$ ) oraz czynników  $i\mathcal{Z}_{O_i}^{1/2} u_i^*(\mathbf{p}, \sigma, m_{\text{ph}})/(q_i^2 - m_{\text{ph}}^2 + i0)$  na każdą cząstkę w stanie *out* ( $v_l$  zamiast  $u_l^*$ , gdy jest to antycząstka) lub  $i\mathcal{Z}_{O_i}^{1/2} u_l(\mathbf{p}, \sigma, m_{\text{ph}})/(q_i^2 - m_{\text{ph}}^2 + i0)$  na każdą cząstkę w stanie *in* ( $v_l^*$  zamiast  $u_l$ , gdy jest to antycząstka). Jeśli natomiast takie faktoryzowanie biegunów zastosować do wszystkich argumentów funkcji Greena z wyjątkiem jednego, to zamiast elementu macierzy  $S$  otrzyma się element macierzowy operatora odpowiadającego „pozostawionemu” argumentowi pomiędzy stanami *in* i *out*; interesujące są tu zazwyczaj operatory takie jak zachowane prądy Noether albo specjalnie skonstruowane „zrenormalizowane” operatory, o których wspomniałem przy omawianiu renormalizacji. Tak więc użycie w  $n$ -punktowej funkcji Greena znanych (z obliczenia odpowiednich dwupunktowych funkcji Greena) czynników  $\mathcal{Z}_{O_i}$  operatorów  $\hat{O}_i$  pozwala w zasadzie wydzielić z niej elementy macierzy  $S$  lub elementy macierzowe pomiędzy stanami *in* i *out* konkretnych operatorów, przy czym z jednej i tej samej funkcji Greena można otrzymać elementy macierzy  $S$  odpowiadające różnym procesom lub różne elementy macierzowe „pozostawionego” operatora wiążące się jedne z drugimi tzw. przekształceniem krzyżowania polegającym na zamienianiu jakiejś cząstki w stanie *in* jej antycząstką w stanie *out* lub na odwrót, co odpowiada badaniu zamiast granicy  $x_i^0 = -\infty$  granicy  $x_i^0 = \infty$ , lub na odwrót, odpowiedzialnej za występowanie odpowiedniego bieguna funkcji Greena.

Kroki jakie trzeba wykonać przy wyprowadzaniu sfaktoryzowanej postaci fourierowskiej reprezentacji funkcji Greena pozwalają także dostrzec kluczową rolę, jaką pełni „lokalność” kwantowej teorii pola – jest ona konieczna, by na pewnym etapie tego wyprowadzenia można było zastąpić elementy macierzowe typu

$$\langle (\mathbf{p}'_1 \sigma'_1, \mathbf{p}'_2 \sigma'_2)_{\text{in}} | \hat{O}_2^H(x_2) | (\mathbf{p}_1 \sigma_1)_{\text{in}} \rangle,$$

sfaktoryzowanymi wyrażeniami postaci

$$\begin{aligned} & \langle (\mathbf{p}'_1 \sigma'_1)_{\text{in}} | (\mathbf{p}_1 \sigma_1)_{\text{in}} \rangle \times \langle (\mathbf{p}'_2 \sigma'_2)_{\text{in}} | \hat{O}_2^H(x_2) | \Omega \rangle \\ & = \delta_T^{(3)}(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \times \mathcal{Z}_{O_2} e^{ip_2 x_2} u_{l_2}^*(\mathbf{p}_2, \sigma_2), \end{aligned}$$

gdzie symbol  $\delta_T^{(3)}$  oznacza funkcję delta Diraca odpowiadającą relatywistycznie niezmienniczej mierze na przestrzeni pędów. Faktoryzacja ta wykorzystuje fakt, że jeśli cząstki przed oddziaływaniem (lub po nim) są, tak jak w realnych eksperymentach, zlokalizowane w przestrzeni daleko od siebie (tzn. stan każdej z nich nie charakteryzuje się ściśle określonym pędem, lecz jest pewną super-

pozycją takich stanów o niewielkiej dyspersji wokół pewnej wartości średniej), to operator  $O_{l_2}^H$  o argumentie  $x_2$  odpowiednim do tego, gdzie znajduje się zlokalizowana cząstka, anihiluje (lub kreuje) ją, tak jak gdyby innych cząstek w ogóle nie było i dlatego można ten operator napisać pomiędzy stanem cząstki i próżni. Ten aspekt tzw. redukcji LSZ nie jest widoczny, gdy się ją przeprowadza, tak jak zwykle w podręcznikach (np. Bjorkena i Drella, Itzyksona i Zuber), posługując się wyłącznie położeniowym przedstawieniem funkcji Greena.<sup>3</sup>

Łatwo teraz zrozumieć, przynajmniej w sytuacji, gdy elementy macierzy  $S$  otrzymać można z funkcji Greena operatorów pól elementarnych, że muszą one być skończone, nawet jeśli korzysta się z operatorów niezrenormalizowanych (tych niby jedynych „kanonicznych”) lub przeskalowanych dowolnie. Istotnie, jeśli wszystkie funkcje Greena operatorów elementarnych można uczynić skończonymi („zrenormalizować”) wybierając odpowiednie przeskalowania (czynniki  $\mathcal{Z}$  „renormalizacji funkcji falowych”), to skończone będą (otrzymywane ze skończonych funkcji dwupunktowych) czynniki  $\mathcal{Z}$  tak przeskalowanych operatorów i oczywiście także elementy macierzy  $S$  otrzymywane przy ich użyciu w innych skończonych wielopunktowych funkcji Greena. Jdnak funkcje Greena nieprzeskalowanych (czy przeskalowanych inaczej) operatorów elementarnych są związane z funkcjami Greena operatorów „zrenormalizowanych” tylko przez pomnożenie przez odpowiedni iloczyn czynników  $\mathcal{Z}^{1/2}$ , a dokładnie tak samo są ze sobą związane czynniki  $\mathcal{Z}$  operatorów przeskalowanych i nieprzeskalowanych (czy przeskalowanych inaczej), jest jasne zatem, że przeskalowania nie zmieniają elementów macierzy  $S$  – wszystkie związane z takimi przeskalowaniami zmiany funkcji Greena zmieniają tylko czynniki  $\mathcal{Z}^{1/2}$ , które trzeba z funkcji Greena i tak wydzielić, by otrzymać element macierzy  $S$ . Pozostaje to prawdą także, jeśli zamiast z operatorów elementarnych do otrzymania elementów macierzy  $S$ ,

3. Weinberg w swojej Teorii pól kwantowych (t. I, Podstawy, PWN 1999) wykorzystuje przedstawienie fourierowskie, ale ogranicza się do pokazania, jak z funkcji Greena ekstrakować tylko jedną cząstkę, do czego założenie o lokalności nie jest potrzebne. Część niezbędnych dalszych rozumowań można odnaleźć w jego własnych wykładach z Brandais University (1970), ale trzeba do tego dojść samemu, ponieważ zapomniał podać odnośnik; przy tym i tak nie mówi wszystkiego co trzeba i nie wykorzystuje płynących z tych rozumowań wniosków, tak więc czytelnik jego podręcznika ma małe szanse dostrzec, jakie znaczenie ogólne ma przepis LSZ. Nota bene, we wstępie do swego dzieła pisze także o konieczności renormalizacji pól. Stwierdzenie to jest po prostu nieprawdziwe, a sposób w jaki w dalszej części (rozdział 10) przeprowadza i wyjaśnia tę renormalizację jest tak mętny, że czyni wielce prawdopodobną tezę, iż po prostu tego akurat problemu nie rozumiał.

skorzysta się z funkcji Greena jednego lub więcej operatorów złożonych. Na przykład element macierzy  $S$  odpowiadający w teorii samooddziaływającego pola skalarnego elastycznemu rozpraszaniu na sobie dwóch bezspinywanych cząstek można otrzymać nie tylko z funkcji Greena  $\langle \Omega | T \varphi_H(x_1) \varphi_H(x_2) \varphi_H(x_3) \varphi_H(x_4) | \Omega \rangle$ , ale także np. z funkcji Greena  $\langle \Omega | T \varphi_H^3(x_1) \varphi_H(x_2) \varphi_H(x_3) \partial_\mu \varphi_H(x_4) | \Omega \rangle$ . Przy okazji warto też zauważyć, że jeśli zadziałać np. na występujący w takich funkcjach Greena operator  $\varphi_H(x_2)$  czynnikiem  $\partial_{x_2}^2 + m_{\text{ph}}^2$ , w celu wyeliminowania z jej fourierowskiej reprezentacji czynnika  $1/(p_2^2 - m_{\text{ph}}^2)$  (który, zgodnie z podanym przepisem, trzeba sfaktoryzować i usunąć, by otrzymać element macierzy  $S$ ), to można przy obliczaniu powstającego w wyniku tej operacji elementu macierzowego skorzystać z heisenbergowskiego równania ruchu<sup>4</sup>  $(\partial_{x_2}^2 + m_{\text{ph}}^2) \varphi_H(x_2) = \lambda^B \varphi_H^3(x_2) + \text{kontrcślony}$  (postać kontrcślonych zależy od tego, jak w stosunku do „kanonicznego” pola  $\varphi$  jest przeskalowany operator  $\varphi_H$ ). Skończone są także, po renormalizacji samych parametrów teorii, obliczane według analogicznego przepisu elementy macierzowe wyróżnionych operatorów, jakimi są prądy Noether symetrii lub operatorów „renormalizowanych”.

Naszkicowany wyżej przepis LSZ, pozwalający otrzymać macierz  $S$  danego modelu kwantowej teorii pola z funkcji Greena operatorów heisenbergowskich, uwalnia nas w zasadzie od konieczności opierania się na (zwykle nie dającym się spełnić) – założeniu o ściślejszej odpowiedniości stanów *in* i *out* oraz stanów własnych  $H_0$ . Przepis, sformułowany tak ogólnie jak wyżej, pozostaje do pewnego stopnia tylko formalny, ponieważ podstawową metodą analizowania modeli kwantowej teorii pola pozostaje dysonowski rachunek zaburzeń.<sup>5</sup> Jednak nawet w ramach rachunku zaburzeń, kiedy przyjmuje się, że amplitudy reakcji zachodzących między cząstkami

reprezentowanymi przez prawdziwe stany *in* i *out* (tj. elementy macierzy  $S$  teorii) można otrzymać z funkcji Greena operatorów pól elementarnych, przepis LSZ jest tym, co uzasadnia posługiwanie się dowolnie przeskalowanymi (więc też i dowolnie zrenormalizowanymi) operatorami pól elementarnych i, w połączeniu z omówioną już dowolnością rozbicia „gołych” parametrów teorii na „renormalizowane” i kontrcślony, stosowanie dowolnych w zasadzie schematów renormalizacji (takich jak schemat „na powłoce masy”, czy minimalne odjęcie). Wykorzystując to, że dowolną  $n$ -punktową spójną funkcję Greena można „rozłożyć” na funkcje dwupunktowe i tzw. jednocząstkowo nieredukowalne funkcje Greena  $\Gamma^{(k)}$  o  $2 < k < n$  (łatwo to wyjaśnić posługując się wykorzystywanymi w dysonowskim rachunku zaburzeń diagramami Feynmana, ale rozkład funkcji Greena na takie elementy można zdefiniować ogólnie bez odwoływania się do tego), przepis LSZ można sformułować w taki sposób, że obliczając (posługując się diagramami Feynmana) spójną funkcję Greena (a dokładnie jej transformatę Fouriera) należy całkowicie pominąć w powyższym rozkładzie dwupunktowe funkcje Greena odpowiadające jej liniom końcowym (w ten sposób nie powstaje problem „kinematycznych” nieskończoności przy „przechodzeniu na powłokę masy”, tj. gdy przyjmuje się, że czteropędy tych linii spełniają warunki  $p_i^2 = m_{\text{ph}}^2$ ); trzeba za to otrzymaną „amputowaną” funkcję Greena pomnożyć przez iloczyn czynników  $Z^{1/2}$  związanych z wykorzystanymi w niej operatorami pola, odpowiadającymi liniom zewnętrznym, i przez odpowiednie dla każdej z tych linii „funkcje falowe”  $u_i(\mathbf{p}_i)$  lub  $u_i^*(\mathbf{p}_i)$  lub  $v_i^*(\mathbf{p}_i)$  lub  $v_i(\mathbf{p}_i)$  wyznaczone przez właściwości transformacyjne operatorów i stanów jednocząstkowych. Wynika to z porównania postaci w okolicy jej bieguna dwupunktowej funkcji Greena i omówionej postaci pełnej (spójnej) „nieamputowanej” funkcji Greena.<sup>6</sup>

### O sformułowaniu za pomocą całek po trajektoriach

W tak zwanych „nowoczesnych” wprowadzeniach do kwantowej teorii pola często formułuje się ją wykorzystując tzw. całki po trajektoriach (czyli całki funkcjonalne), uzasadniając to tym, że w ten sposób najszybciej można dojść do reguły Feynmana,<sup>7</sup> zwłaszcza do reguły teorii z nieabelowymi grupami cechowania (teorii

4. W jakim celu? Na przykład po to, żeby się przekonać, że równania te są rzeczywiście spełnione, jeśli operatory pola traktuje się jak dobre zmienne dynamiczne...

5. Wykorzystuje się go w pełni przy analizie kwantowych teorii pola sformułowanych na sieciach – podejście takie czyni możliwym praktyczne wyznaczenie (numerycznie) niektórych prostych funkcji Greena. Między innymi w ten sposób wyznacza się numerycznie (uwzględniając tylko efekty oddziaływań silnych, które są dominujące) elementy macierzowe pomiędzy stanem pojedynczego mezonu (układu związanego kwark–antykwar) i próżnią prądów słabych, (tzn. operatorów, które w pełnym modelu standardowym sprzęgają się bezpośrednio z polami cechowania, których „kwantami” są masywne bozony  $W^\pm$ ). Bierze się przy tym pod uwagę fakt, że z punktu widzenia chromodynamiki operatory te (zgodnie ze wspomnianymi już w części pierwszej ideami Feynmana i Gell-Manna, które w modelu standardowym znalazły swoją naturalną realizację) są prądami Noether symetrii wprowadzonych do fizyki cząstek przez Gell-Manna, co jest gwarancją skończoności (po przeprowadzeniu renormalizacji parametrów) tychże elementów.

6. Odnosić wypada, że przepis ten w przypadku elektrodynamiki kwantowej podał w zasadzie w swojej pracy I. Białynicki-Birula (*Phys. Rev. D* 2 2877 (1970)).

7. Jest to argument o wątpliwej wartości, a postępowanie takie ma coś ze stawiania wozu przed koniem: istotne jest przecież raczej co i po co się chce obliczać, a sam sposób obliczania (a reguły Feynmana są przecież tylko narzędziem związanym z jednym konkretnym sposobem przeprowadzania obliczeń) jest (powinien być!) sprawą drugorzędną).

pól Yanga–Millsa) oraz do spontanicznego naruszenia takich symetrii<sup>8</sup> i omawiać najważniejsze z punktu widzenia współczesnej fizyki wysokich energii zastosowania takich teorii, tj. przede wszystkim model standardowy oddziaływań fundamentalnych. Sformułowanie za pomocą całek funkcjonalnych ma, oczywiście, szereg zalet. Zwłaszcza, gdy zastosować je do zwykłej mechaniki kwantowej pojedynczej cząstki znajdującej się w polu siły o potencjale  $V(\mathbf{r})$  i przedstawić operator ewolucji (w jego reprezentacji położeniowej) w postaci całki funkcjonalnej z czynnika  $\exp((i/\hbar)I[\mathbf{r}])$ , w którym  $I[\mathbf{r}] = \int_{t_1}^{t_2} dt (\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}))$  jest działaniem znanym z klasycznej mechaniki lagrangeowskiej, po wszystkich możliwych klasycznych (niekoniecznie spełniających newtonowskie równania ruchu) trajektoriach  $\mathbf{r}(t)$ , po jakich cząstka mogłaby przemieścić się z jednego punktu do drugiego w czasie  $t_2 - t_1$ , daje ono przejrzystą realizację głównej idei mechaniki kwantowej (wyjątkowo silnie podkreślanej przez Feynmana w jego Wykładach z fizyki, dzięki czemu ich ostatni tom, napisany 60 lat temu, jest wciąż jednym z najnowocześniejszych wprowadzeń do niej), którą jest sumowanie i interferencja wszystkich amplitud prawdopodobieństwa odpowiadających poszczególnym możliwym sposobom, jakie układ może wykorzystać, by przejść z jednego stanu do drugiego.<sup>9</sup> Trudno jednak, zwłaszcza gdy wykorzystuje się całki po trajektoriach w kwantowej teorii pola, uznać takie sformułowanie teorii kwantowej za zupełnie samowystarczalne; uzasadnienie różnych reguł postępowania koniecznych przy korzystaniu z tego podejścia do obliczania amplitud rozpraszania wymaga w ostatecznym rozrachunku odwołania się (choćby heurystycznego) do tradycyjnego sformułowania w języku przestrzeni Hilberta i działających w niej operatorów. Postaram się pokrótce omówić jego zalety (podkreślając jednak i niedostatki) nie pretendując, co oczywiste, do wyczerpującego przedstawienia możliwości, jakie ono daje.

Najpierw jednak trzeba wyjaśnić, jako że w różnych źródłach przedstawia się różne podejścia, że tak jak istnieją dwa sposoby formułowania kwantowej teorii pola wykorzystujące formalizm operatorowy i przestrzenie Hilberta (omawiałem je odpowiednio w częściach pierwszej i drugiej tego artykułu), tak też istnieją dwa sposoby sformułowania jej w języku całek po trajektoriach.

8. Tak się o tym zwykle mówi; wiadomo jednak, iż symetrie cechowania nie mogą w istocie rzeczy być spontanicznie naruszone, nawet gdy ostatecznie „kwantami” pól cechowania są masywne cząstki, związane z tymi polami symetrie cechowania pozostają zrealizowane w sposób ukryty.

9. Takie sformułowanie mechaniki kwantowej pozwala też niemal bezpośrednio analizować jej tzw. granicę klasyczną,  $\hbar \rightarrow 0$  i w istocie stanowią właściwe wytłumaczenie pochodzenia zasady wariacyjnej i równań Lagrange’a drugiego rodzaju wyznaczających klasyczny ruch.

W sformułowaniu operatorowym, o kwantowaniu, czyli przejściu od teorii klasycznej do kwantowej, „metodą całek po trajektoriach” można mówić tylko wtedy, gdy „ontologią” są fluktuujące pola. Z uwagi na brak miejsca skupię się tu tylko na tym drugim podejściu i ograniczę w zasadzie tylko do pól bozonowych. Punktem wyjścia przy konstrukcji teorii kwantowej jest zatem klasyczna teoria pola (w przypadku pól przekształcających się przy obrotach układu odniesienia jak reprezentacje grupy nakrywającej, tj. pól o „spinię” połówkowym, należy przez to rozumieć teorię klasyczną pól przyjmujących wartości w algebrze Bierzina). Można wtedy, przynajmniej w przypadku prostych teorii takich jak teoria układu  $N$  pól skalarnych  $\phi_l(t, \mathbf{x}) \equiv \phi_l(x)$ ,  $l = 1, \dots, N$ , wzorując się bezpośrednio na omówionym na wstępie wyrażeniu otrzymanym w mechanice kwantowej pojedynczej cząstki (można też zupełnie analogicznie, jak w tamtym przypadku uzasadnić to bezpośrednio, wychodząc od sformułowania w języku operatorów i przestrzeni Hilberta), wyrazić całką funkcjonalną amplitudę prawdopodobieństwa ewolucji układu od chwili  $t_1$  do  $t_2$  od jednej danej konfiguracji pól do drugiej, tj. wyrazić przez nią odpowiadający takiemu przejściu element macierzowy operatora zadającego ewolucję czasową układu; amplituda ta jest dana całką po wszystkich możliwych konfiguracjach pola lub układu pól (spełniających jakieś określone warunki brzegowe, np. znikających przy  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , jeśli pola są zdefiniowane na całej przestrzeni) w chwilach pośrednich z czynnika eksponencjalnego, którego argumentem jest pomnożone przez  $i/\hbar$  klasyczne działanie  $I[\phi]$  będące po prostu całką po całej przestrzeni oraz po czasie od  $t_1$  do  $t_2$  z klasycznej gęstości lagrangianu pola lub układu pól. Otrzymanie z takiego wyrażenia elementów macierzy  $S$  lub elementów macierzowych pomiędzy stanami *in* i *out* wyróżnionych tu już operatorów wymaga jednak jeszcze pewnych kroków uzupełniających. Zwykle, znów odwołując się do analogii z mechaniką kwantową pojedynczej cząstki (lub uznając to po prostu za postulat definiujący) przyjmuje się, że analogiczna całka funkcjonalna, w której czynnik eksponencjalny pomnożony jest przez iloczyn wziętych w różnych punktach czasoprzestrzeni pól  $\phi(x)$  lub jakichś ich funkcji (np.  $\phi^2(x)$ , czy  $\phi^2(x)\partial_\mu\phi(x)$ ) jest proporcjonalna<sup>10</sup> do funkcji Greena operatorów (elementarnych, jak  $\hat{\phi}$ , bądź złożonych, jak  $\hat{\phi}^2$ , czy  $\hat{\phi}^2\partial_\mu\hat{\phi}$ ) odpowiadających da-

10. W istocie miara funkcjonalna, względem której wykonywana jest całka, jest i tak zdefiniowana z dokładnością do pewnego czynnika normalizacyjnego, który trudno jest kontrolować bez przeprowadzania dyskretyzacji całki i ścisłej procedury granicznej. Jednak wszystkie interesujące wielkości, jak zaraz stanie się jasne, dają się wyrazić przez ilorazy całek funkcjonalnych i czynnik ten nie jest, wobec tego, istotny.

nym czynnikiem przedeksponencjalnym, które to funkcje Greena, jak to omawiałem w poprzednim rozdziale tej części artykułu, poprzez przepis LSZ, pozwalają w zasadzie (ale to oczywiście znów wynika tylko z formalizmu operatorowego, chyba że podane tu wcześniej elementy przepisu LSZ przyjmie się za dodatkowe postulaty teorii), wyznaczyć interesujące wielkości mierzalne i amplitudy procesów rozpraszania. Można wtedy łatwo, zazwyczaj zapisując najpierw „gołe” (zależne od przyjętego ultrafioletowego obciążenia) parametry teorii w formie  $M_B^2 = M_R^2 + \delta M^2$  etc. i ewentualnie dokonując przeskalowania pól<sup>11</sup> o czynniki  $Z^{1/2} = (1 + \delta Z)^{1/2}$  w celu wprowadzenia od razu kontrczłonów potrzebnych do usuwania nieskończoności, wydzielić część  $I_0[\phi]$  działania zależną od pól kwadratowo i nieuwzględniającą kontrczłonów (działanie odpowiadające nieoddziaływającym polom przeskalowanym) i wprowadzając liniowe sprzężenia (przeskalowanych) pól do „źródeł” (czyli uzupełniając działanie  $I[\phi] = I_0[\phi] + I_{\text{int}}[\phi]$  o człony zależne liniowo od pól i od dowolnych funkcji  $J_i(x)$  zwanych „źródłami”) sformułować dysonowski rachunek zaburzeń wynosząc poza całkę funkcjonalną oddziaływanie  $\exp((i/\hbar)I_{\text{int}}[\phi])$  oraz czynniki przedeksponencjalne w formie funkcjonalnego różniczkowania po źródłach (które na końcu przyjmuje się za równe zero). Pozostałą całkę funkcjonalną daje się obliczyć, więc otrzymuje się tak prosty sposób generowania rozwinięcia perturbacyjnego wyrażenia proporcjonalnego do funkcji Greena (na ogół elementarnych operatorów pola, ale przepis ten działa także w przypadku operatorów złożonych) przez obliczanie odpowiednich pochodnych funkcjonalnych danego jawnie wyrażenia eksponencjalnego, w którym występują scałkowane ze źródłami funkcje pełniące w tak sformułowanym rozwinięciu dysonowskim rolę propagatorów. W tym podejściu propagatory te są rzeczywiście rozwiązaniami fundamentalnymi, czyli funkcjami Greena w matematycznym sensie, równań Eulera–Lagrange’a wynikających z warunku stacjonarności działania swobodnego.<sup>12</sup> Wygodnie jest też wprowadzić dwa funkcjonały źródeł: „uogólnioną sumę

11. I przechodząc do całkowania po przeskalowanych polach; ponieważ miara całki funkcjonalnej jest i tak określona z dokładnością do pewnego czynnika, stały jacobian takiej funkcjonalnej zamiany zmiennych jest nieistotny. Jak już jednak wyjaśniałem, skończoność funkcji Greena, a zatem i przeskalowywanie pól w działaniu (które w ogólności pozwala uczynić skończonymi i tak tylko funkcje Greena operatorów elementarnych) nie jest konieczna do otrzymania skończonych wielkości fizycznych wyrażonych w funkcji innych takich wielkości.

12. Jest to analogiczne do obliczania całki

$$C = \int dx x^n \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2 - \lambda x^4\right)$$

przez różniczkowanie:

statystyczną”  $Z[J]$  i funkcjonał  $W[J]$  zdefiniowane wzorami

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int [d\phi] \exp\left((i/\hbar)I[\phi] + i \int d^4x J_i(x)\phi_i(x)\right) \\ &\equiv e^{(i/\hbar)W[J]}, \end{aligned}$$

które mają swoje odpowiedniki statystyczne (zob. dalej). Funkcjonał  $Z[J]$  można obliczać według podanego wyżej przepisu wynosząc oddziaływanie przed całkę funkcjonalną w formie różniczkowania po źródłach (tylko nie przyjmując ich na koniec, jak przy obliczaniu całek proporcjonalnych do funkcji Greena, za równe zero). Wynikające z obliczenia pochodnych wyrażenia (zarówno te dające funkcje Greena, jak i funkcjonał  $Z[J]$ ) można łatwo zilustrować graficznie, co natychmiast prowadzi do diagramów Feynmana (w przestrzeni położenia) i odpowiadających im reguł Feynmana. Można też pokazać (co jak się okaże niżej, ma swój odpowiednik w fizyce statystycznej, prowadzi bowiem do ekstensywności potencjału termodynamicznego będącego analogiem  $W[J]$ ), że funkcjonał  $(i/\hbar)W[J]$  otrzymuje się pomijając wśród diagramów, które reprezentują  $Z[J]$ , diagramy niespójne. Pochodne funkcjonalne (obliczane w  $J_i = 0$ ) ilorazu  $Z[J]/Z[0]$  generują, jak zaraz się stanie jasne, funkcje Greena operatorów  $\hat{\phi}$  (lub operatorów złożonych z nich skonstruowanych), a analogiczne pochodne  $(i/\hbar)W[J]$  – ich spójne funkcje Greena<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} C &= \frac{d^n}{db^n} \exp(-\lambda d^4/db^4) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2 + bx} \Big|_{b=0} \\ &= \frac{d^n}{db^n} \exp(-\lambda d^4/db^4) e^{\frac{b^2}{2a}} \Big|_{b=0} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}. \end{aligned}$$

W przypadku całki funkcjonalnej, o której mowa w tekście, czynniki  $-\frac{1}{2}ax^2$  odpowiada  $(i/2\hbar) \int d^4x \phi_l \Delta_{lk}(x) \phi_k$ , gdzie  $\Delta_{lk}(x)$  jest operatorem różniczkowym, np.  $\delta_{lk}(-\partial_\mu \partial^\mu - M_R^2)$ , a czynniki  $bx$  odpowiada  $i \int d^4x \phi_l J_l$  ze źródłami  $J_l(x)$  (pochodne  $d/db$  przechodzą w pochodne funkcjonalne  $\delta/i\delta J_l(x)$ ), po prawej zaś stronie czynniki  $e^{\frac{b^2}{2a}}$  przechodzi w  $\exp(-\frac{i}{2} \iint d^4x d^4y J_l(x) \Delta_{lk}^{-1}(x-y) J(y))$ , a  $\sqrt{2\pi/a}$  w czynnik odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka z (funkcjonalnego) wyznacznika operatora  $\Delta_{lk}(x)$ . Dysonowskiemu rozwinięciu perturbacyjnemu, w którym propagatorami są funkcje  $i\Delta_{lk}^{-1}(x-y)$ , odpowiada przy obliczaniu całki  $C$  rozwinięcie w szereg Taylora funkcji eksponens, w której występuje czwarta pochodna po  $b$ .

Analogia z całką  $C$  pokazuje także, iż szeregi, którymi wyrażone zostają w ten sposób funkcje Greena, nie mogą być zbieżne – są tylko szeregami asymptotycznymi, całka  $C$  jest bowiem rozbieżna, jeśli  $\lambda < 0$ , co oznacza, że promień zbieżności otrzymanego szeregu potęgowego jest równy zero.

13. Obliczone w  $J_i = 0$  pierwsze pochodne  $Z[J]/Z[0]$  i  $W[J]$  dają wartości oczekiwane  $v_i$  operatorów  $\hat{\phi}_i$  w stanie podstawowym pełnego hamiltonianu teorii. Jeśli któreś z nich mają te wartości niezzerowe (jak ma to na ogół miejsce, gdy zachodzi spontaniczne naruszenie jakichś symetrii) i przed obliczaniem całki funkcjonalnej dokona się redefinicji  $\phi_i(x) = v_i + \hat{\phi}'_i(x)$  odpowiadających im pól, to, jak łatwo sprawdzić, spójne funkcje Greena o  $n \geq 2$  operatorów  $\hat{\phi}'_i$  są takie same jak operatorów  $\hat{\phi}_i$ .

$iG_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  (czyli te potrzebne do znajdowania elementów macierzy  $S$ ). Jeszcze jedną kategorię „funkcji Greena” stanowią tzw. jednocząstkowo nieredukowalne (IPI) funkcje  $i\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  ( $n \geq 2$ ) odpowiadające diagramom, których nie można uczynić niespójnymi przez przecięcie tylko jednej z ich (wewnętrznych) linii. Wykonując funkcjonalne różniczkowania jest dość łatwo pokazać (do czego już się tu odwoływałem przy okazji omawiania przepisu LSZ), że spójne funkcje Greena  $iG_c^{(n)}$  operatorów elementarnych o  $n \geq 3$  można „złożyć” z diagramów, w których nie występują zamknięte pętle, za to wierzchołkom „oddziaływania” odpowiadają właśnie funkcje<sup>14</sup>  $i\Gamma^{(n)}$  o  $n \geq 3$  ( $i\Gamma^{(2)}$  jest odwrotnością  $iG_c^{(2)}$ ), a liniom zewnętrznym (odpowiadającym w definicji funkcji Greena operatorom  $\hat{\phi}$ ) i wewnętrznym – pełne spójne dwupunktowe funkcje Greena. Funkcje jednocząstkowo nieredukowalne pełnią więc w strukturze teorii bardzo ważną rolę (także techniczne aspekty procedury renormalizacji najwygodniej jest analizować z ich pomocą) i z tego powodu wygodnie jest wprowadzić generujący je funkcjonal  $\Gamma_{1PI}[\Phi]$ , którego  $n$ -te pochodne funkcjonalne po polach  $\Phi_i(x)$ , obliczane w punktach  $\Phi_i = v_i$ , dają właśnie funkcje  $\Gamma^{(n)}$ . W przypadkach, gdy elementarne operatory pola mają zerowe wartości oczekiwane w stanie podstawowym (czego koniecznym, ale nie dostatecznym warunkiem jest wypukłość funkcjonału klasycznego działania  $I[\Phi]$ ), funkcjonal  $\Gamma_{1PI}[\Phi]$  jest tożsamy ze zwanym działaniem efektywnym funkcjonałem  $\Gamma[\Phi]$ , który jest transformatą Legendre’a–Fenchela (uogólniającą zwykłą transformatę Legendre’a na funkcje i funkcjonały niewypukłe i niekoniecznie analityczne) funkcjonału  $W[J]$  ze względu na źródła  $J_i(x)$ . Jednak nie zawsze tak jest:  $W[J]$  jest zawsze funkcjonałem wypukłym (można to wykazać zastępując w całce funkcjonalnej ze źródłami  $J_i$  działanie  $I[\phi]$  funkcjonałem  $\Gamma_{1PI}[\phi]$  i obliczając ją metodą stacjonarnej fazy; jest to równoważne obliczaniu  $W[J]$  na podstawie diagramów, ale pokazuje, że sam funkcjonal  $W[J]$  jest transformatą Legendre’a–Fenchela funkcjonału  $\Gamma_{1PI}[\Phi]$  i musi być, wobec tego, wypukły), choć niekoniecznie wszędzie analitycznym i jego transformata  $\Gamma[\Phi]$  ma tę samą właściwość (i też nie musi być analityczna); w przypadku zaś wystąpienia spontanicznego naruszenia symetrii funkcjonal  $\Gamma_{1PI}[\Phi]$  utworzony z jednocząstkowo nieredukowalnych funkcji  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  nie jest globalnie wy-

14. Z tego powodu są one zwane uogólnionymi funkcjami wierzchołkowymi. (To w nie i w pełne spójne funkcje  $iG^{(2)}$  zostają „upchnięte” wszystkie pętle diagramów.) Technika funkcjonalnego różniczkowania może także posłużyć do wykazania, że zarówno funkcje spójne, jak i te jednocząstkowo nieredukowalne można wydzielić rekurencyjnie ze zwykłych funkcji Greena, bez odwoływania się do diagramów.

pukły.<sup>15</sup> To samo odnosi się do tzw. efektywnych potencjałów  $V_{\text{eff}}(\Phi)$  i  $V_{\text{eff}}^{1PI}(\Phi)$  definiowanych przez  $-\Gamma[\Phi]$  i  $-\Gamma_{1PI}[\Phi]$  obliczone dla pól  $\Phi(x)$  niezależnych od  $x$ , które służą do znajdowania wartości oczekiwanych operatorów  $\hat{\phi}_i$  w stanie podstawowym Hamiltonianu teorii; odgrywają więc ważną rolę przy analizie spontanicznego naruszenia różnych symetrii (zwłaszcza gdy jest ono indukowane przez efekty kwantowe). Choć funkcjonal  $Z[J]$ , a zatem i funkcjonały  $W[J]$  i  $\Gamma[\Phi]$ , można także zdefiniować w języku operatorowym, bez odwoływania się do całki po trajektoriach,<sup>16</sup> ich reprezentacja funkcjonalna umożliwia wyznaczanie  $W[J]$  i  $\Gamma[\Phi]$  inaczej niż za pomocą rozwinięcia dysonowskiego, np. przez rozwinięcie całki funkcjonalnej wokół jakiegoś rozwiązania klasycznych równań pola (tj. wokół jakiegoś punktu stacjonarnego klasycznego działania).

W przypadku kwantowania teorii klasycznych pól przyjmujących wartości w algebrze Bieriezina, konieczna jest dość sztuczna konstrukcja (podaje ją w swoim podręczniku Weinberg) wektorowej przestrzeni stanów (Hilberta) rozpiętej nad ciałem nieprzemiennej liczb i zdefiniowanie formalnych reguł „całkowania” po nich. Umożliwia to formalne zapisanie oczekiwanych wartości iloczynów chronologicznych operatorów takich pól w postaci analogicznej do przypadku bozonowego i wyrażenie przez zdefiniowane „całki” po trajektoriach przyjmujących wartości w algebrze Bieriezina funkcjonałów generujących  $Z[\bar{\eta}, \eta]$  i  $W[\bar{\eta}, \eta]$  zależnych od nieprzemiennej źródeł  $\bar{\eta}$  i  $\eta$ . Jest jednak jasne, że w tym przypadku trudno mówić o uwzględnianiu przez całkę po trajektoriach „kwantowych fluktuacji pól” i wydaje się, że w takim przypadku bardziej naturalne jest po prostu uznanie za „ontologię” fermionów jako cząstek<sup>17</sup> i wykorzystanie wspomnianego wyżej sposobu zapisywania wielkości zdefiniowanych operatorowo w języku drugiej kwantyzacji za pomocą całek po zmiennych grassmannowskich.

Elementem, który w nakreślonym wyżej schemacie formułowania teorii kwantowej za pomocą całek funkcjonalnych na podstawie jej klasycznego pierwowzoru wymaga jeszcze uzasadnienia, jest wybranie jako propagatorów feynmanowskich (a nie np. retardowanych)

15.  $\Gamma_{1PI}[\Phi]$  jest w istocie przedłużeniem analitycznym  $\Gamma[\Phi]$  do obszaru wartości pól  $\Phi_i$ , w którym ten drugi funkcjonal nie jest analityczny.

16. Z powodu wspomnianego czynnika w definicji miary te dwie definicje różnią się o pewien czynnik, który nie jest istotny z praktycznego punktu widzenia.

17. Wydaje mi się, że jest to też jedyny sposób zrozumienia tego, jak w teoriach z nieabelowymi polami cechowania możliwe są odgrywające ważną rolę w proponowanych mechanizmach bariogenezy procesy, w których nie są zachowywane liczby fermionów (np. procesy zmieniające liczbę barionową).

funkcji Greena swobodnych równań Eulera–Lagrange’a. Zwykle podaje się tu argumenty związane albo z koniecznością wprowadzenia do całki funkcjonalnej odpowiedniego czynnika uzbieżniającego (czynnik  $e^{(i/\hbar)I[\phi]}$  ma charakter oscylacyjny, niegwarantujący jawnie zbieżności), albo (bardziej właściwie) na definiowaniu tej całki jako przedłużenia analitycznego analogicznej całki zdefiniowanej w czasoprzestrzeni o metryce euklidesowej.<sup>18</sup> W istocie rzeczy ten drugi argument ma znacznie głębszy sens, gdyż ujawnia jeden z wielu fascynujących związków kwantowej teorii pola z fizyką statystyczną. Mając układ fizyczny jakim są (oddziałujące) pola lub cząstki, można badać jego właściwości termodynamiczne i statystyczne np. wyobrażając sobie, iż pozostaje on w równowadze z termostatem o temperaturze  $T$  i obliczać w ramach zespołu kanonicznego<sup>19</sup> różne równowagowe średnie,

18. Weinberg (*loc. cit.*) podaje jeszcze inną konstrukcję, polegającą na „wcałkowaniu” w oba końce amplitudy, którą reprezentuje całka funkcjonalna, „funkcji falowych” stanu podstawowego, ale Hamiltonianu swobodnego  $H_0$ ; jest to w istocie funkcjonalna wersja wspomnianego już twierdzenia Gell-Manna–Lowa odwołująca się implícite do adiabaticznego włączania i wyłączania oddziaływania. Jednak bezpieczniejsze i bardziej kształtujące jest nie korzystanie z tego, także dlatego, że konstrukcja Gell-Manna–Lowa jest wątpliwa w sytuacjach, gdy w kwantowej wersji teorii naruszone są spontanicznie jakieś symetrie; o ile jeszcze przy naruszeniu „parametrycznym” polegającym na przyjęciu odpowiednich wartości parametrów lagrangianu (ujemny kwadrat parametru masowego) zwykle przez zamianę zmiennych połowych daje się wydzielić swobodny hamiltonian już uwzględniający naruszenie symetrii i którego widmo, jak można się spodziewać, w sposób „adiabaticzny” przechodzi przy włączeniu oddziaływań w widmo pełnego hamiltonianu teorii, o tyle takiej ciągłości nie można oczekiwać, gdy symetria jest naruszona dynamicznie, tj. przez oddziaływanie (tak jak np. symetria chiralna chromodynamiki, w której kwarki byłyby zupełnie bezmasowe; w rzeczywistości symetria chiralna jest też naruszona przez pochodzące z naruszenia elektrosłabej symetrii niezerowe masy kwarków i one to umożliwiają formalne odwołanie się do włączania adiabaticznego w przypadku prawdziwej chromodynamiki).

19. W takich zagadnieniach szczególnie wyraźnie przejawia się różnica między relatywistyczną teorią pola lub cząstek a nierelatywistyczną mechaniką kwantową wielu ciał (nierelatywistyczną kwantową teorią pola), ponieważ w tym drugim przypadku liczba cząstek (oddzielnie każdego rodzaju) jest zachowana i aby to uwzględnić w praktycznych rachunkach trzeba posługiwać się raczej wielkim zespołem kanonicznym i wprowadzić potencjały chemiczne poszczególnych rodzajów cząstek. W relatywistycznych teoriach pola liczba cząstek nie jest zachowywana, ale jeśli Hamiltonian teorii zachowuje ładunki  $Q^a$  związane twierdzeniem Noether z jakimiś symetriami, takie jak np. ładunek elektryczny, to przy praktycznym obliczaniu wielkości statystycznych trzeba w zasadzie wprowadzać związane z nimi (ściślej: z ładunkami tworzącymi podalgbrę Cartana) potencjały chemiczne i przejść do odpowiedniego zespołu statystycznego. Jest to zawsze realizacją tej samej kluczowej idei fizyki statystycznej: aby uwzględnić stałość jakiejś wielkości w danym układzie wyobrażamy sobie, że układ może ją wymieniać z wielkim (w granicy nieskończonym) jej zbiornikiem o odpowiednim potencjale chemicznym

np. statystyczne funkcje korelacji operatorów pola

$$-\mathcal{G}(\tau_1, \mathbf{x}_1, \dots, \tau_n, \mathbf{x}_n) = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{stat}} T_\tau[\hat{\phi}_{l_1}(\tau_1, \mathbf{x}_1), \dots, \hat{\phi}_{l_n}(\tau_n, \mathbf{x}_n)]),$$

w których  $\hat{\rho}_{\text{stat}} = Z_{\text{stat}}^{-1} \exp(-\beta\hat{H})$  z  $\beta = 1/k_B T$  i  $Z_{\text{stat}} = \text{Tr}(\exp(-\beta\hat{H}))$  jest operatorem statystycznym zespołu kanonicznego,  $\hat{\phi}_{l_i}(\tau_i, \mathbf{x}_i) = e^{\tau_i\hat{H}} \hat{\phi}_{l_i}(\mathbf{x}_i) e^{-\tau_i\hat{H}}$ , ślad ( $\text{Tr}$ ) jest obliczany po całej przestrzeni Hilberta, a  $T_\tau$  oznacza uporządkowanie chronologiczne w „czasie euklidesowym” (zwanym też „czasem urojonym”)  $\tau$ . Takie funkcje korelacji zawierają w sobie interesujące informacje statystyczne o układzie, ale tu ważne jest że, jak daje się pokazać wychodząc z formalizmu operatorowego, zarówno ich licznik  $\text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}} T_\tau[\hat{\phi}_{l_1}(\tau_1, \mathbf{x}_1), \dots, \hat{\phi}_{l_n}(\tau_n, \mathbf{x}_n)])$ , jak i mianownik  $\text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}})$  można reprezentować całkami funkcjonalnymi analogicznymi do tej, która zgodnie z postulatem daje funkcje Greena, tylko z (rzeczywistym i mającym lepsze właściwości, jeśli chodzi o zbieżność całki) czynnikiem eksponencjalnym  $\exp(-I_E[\phi])$ , w którym  $I_E[\phi]$  jest tzw. klasycznym działaniem euklidesowym będącym całką po obszarze, na którym określone są (spełniające określone warunki brzegowe) pola i po „euklidesowym czasie” w granicach od  $-\beta/2$  do  $\beta/2$  z odpowiedniej euklidesowej gęstości lagrangianu; całki funkcjonalne obejmują tu wszystkie chwilowe (w „euklidesowym czasie”  $\tau$ ) konfiguracje pól z warunkiem ich identyczności w  $\tau = -\beta/2$  i  $\tau = \beta/2$  (tzw. warunek periodyczności; w przypadku całek grassmanowskich konieczne jest narzucenie na konfiguracje pól warunku antyperiodyczności, tj. przeciwnego ich znaku w  $\tau = -\beta/2$  i w  $\tau = \beta/2$ ). Jest jasne, że w granicy  $\beta \rightarrow \infty$  (czyli zerowej temperatury), gdy całka po czasie  $\tau$  w klasycznym działaniu euklidesowym rozciąga się na całą oś, wkład do śladu wnosi tylko stan podstawowy  $|\Omega\rangle$  pełnego hamiltonianu układu pól i

$$-\mathcal{G}(\tau_1, \mathbf{x}_1, \dots, \tau_n, \mathbf{x}_n) \rightarrow \frac{\langle \Omega | e^{-\beta E_\Omega} T_\tau[\hat{\phi}_{l_1}(\tau_1, \mathbf{x}_1), \dots, \hat{\phi}_{l_n}(\tau_n, \mathbf{x}_n)] | \Omega \rangle}{\langle \Omega | e^{-\beta E_\Omega} | \Omega \rangle}.$$

Czynniki  $e^{-\beta E_\Omega}$  ulegają skróceniu, a  $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1$  i graniczna postać funkcji korelacji  $-\mathcal{G}(\tau_1, \mathbf{x}_1, \dots, \tau_n, \mathbf{x}_n)$  przechodzi w funkcję Greena  $iG_{l_1, \dots, l_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \equiv (t_i, \mathbf{x}_i)$  przy specjalnym, zwanym obrotem Wicka, jednoczesnym przedłużeniu analitycznym (zachowującym ich uporządkowanie wzdłuż linii) jej argumentów  $\tau_i \rightarrow it_i/\hbar$ . Wynika stąd, że funkcja  $iG_{l_1, \dots, l_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  jest dana ilorazem obróconych po wickowsku dwu całek

stowarzyszonym z tą wielkością; z tego punktu widzenia czynnik  $\beta = 1/k_B T$  jest, przy posługiwaniu się zespołem kanonicznym, potencjałem chemicznym energii.



funkcjonalnych obliczanych w ramach tzw. „euklidesowej” teorii pola, w której (z uwagi na symetrię  $O(4)$  działania euklidesowego  $I_E[\phi]$  pojawiającą się w granicy  $\beta = \infty$  warunki brzegowe nakładane na pola mogą być we wszystkich kierunkach takie same – „euklidesowy czas” przestaje być wyróżniony). Po zastosowaniu do obu tych całek opisanego wyżej chwytu (polegającego na wyniesieniu przed całkę czynników przedeksponencjalnych i czynnika eksponencjalnego z częścią działania odpowiadającą oddziaływaniu i uwzględniającą wprowadzone, tak samo jak poprzednio, kontrczłon i zastąpieniu w nich pól funkcjonalnymi pochodnymi) otrzymuje się ich rozwinięcie dysonowskie, w którym rolę propagatorów pełnią jednoznaczne funkcje Greena odpowiednich swobodnych euklidesowych równań Eulera-Lagrange’a; ich wickowskie obroty (wykonywane przy przejściu do funkcji  $iG_{l_1, \dots, l_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  w rozwinięciu perturbacyjnym euklidesowych funkcji Greena, a właściwie euklidesowych funkcji korelacji) dają właśnie propagatory feynmanowskie.<sup>20</sup>

20. Z wickowskiego analitycznego przedłużenia asymptotycznej, gdy  $\beta \rightarrow \infty$  ( $i T \rightarrow \infty$ , przy przedłużaniu analitycznym  $\beta = iT/\hbar$ ), postaci wyrażenia na  $\text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}} T_\tau[\hat{\phi}_{l_1}(\tau_1, \mathbf{x}_1), \dots, \hat{\phi}_{l_n}(\tau_n, \mathbf{x}_n)])$  wynika także, iż

$$\int [d\phi] \phi_{l_1}(x_1) \dots \phi_{l_n}(x_n) e^{(i/\hbar)I[\phi; T]} \propto e^{-(i/\hbar)E_n T} \langle \Omega | T[\hat{\phi}_{l_1}(x_1) \dots \hat{\phi}_{l_n}(x_n)] | \Omega \rangle,$$

(klasyczne działanie  $I[\phi; T]$  jest tu całką po odpowiednim obszarze przestrzeni i po czasie od  $T/2$  do  $-T/2$ ) z czynnikiem proporcjonalności zależnym od długości czasu  $T$  i konfiguracji przyjmowanych przez pola w  $T/2$  i  $-T/2$ . Uzasadnia to stwierdzenie, że funkcje Greena generuje iloraz funkcjonałów  $Z[J]/Z[0]$ , wzięcie zaś ilorazu wypisanej tu całki (bez żadnych czynników przedeksponencjalnych) i analogicznej całki tylko z  $I[\phi; T]$  zastąpionym przez działanie swobodne  $I_0[\phi; T]$  prowadzi (wspomniane czynniki proporcjonalności skrócą się w ilorazie) do wyrażenia będącego analitycznym przedłużeniem, przy  $\beta \rightarrow iT/\hbar$ , ilorazu  $\text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}})/\text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_0})$ ; daje to uzasadnienie znanego wzoru wyrażającego  $-(i/\hbar)T(E_\Omega - E_{\Omega_0})$  przez sumę spójnych próżniowych diagramów Feynmana. Operatorowo wzór ten można wyrazić w formie

$$e^{-(i/\hbar)T(E_\Omega - E_{\Omega_0})} = \langle \Omega_0 | T \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} dt V_{\text{int}}^I(t)\right) | \Omega_0 \rangle.$$

W relatywistycznej teorii  $E_{\Omega_0}$  jest kiepsko określoną wielkością (zależną od tego, jak zdefiniowany zostanie włączany do  $I_0[\phi; T]$  parametr  $M_R^2$ , występujący w rozbiciu  $M_B^2$  na  $M_R^2 + \delta M^2$  i do tego nieskończoną nawet po wydzieleniu z niej nieskończonego czynnika objętości przestrzeni; dlatego, jak już wspominałem, implícite zakłada się występowanie w hamiltonianie teorii stałego (kontr)członu eliminującego ten przyczynek do energii; tu właśnie leży istota problemu stałej kosmologicznej indukowanej przez kwantowe fluktuacje pól) zwykle przyjmowaną za równą zeru; w teoriach nierelatywistycznych wzór ten daje wygodny sposób obliczania poprawki wnoszonej przez oddziaływania do dobrze określonej gęstości energii ( $E_{\Omega_0}/V$ ) stanu podstawowego swobodnego układu.

Całki funkcjonalne z pól określonych na przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru  $D$ , definiujące funkcje korelacji i „uogólnione” sumy statystyczne tzw. euklidesowych teorii pola, ustanawiają jeszcze inny związek między kwantową teorią pola i fizyką statystyczną. Są one naturalnym, uwzględniającym fluktuacje statystyczne (nieuwzględniane w jej oryginalnej wersji), rozwinięciem klasycznej teorii ciągłych przemian fazowych i zjawisk krytycznych zwanej teorią Landaua. Umożliwia to praktyczną realizację, na gruncie tego rozwinięcia teorii Landaua, idei Kadanoffa i Wilsona znanych pod ogólną nazwą metod grupy renormalizacji. Związek ten łatwo jest zilustrować przykładem modelu Isinga – układu jednowymiarowych (tj. przybierających tylko wartości  $+1$  i  $-1$ ) momentów magnetycznych  $\sigma_i$ , zwanych zwykle spinami, rozmieszczonych w węzłach  $\mathbf{i}$   $D$ -wymiarowej sieci<sup>21</sup> ( $\mathbf{i} = a\mathbf{n}$ , gdzie  $\mathbf{n}$  jest  $D$ -wymiarowym wektorem o całkowitych składowych, a  $a$  stałą sieci; rozpatrywać można też inne geometrie takich sieci); energia takiego układu jest sumą po parach tworzonych przez sąsiadujące ze sobą spiny<sup>22</sup> energii  $-J\sigma_{i'}\sigma_i$ , jeśli  $|\mathbf{i}' - \mathbf{i}| = a$ , ich wzajemnego oddziaływania ( $J$  jest tu energią oddziaływania pary przeciwnie zorientowanych spinów) i energii  $-\mathcal{H}\sigma_i$  oddziaływania każdego ze spinów z przyłożonym (jednowymiarowym) polem magnetycznym  $\mathcal{H}$ . W takim układzie pozostającym w równowadze z termostatem o temperaturze  $T$ , gdy  $D \geq 2$ , zachodzi przemiana fazowa – poniżej pewnej temperatury krytycznej  $T_{\text{cr}}$  występuje spontaniczne namagnesowanie, tj.  $M \equiv \sum_i \bar{\sigma}_i \neq 0$  (kreska oznacza uśrednienie po zespole statystycznym), nawet gdy  $\mathcal{H} = 0$ . W punkcie  $T = T_{\text{cr}}$ ,  $\mathcal{H} = 0$  rozbieżne są różne wielkości charakteryzujące układ, takie jak jego pojemność cieplna  $C_{\mathcal{H}}$ , podatność magnetyczna  $\chi_T$ , długość korelacji  $\xi$  itp. – jest to punkt krytyczny tej przemiany fazowej. Rozbieżności te mają ogólnie postać potęgową, np.  $\chi_T \sim A|T - T_{\text{cr}}|^{-\gamma}$ , gdzie  $\gamma$  jest przykładem tzw. wykładnika krytycznego; wyznaczenie takich wykładników jest jednym z zadań teorii. Można by je w zasadzie wyznaczyć obliczając sumę statystyczną  $Z_{\text{stat}}(T, \mathcal{H})$  i (dwupunktową) funkcję korelacji  $G^{(2)}(\mathbf{l}', \mathbf{l})$  dane sumami ( $\beta \equiv 1/k_B T$ )

$$Z_{\text{stat}}(T, \mathcal{H}) = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left(\beta \sum_{i', i} J \sigma_{i'} \sigma_i + \beta \sum_i \mathcal{H} \sigma_i\right),$$

$$G^{(2)}(\mathbf{l}', \mathbf{l}) = \frac{1}{Z_{\text{stat}}} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_{i'} \sigma_l \exp\left(\beta \sum_{i', i} J \sigma_{i'} \sigma_i + \beta \sum_i \mathcal{H} \sigma_i\right),$$

gdzie  $\{\sigma\}$  oznacza wszystkie możliwe konfiguracje spinów, ale bezpośrednie obliczenie tych wielkości (nawet

21. Jest to model teoretyczny i wymiar sieci  $D$  nie musi mieć związku z wymiarem abstrakcyjnej przestrzeni spinowej.

22. Można też dopuścić oddziaływania par tworzonych przez bardziej odległe od siebie spiny; kluczowe jest jednak, by oddziaływania spinów pozostawały w jakimś sensie krótkozasięgowo.

numeryczne, jeśli liczba spinów jest rzędu dziesiątków) jest niewykonalne (potrzebne są zaawansowane metody numeryczne typu Monte Carlo i bardzo wymyślne algorytmy)). W pobliżu punktu krytycznego spiny są jednak silnie skorelowane (charakteryzująca to długość korelacji  $\xi$  jest duża,  $\xi \gg a$ ) i można zamiast pojedynczych spinów na sieci rozpatrywać określone na  $D$ -wymiarowej przestrzeni ciągle pole  $\varphi(\mathbf{x})$  lokalnego namagnesowania (pole, tzw. parametru porządku) reprezentujące namagnesowanie uśrednione po jakiejś elementarnej objętości o liniowych rozmiarach  $1/\Lambda$ , sporo większych od  $a$ , ale dużo mniejszych niż całkowite liniowe rozmiary  $N^{1/3}a$  sieci ( $N$  jest tu liczbą spinów). Sumę statystyczną i funkcję korelacji można wtedy w sposób naturalny przybliżyć całkami funkcjonalnymi

$$Z_{\text{stat}}(T, \mathcal{H}) \approx \int [d\varphi] e^{-I_E[\varphi, h]},$$

$$G^{(2)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \approx \frac{1}{Z_{\text{stat}}} \int [d\varphi] \varphi(\mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}) e^{-I_E[\varphi, h]},$$

z „euklidesowym” działaniem ogólnej postaci

$$I_E[\varphi, J] = \int d^D \mathbf{x} \left( \frac{a_B}{2} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) + \frac{b_B}{2} \varphi^2(\mathbf{x}) + \frac{\lambda_B}{4} \varphi^4(\mathbf{x}) + \dots + \varphi(\mathbf{x}) h_B(\mathbf{x}) \right),$$

którego „gołe” parametry  $a_B > 0$ ,  $b_B, \lambda_B > 0$ ,  $h_B$  są funkcjami wyjściowych parametrów  $J$ , temperatury i pola magnetycznego  $\mathcal{H}$  (parametr  $h_B$  jest do  $\mathcal{H}$  proporcjonalny) oraz, implicite, „ultrafioletowego obcięcia”  $\Lambda$ , które w tym przypadku naturalnie wynika z konstrukcji. Całka funkcjonalna obejmuje tu w zasadzie nie wszystkie możliwe konfiguracje pola  $\varphi(\mathbf{x})$ , lecz, aby uwzględnić pochodzenie pola  $\varphi(\mathbf{x})$  z uśrednienia, tylko takie, których fourierowskie mody o  $|\mathbf{k}| > \Lambda$  zerują się. Zgodnie z ideą teorii Landaua przyjmuje się, że parametr  $b_B$  (który, tak jak i pozostałe, w zasadzie powinien wynikać z postaci wyjściowego spinowego hamiltonianu i procedury definiującej pole  $\varphi(\mathbf{x})$  jako nową zmienną losową) jest liniową funkcją temperatury,  $b_B \propto T - T_{\text{cr}}^B$  i zmienia znak przy pewnej jej wartości  $T_{\text{cr}}^B$ , którą można interpretować jako „gołą” temperaturę krytyczną. (Założenie, iż  $b_B$  musi zmieniać znak, wynika z przesłanek fizycznych, tj. występowania zjawiska spontanicznego namagnesowania, a zapewnianie tego przez proporcjonalność do  $T - T_{\text{cr}}^B$  – z założenia o analityczności działania  $I_E$  jako funkcji jego parametrów i prostoty.) Takie, zgodne z przedstawioną na początku części 1 tego artykułu ideą zajmowania się tylko aspektami badanych układów związanymi z określoną skalą energii lub odległości, zastosowanie euklidesowej kwantowej teorii pola jako teorii efektywnej ujmującej długozasięgowe (czyli

tu makroskopowe) właściwości badanego układu pozwala po pierwsze natychmiast odtworzyć fenomenologiczną teorię Landaua nadając jej zarazem głębsze<sup>23</sup> uzasadnienie, a po drugie, pójść dalej i otrzymać pozostające w dobrej zgodności z pomiarami wykonywanymi na rzeczywistych układach (i obliczeniami metodami Monte Carlo) wykładniki krytyczne. Teoria Landaua odpowiada wyznaczeniu zawierającego większość potrzebnej informacji potencjału termodynamicznego  $G(T, \mathcal{H}) = -(1/\beta) \ln Z_{\text{stat}}$  z pomocą najprostszego przybliżenia, w którym całkę po konfiguracjach pola  $\varphi$  wykonuje się metodą punktu stacjonarnego, pomijając zarazem całkowicie możliwą jego (i źródła  $h_B$ ) zmienność z położeniem  $\mathbf{x}$  (czyli z punktu widzenia fizyki statystycznej właśnie możliwe lokalne fluktuacje tego pola); staje się ona wtedy zwykłą całką po zmiennej  $\varphi$ , a metoda punktu stacjonarnego sprowadza się do przybliżenia  $G(T, \mathcal{H}) = V(\text{const.} + (b_B/2)\varphi_0^2(h_B) + (\lambda_B/4)\varphi_0^4(h_B) - h_B\varphi_0(h_B))/\beta$ , gdzie  $\varphi_0(h_B)$  jest takim polem, które minimalizuje wykładnik eksponensu. Choć wykładniki krytyczne np.  $\gamma$  podatności  $\chi_T$ , czy pojemności cieplnej, otrzymywane w tym przybliżeniu (tj. w ramach teorii Landaua) nie są zgodne z rzeczywistymi, samo wyprowadzenie teorii Landaua w tym podejściu jest niezwykle pouczające dla studiujących kwantową teorię pola, rzuca bowiem światło na wspomnianą różnicę pomiędzy funkcjonałem  $\Gamma_{\text{PI}}[\Phi]$ , którego rolę gra tu (w przyjętym przybliżeniu)  $I_E[\varphi]$ , i funkcjonałem  $\Gamma[\Phi]$ . Gdy  $T > T_{\text{cr}}$  (w przybliżeniu prowadzącym do teorii Landaua  $T_{\text{cr}}^B = T_{\text{cr}}$ ), a  $h_B = \mathcal{H}$  i współczynnik  $b_B$  jest dodatni, funkcja  $I_E(\varphi)$  jest wypukła, ma jedno minimum w  $h_B = 0$ ,  $\varphi = 0$  i  $G(T, \mathcal{H})$  jest po prostu (dobrze określoną) jej transformatą Legendre’a. Gdy  $T < T_{\text{cr}}$  funkcja  $I_E(\varphi)$  przestaje być wypukła – ma dla  $h_B = 0$  dwa symetryczne minima odpowiadające dwóm możliwym kierunkom spontanicznego namagnesowania. Przy niezerowym źródle  $h_B$  (polu magnetycznym  $\mathcal{H}$ ) jedno z nich jest jednak głębsze i to ono wyznacza wartość  $\varphi_0(h_B)$ , która występuje w podanym przybliżonym wzorze na potencjał  $G(T, M)$ , który jest w tej sytuacji właśnie transformatą Legendre’a–Fenchela; w granicy termodynamicznej, w której układ robi się nieskończenie duży (a tej granicy implicite odpowiadają wszystkie rachunki w kwantowej teorii pola), ewentualny wkład drugiego minimum staje się pomijalnie mały, a potencjał  $G(T, \mathcal{H})$ ,

23. Czysto termodynamiczne uzasadnienie teorii Landaua wymaga odwołania się do callenowskiej koncepcji wirtualnych stanów równowagi układu; odwołania do tej koncepcji (pozwalającej lepiej to podejście zrozumieć) próżno jednak szukać w Fizyce statystycznej Landaua i Lifszyc; pojawiła się ona później niż pierwsza wersja tego podręcznika, a Lifszyc w późniejszych wydaniach też jej nie uwzględnił.

jak łatwo to sobie wyobrazić staje się nieanalityczny – ma „dziubek” do góry w punkcie  $h_B = 0$ . Z kolei potencjał Helmholtza  $F(T, \mathcal{H})$ , który jest tu analogiem funkcjonału  $\Gamma[\Phi]$  i który jest znów transformatą Legendre’a potencjału  $G(T, \mathcal{H})$  (Legendre’a–Fenchela w granicy termodynamicznej, gdy ten staje się nieróżniczkowalny w  $h_B = 0$ ) jest funkcją wypukłą w dół, ale mającą nieanalityczne płaskie „dno”. Te jakościowe cechy funkcjonałów  $G(T, H)$  i  $F(T, M)$  pozostają słuszne, gdy definiują całkę funkcjonalną, oblicza się w miły przybliżony sposób.

Otrzymanie poprawnych wykładników krytycznych wymaga uwzględnienia lokalnych fluktuacji pola  $\varphi(\mathbf{x})$ . Są tu możliwe dwie metody. Bardziej standardowa polega na obliczaniu sumy statystycznej  $Z_{\text{stat}}$  za pomocą diagramów Feynmana według dyskutowanego tu już przepisu i badaniu granicy  $b_B \rightarrow b_B^{\text{cr}}$ , w której przy  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  znika transformata Fouriera  $\tilde{I}^{(2)}(\mathbf{k})$  będącej odwrotnością transformaty Fouriera spójnej dwupunktowej funkcji korelacji (Greena), która zgodnie z twierdzeniem fluktuacyjno-dysspacyjnym jest proporcjonalna do podatności  $\chi_T$ . Rachunki te są znakomitym wprowadzeniem do renormalizacji, która w tym przypadku jest bardziej „namacalna fizycznie” niż przy obliczaniu elementów macierzy  $S$  i ilustrują rozmaite możliwe sposoby jej przeprowadzania (jednocześnie pokazując ich zgodność z omówionym w niniejszym artykule sensem tej procedury<sup>24</sup>) oraz zastosowań różnych metod grupy renormalizacji. Z uwagi na to, że wymiar  $D$  jest w przypadku interesujących układów statystycznych niższy niż 4 (odpowiadający relatywistycznym kwantowym teoriom pola), kluczowe staje się przeprowadzanie rachunków przy dowolnym wymiarze  $D$  w celu radzenia sobie z rozbieżnościami podczerwonymi (tu znów mającymi konkretne przyczyny fizyczne), do czego znakomicie nadaje się regularyzacja wymiarowa wprowadzająca skalę  $\mu$ , z którą, przy ustalonych wartościach „gołych” parametrów takich, jak  $a_B$ ,  $b_B$  i „gołych” stałych sprzężenia takich jak  $\lambda_B$  i dalsze (w  $I_E$  uzyskiwanym z uśrednienia

spinów jest ich w istocie wiele) oraz ustalonej wartości obciążenia  $\Lambda$ , zmieniają się („biegną”) zrenormalizowane parametry  $b_R$ ,  $a_R$ ,  $\lambda_R$  etc. Przy regularyzacji wymiarowej  $b_B^{\text{cr}} = 0$  i braniu granicy  $b_B \propto b_R \rightarrow b_B^{\text{cr}} = 0$  (odpowiadającej  $T \rightarrow T_{\text{cr}}$  wymaga badania granicy  $\mu \rightarrow 0$ . W granicy tej jak się okazuje zrenormalizowana stała sprzężenia  $\lambda_R$  oraz pozostałe zrenormalizowane sprzężenia działania  $I_E$  zbiegają do pewnych wartości granicznych, tzw. punktów stałych: w  $D = 4$  są one zerowe, ale w  $D < 4$  stała  $\lambda_R$  ma nietrywialny punkt stały (pozostałe możliwe stałe sprzężenia dalej biegną do zera) i to on determinuje wyznaczone wartości wykładników krytycznych, które, jak się okazuje, dają się wszystkie wyrazić przez dwie funkcje tylko (tzw. funkcję beta sprzężenia  $\lambda_R$  i wymiar anomalny pola  $\varphi_R$ ) zależne od tych granicznych wartości zrenormalizowanych sprzężeń.<sup>25</sup> W ten sposób naturalne wyjaśnienie znajdują związki pomiędzy tymi wykładnikami (wystarczy obliczyć dwa, by wyznaczyć wszystkie) oraz ich tzw. uniwersalność polegająca na tym, że wykładniki charakteryzujące zachowanie krytyczne układów tak różnych, jak ciecze, czy wykorzystany tu w charakterze przykładu układ spinów Isinga, jest takie samo; układy te mają takie same wymiary i taki sam charakter mają ich makroskopowe parametry porządku – układom tym odpowiada więc taki sam model efektywnej euklidesowej teorii pola i jedyne czym mogą się one różnić, to wartościami „gołych” parametrów i stałych sprzężenia działania  $I_E$ ; wykładniki krytyczne nie są jednak zdeterminowane wartościami gołych sprzężeń, lecz punktami stałymi zrenormalizowanych sprzężeń, do których te zbiegają w granicy  $\mu \rightarrow 0$ , niezależnie od swoich wartości wyjściowych.

Niestety otrzymanie tą metodą, wykorzystującą zwykły rachunek zaburzeń i zwykle zastosowanie doń grupy renormalizacji, dobrych wykładników krytycznych wymaga obliczeń w wysokich rzędach rachunku zaburzeń (parametrem rozwinięcia okazuje się odstępstwo  $\epsilon \equiv 4 - D$  rzeczywistego wymiaru układu od tzw. górnego

24. Warto w tym kontekście dodać jeszcze komentarz dotyczący skończoności funkcji Greena. Jest jasne, że gdyby współczynnik  $a_B(1)$  (i pozostałe parametry  $b_B(1)$  itd.) był taki jaki wynika z konstrukcji  $I_E[\phi]$  jako rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $\phi(\vec{x})$ , funkcje Greena  $\phi(\vec{x})$  jako funkcje korelacji dobrze określonej zmiennej losowej, byłyby skończone. Przy podejściu „fenomenologicznym” można, oczywiście, dobrać zależność parametrów  $a_B$ ,  $b_B$  itd. od obciążenia tak, by uczynić funkcje Greena elementarnych pól  $\phi$  skończonymi, ale nie jest to niezbędne (i tak można tylko utrzymywać, że pole  $\phi(\vec{x})$  jest do prawdziwego uśrednionego lokalnego namagnesowania proporcjonalne), by wyznaczyć fizyczne wielkości takie jak długość korelacji, podobnie jak w relatywistycznych teoriach skończoność funkcji Greena nie jest potrzebna, żeby wyznaczać z nich elementy macierzy  $S$ .

25. Zastosowanie metody grupy renormalizacji do zjawisk krytycznych w ramach teorii pola jest w pewnym sensie przeciwne (ale też ciekawsze nawet i bardziej złożone) do ich zastosowania w chromodynamice kwantowej przy wykorzystywaniu jej tzw. asymptotycznej swobody (zob. np. artykuły w *Postępy Fizyki* 56 (2005): mój s. 4 i Davida Grossa s. 195), kiedy bada się granicę  $\mu \rightarrow \infty$ , w której stała sprzężenia kwarków i gluonów biegnie do trywialnego (tj. zerowego) punktu stałego. Jednak jest naprawdę wspaniale móc, omawiając na wykładzie z fizyki statystycznej zjawiska krytyczne, powiedzieć słuchaczom, iż zachowanie w punkcie krytycznym układów takich jak płyny jednooskładnikowe (np.  $H_2O$ ) czy substancje, które z paramagnetyków stają się ferromagnetykami, ma coś wspólnego z faktem, że przy tzw. głębokonieelastycznym rozpraszaniu leptonów na hadronach kwarki, z których zbudowane są hadrony, zachowują się niemal jak swobodne (co objawia się tzw. skalowaniem Bjorkena odpowiednich funkcji struktury hadronów)!

wymiaru krytycznego równego 4, powyżej którego wykładniki krytyczne są takie same, jak przewiduje teoria Landaua) i, dodatkowo, korzystania z matematycznych technik sumowania szeregów asymptotycznych. Znacznie efektywniejsza jest tu metoda wykorzystująca tzw. funkcjonalną grupę renormalizacji, wprowadzoną przez C. Wettericha. Polega ona na obliczaniu całki funkcjonalnej bezpośrednio w fizycznej liczbie wymiarów  $D$  przez zmodyfikowaniu działania  $I_E$  o zależny od pewnego parametru skali  $\kappa$  (pełniącego rolę obciążenia podczerwonego) człon efektywnie tłumiący wkłady do niej pochodzące od pól fluktuujących na skalach odległości większych niż  $1/\kappa$ . W rezultacie obliczane jest zależne od parametru  $\kappa$  działanie efektywne  $\Gamma_\kappa[\Phi]$  równe  $I_E[\Phi]$ , gdy  $\kappa = \Lambda$  i pełnemu działaniu efektywnemu  $\Gamma[\Phi]$ , gdy  $\kappa \rightarrow 0$ . Działanie  $\Gamma_\kappa[\Phi]$  spełnia pewne funkcjonalne równanie różniczkowe, które można rozwiązywać różnymi sposobami. Jednym z najprostszych jest zapostulowanie postaci funkcjonu  $\Gamma_\kappa[\Phi]$  z dowolnymi parametrami (efektywnymi sprzężeniami) zależnymi od  $\kappa$  i przetłumaczenie równania funkcjonalnego na  $\Gamma_\kappa[\Phi]$  na zwykłe różniczkowe równania spełniane przez parametry jako funkcje  $\kappa$ . Przy odpowiednim wyborze warunków początkowych (przy  $\kappa = \Lambda$ ) otrzymuje się zachowanie rozwiązań odpowiadające zbliżaniu się układu do punktu krytycznego, co pozwala wyznaczyć wykładniki krytyczne.

Powróćmy teraz do formułowania kwantowej teorii pola w zwykłej czasoprzestrzeni. Jeżeli robi się to bezpośrednio poprzez postulat definiujący funkcje Greena jako odpowiednie całki funkcjonalne, bez odwoływania się do formalizmu operatorowego (a w większości przypadków gdy się nawet to czyni, to nie korzysta się w pełni z przepisu LSZ w takiej jego formie, w jakiej został on tu wcześniej przedstawiony), to aby obliczać elementy macierzy  $S$ , konieczne jest uzupełnienie tego postulatu wprowadzonym zazwyczaj ad hoc przepisem, że przy obliczaniu funkcji Greena w rachunku zaburzeń należy pomijać diagramy niespójne<sup>26</sup> oraz te stanowiące poprawki do linii zewnętrznych diagramów i na każdą z takich linii wprowadzić należy czynnik „funkcji falowej”

26. Ich pomijanie w istocie wiąże się ze spełnianą przez macierze  $S$  otrzymywane z lokalnych kwantowych teorii pola zasadą rozkładu gronowego (ang. cluster decomposition principle), która gwarantuje, że elementy takich macierzy  $S$  odpowiadające procesom zachodzącym równolegle w odległych przestrzennie miejscach (laboratoriach) faktoryzują się – prawdopodobieństwa rezultatów takich procesów nie są ze sobą skorelowane; pomijane niespójne części funkcji Greena dają właśnie sfaktoryzowane elementy macierzy  $S$  odpowiadające odległym przestrzennie, równoległym procesom i po zsumowaniu kwadratów ich modułów, czyli po zsumowaniu prawdopodobieństw wszystkich możliwych rezultatów tych równoległych procesów muszą dać czynnik równy jedności.

cząstki (lub antycząstki) w stanie początkowym lub końcowym, którego postać na ogół uzasadnia się odwołując się do odpowiednich rozwiązań swobodnych równań falowych i feynmanowskiej interpretacji antycząstek jako cząstek propagujących się wstecz w czasie.<sup>27</sup> Jeszcze większy kłopot stanowi przy tym uzasadnienie, dlaczego przy renormalizacji innej niż „na powłoce masy”, np. przy stosowaniu tzw. minimalnego odjęcia (zob. część 2. artykułu), konieczne jest uwzględnienie czynników  $Z^{1/2}$  odpowiednich do używanych przeskalowanych pól. Powinno też być jasne, że formułując te przepisy implícite przyjmuje się restrykcyjne założenia o odpowiedniości jeden do jednego stanów własnych swobodnego hamiltonianu („kwantów” pól swobodnych) i hamiltonianu z oddziaływaniami.

Z powyższych uwag jasno wynika, że formułowanie kwantowej teorii pola przez całki po trajektoriach nawet w przypadku prostych teorii wymaga jednak, jeśli chce się w miarę porządnie uzasadnić podawane przepisy prowadzące do elementów macierzy  $S$ , odwoływania się do formalizmu operatorowego. Jest on także gwarancją spełniania przez otrzymywane w ramach kwantowej teorii pola amplitudy prawdopodobieństwa i elementy macierzy  $S$  warunków unitarności – w sformułowaniu funkcjonalnym ta ich cecha nie jest oczywista i można ją sprawdzać (zapewniać) tylko perturbacyjnie analizując zachodzenie (bądź żądając ich zachodzenia) odpowiednich związków między przyczynkami wnoszonymi przez różne diagramy Feynmana, niemniej podejście do kwantowania wykorzystujące całki po trajektoriach wnosi pewne wygodne uproszczenia. Przede wszystkim przestaje być widoczna (choć to może nie jest żadna zaleta...) nieseparowalność przestrzeni Hilberta, która powoduje (na ogół czysto formalne dla fizyka, choć trudne do przewyciężenia dla matematyka) problemy przy przechodzeniu od jednych zmiennych polowych do innych; tu operacje takie jak przeskalowania operatorów (ich „renormalizacja”) są zwy-

27. Pogłębiając tym samym konfuzje narosłe wokół kwantowej teorii pola wskutek notorycznego korzystania przy jej formułowaniu z niespójnych argumentów. Jeśli jednak jeśli uważa się, tak jak M. Peskin i D.V. Schroeder, autorzy podręcznika *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, 1995), że: *Quantum Field Theory is a set of ideas and tools that combines three of the major themes of modern physics: the quantum theory, the field concept and the principle of relativity* (a nie, że jest to logicznie skonstruowana teoria), to nie ma czemu się dziwić... Przy okazji znów nie mogę się powstrzymać od złośliwego zauważenia, iż autorzy tej nader często wykorzystywanej przez studentów książki nie szczędzą w niej (liczy ona ponad 800 stron!) kwiecistych (wypowiadanych na ogół we współczesnej beztreściowej nowomowie) komentarzy, ale w swoim słowotoku nigdy nie mówią tego, co naprawdę jest istotne.

kłymi funkcjonalnymi zamianami zmiennych, dokonywanymi na klasycznym działaniu i gęstości lagrangianu. Co więcej, nawet jeśli wyprowadza się reprezentację amplitud i funkcji Greena przez całki funkcjonalne wychodząc od sformułowania operatorowego i hamiltonianu, to ostatecznie reguły Feynmana wynikają z postaci (klasycznego) lagrangianu, występującego w czynniku eksponencjalnym w całce funkcjonalnej,<sup>28</sup> który ma postać jawnie lorentzowsko niezmienniczą (przypomnijmy tu „dziwny” wygląd hamiltonianu po przejściu do przeskalowanych operatorów pola!) i przeskalowanie pól nie prowadzi, tak jak przy podejściu operatorowym, do powstania w oddziaływaniu członów niekowariantnych; zarazem nie powstają też niekowariantne wyrazy w propagatorach, gdyż te są tu kowariantnymi funkcjami Greena (w sensie matematycznym) kowariantnych równań Eulera–Lagrange’a pól swobodnych tak, iż nie zachodzi tu żadne (konieczne w formalizmie operatorowym, choć nieoczywiste) kasowanie. Także propagator fotonu w elektrodynamice kwantowej formułowanej za pomocą całek funkcjonalnych jest automatycznie kowariantny (w podejściu operatorowym ma on niekowariantne i przestrzennie nielocalne człony skracające się następnie z przyczynkami wnoszonymi przez diagramy generowane w wyniku konieczności jawnego w takim podejściu uwzględnienia w hamiltonianie przestrzennie nielocalnego oddziaływania coulombowskiego). Inaczej patrząc, wszystkie iloczyny chronologiczne operatorów, takie jak występujące w definicji funkcji Greena, definiowane implícite przez podejście funkcjonalne są automatycznie tzw. kowariantnymi iloczynami chronologicznymi.

Przyjęcie postulatu, że funkcje Greena teorii są dane całką funkcjonalną z czynnikiem eksponencjalnym, w którym występuje klasyczne działanie, pozwala także bezpośrednio rozpatrywać teorie, których klasyczne lagrangiany zależą od pochodnych wyższych niż pierwsze. Taką postać mają szeroko wykorzystywane teorie efektywne, np. tzw. chiralne teorie niskoenergetycznych oddziaływań mezonów (będących pseudogoldstonowskimi bozonami jawnie i zarazem spontanicznie naruszonych symetrii chromodynamiki kwantowej) i różne modele uogólniające sprawdzony model standardowy. Droga do sformułowania takich teorii w języku przestrzeni Hilberta jest dość żmudna i wymaga rozpatrywania ich jako

teorii z więzami.<sup>29</sup> Nie jest to jednak potrzebne do otrzymania kowariantnych reguł Feynmana choć, oczywiście, stosowanie przepisu LSZ do funkcji Greena implícite zakłada istnienie struktury kanonicznej nawet takich teorii (chyba że znów przyjmie się przepis LSZ w charakterze dodatkowego postulatu).

W przypadku pól Yanga–Millsa (sprzężonych z innymi polami lub nie), których najważniejszą cechą jest niezmienniczość ich klasycznego działania, a przede wszystkim ogólnie rozumianego (tu jeszcze klasycznie, ale tego samego oczekuje się w przypadku teorii kwantowej) stanu rzeczywistego układu fizycznego względem lokalnych przekształceń cechowania pól  $A_\mu^a(x)$ , które są jedynie charakteryzującymi ten stan zmiennymi, bezpośrednio przyjęcie postulatu wiążącego funkcje Greena operatorów z całką po wszystkich możliwych chwilowych konfiguracjach pól prowadzi do technicznej trudności. Powstaje ona, gdyż z powodu niezmienniczości działania operator różniczkowy (analog wspomnianego tu już operatora  $\Delta_{ij}(x)$ ) występujący w jego części zależnej biliniowo od  $A_\mu^a$  jest nieodwracalny, co powoduje, iż nie można zdefiniować jego (w matematycznym sensie) funkcji Greena i tym samym swobodnego propagatora. Poza tym, jeśli przyjąć, że są to funkcje Greena operatorów również niezmienniczych względem cechowania, a takie powinny wystarczać do pełnego scharakteryzowania niezmienniczych względem cechowania stanów układu, to całka funkcjonalna jest proporcjonalna do objętości grupy cechowania która, ponieważ są to przekształcenia lokalne, jest proporcjonalna do nieskończonej objętości czasoprzestrzeni. Sam z siebie ten nieskończony czynnik nie jest kłopotem - jak to uzasadniałem, czynniki takie zawsze kasują się z analogicznymi czynnikami pochodzącymi z całek użytych do normalizacji, ale właściwość ta podpowiada sposób poradzenia sobie z pierwszym problemem. Polega on na sprytnym wydzieleniu z całki funkcjonalnej (nieskończonej) objętości grupy, czego skutkiem jest uzupełnienie klasycznego działania o człon nie–niezmienniczy względem przekształceń cechowania, zwany wyrazem ustalającym cechowanie, gdyż jego postać wynika z nakładanego elektrycznie na pola  $A_\mu^a$  warunku (który można wybrać w pewnym zakresie dowolnie) pełniącego właśnie taką rolę i wystąpienie zależnego od pól cechowania czyn-

28. Należy jednak wspomnieć, że w przypadku niektórych modeli kwantowej teorii pola (np. tzw. nieliniowego modelu  $\sigma$ ) bardziej rygorystyczne, wychodzące od ich operatorowego sformułowania, wyprowadzenie np. reprezentacji operatora ewolucji przez całkę po trajektoriach, ujawnia konieczność uzupełnienia czysto klasycznego działania o dodatkowe człony, które mogą nawet być osobliwe, ale są konieczne dla pełnej równoważności obu podejść.

29. W istocie chwyt pozwalający przeprowadzić konieczną hamiltonizację klasycznych wersji takich teorii polega na znanym z teorii zwyczajnych równań różniczkowych wyższego rzędu wprowadzeniu większej liczby niewiadomych funkcji (tu pól) w celu obniżenia rzędu równania; przy przeprowadzaniu kwantyzacji, związki wyrażające równość jednych pól pochodnym innych stają się więzami i powodują konieczność posłużenia się formalizmem Diraca wspomnianym w części 2 tego artykułu.

nika przedeksponencjalnego (jego konkretna postać jest skorelowana z postacią członu nie–niezmienniczego) zwanego wyznacznikiem Faddiejewa–Popowa. Jeśli, jak ma to zwykle miejsce, człon nie–niezmienniczy jest biliniowo zależny od pól  $A_\mu^a$ , jego włączenie do działania swobodnego usuwa nieodwracalność występującego w nim operatora różniczkowego i umożliwia zdefiniowanie propagatora; z kolei wyznacznik Faddiejewa–Popowa, który jest, jeśli człon nie–niezmienniczy zależy od pól  $A_\mu^a$  kwadratowo, operatorem różniczkowym składającym się z operatora niezależnego od pól  $A_\mu^a$  i operatora zależnego od nich liniowo, daje się formalnie przedstawić w postaci całki funkcjonalnej po polach grassmanowskich  $c^a$  i  $\bar{c}^a$  (są one od siebie niezależne), zwanych polami „duchów”, z czynnika eksponencjalnego mającego formę dodatkowego, zleżącego biliniowo od pól duchów, członu działania i składającego się z części niezależnej od pól  $A_\mu^a$ , która umożliwia zdefiniowanie propagatora duchów, i części zależnej od nich liniowo dającej oddziaływanie duchów z polami cechowania. Otrzymuje się w ten sposób dość szybko reguły Feynmana kwantowej teorii pól Yanga–Millsa (sprzężonych z innymi polami lub nie), zgodnie z którymi wśród diagramów dających przyczynki do funkcji Greena trzeba uwzględniać także takie z zamkniętymi pętlami pól duchów, które są konieczne, by amplitudy obliczane za pomocą diagramów spełniały warunki unitarności.<sup>30</sup>

Jednak naszkicowana tu procedura kwantowania pól Yanga–Millsa (lub ściślej: otrzymywania reguł Feynmana takich teorii) ma poważną wadę, działa bowiem tylko wtedy, gdy człon nie–niezmienniczy jest od pól zależny biliniowo; jeśli zależałby on od nich w bardziej skomplikowany sposób, amplitudy otrzymywane z diagramów nie byłyby unitarne; pojawiłyby się też problemy z usuwaniem nieskończoności (te dwie rzeczy są ze sobą zawsze związane, gdyż unitarność amplitud obliczonych w niższym rzędzie rachunku zaburzeń ogranicza charakter wzrostu, gdy dążą do nieskończoności czteropędy cząstek wirtualnych, funkcji podcałkowych

w wyrażeniach odpowiadających diagramom wyższego rzędu, w których te amplitudy są poddiagramami) i to nie tylko z samych funkcji Greena, ale także z wielkości mierzalnych (po renormalizacji parametrów). Pokazuje to, że taka procedura „kwantowania” nie jest systematyczna. W istocie kluczowe dla (przypadkowego) jej działania jest to, że gdy człon nie–niezmienniczy jest biliniowy i otrzymany, w jej wyniku nowe działanie (będące sumą wyjściowego klasycznego działania, członu nie–niezmienniczego i członu zależnego od pól duchów) jest niezmiennicze względem przekształceń, nowej (już tylko globalnej, a nie lokalnej) symetrii zwanej symetrią BRST (od nazwisk jej odkrywców: Becchiego, Roueta, Story i Tiutina), wiążących ze sobą pola cechowania i grassmanowskie pola duchów (są więc to przekształcenia typu supersymetrycznego) i to owa symetria BRST jest odpowiedzialna za „sukces” kwantowania. Gdy człon nie–niezmienniczy jest bardziej skomplikowany, przepis z wyznacznikiem Faddiejewa–Popowa nie prowadzi do działania mającego symetrię BRST i bez dodatkowych uzupełnień prosta metoda „kwantowania” przez wykorzystanie całek po trajektoriach zawodzi. Nawet jeśli udaje się ją uzupełnić, np. dopisując metodą prób i błędów (lub stosując jakieś bardziej systematyczne podejście) dodatkowe człony do działania tak, by w końcu miało ono symetrię BRST, to z uwagi na to, że uzasadnieniem przepisu LSZ, pozwalającego z funkcji Greena otrzymywać elementy macierzy  $S$ , jest struktura hamiltonowska, wydaje się, że lepiej jest, korzystając z metody Diraca, kwantować taką teorię jako ograniczony więzami układ pól cechowania i pól duchów mający symetrię BRST. Jak już wspomniałem, wbrew dość powszechnemu mniemaniu nie jest to bardzo skomplikowane (przynajmniej w przypadku zwykłych teorii z polami Yanga–Millsa; jedyną niedogodnością jest konieczność zauważenia znoszenia się różnych niekowariantnych przyczynków), pozwala za to zidentyfikować nilpotentne ładunki symetrii BRST i uwypuklić kohomologiczną strukturę przestrzeni Hilberta, z której wynika rozkład przestrzeni Hilberta na podprzestrzeń reprezentującą stany fizyczne układu i podprzestrzeń niefizyczną (której wektory mogą mieć niedodatnie normy). Rozkład taki pozwala jednoznacznie orzekać, które z biegunów różnych dwupunktowych funkcji Greena odpowiadają rzeczywistym cząstkom (że takich nie reprezentują np. bieguny odpowiadające bozonom Goldstone’a związanym z naruszonymi symetriami cechowania). Umożliwia on także wykazanie (na ogół co prawda czysto formalne, gdyż opierające się na omawianym już założeniu o odpowiedniości jeden do jednego stanów własnych hamiltonianów pełnego i swobodnego) unitarności macierzy  $S$  w podprzestrzeni reprezentującej stany fizyczne oraz jej niezależności od wyboru

30. Do przepisu tego doszedł m.in. Feynman i podał go w najbardziej znanej ze wszystkich prac opublikowanych w *Acta Physica Polonica* B, tj. *Acta Phys. Pol.* B 24, 697 (1963) (w ramach materiałów z konferencji w Jabłonie, słynnej także ze zdjęcia Feynmana z profesorem Iwo Białyńskim–Birulą) jako koniecznego dla unitarności; lubię sobie wyobrażać, że był to odległy efekt pytania, które piętnaście lat wcześniej, na minikonferencji w Pocono Manor, gdy przedstawiał swój sposób formułowania rachunku zaburzeń w elektrodynamice kwantowej, zadał Feynmanowi obecny tam Dirac: *Ale czy Pana teoria jest unitarna?* i na które, nieco niepewny o co chodzi z tą unitarnością, miał odpowiedzieć: *Powiem Panu, jak ona działa, a Pan mi powie, czy jest unitarna ...* (J. Gleick *Geniusz*, Zysk i S-ka, 1999).

członu ustalającego cechowanie.<sup>31</sup> Sformułowanie teorii pól Yanga–Millsa przez całki po trajektoriach okazuje się jednak bardzo pomocne przy znajdowaniu reguł Feynmana teorii, w których symetrie cechowania są naruszone spontanicznie (po raz pierwszy zrobił to Gerardus 't Hooft w jednej z prac z 1971, za które w 1999 otrzymał wraz z Martinusem Veltmanem Nagrodę Nobla)<sup>32</sup> oraz przy wyprowadzaniu związków między różnymi funkcjami Greena. Związki te, zwane tożsamościami Warda–Takahashiego (lub Sławnowa–Taylora), wynikają z symetrii cechowania ścisłych lub spontanicznie naruszonych (a właściwie z odpowiednich symetrii BRST. W sformułowaniu funkcjonalnym teorii wynikają z tzw. tożsamości Zinn-Justina, które musi spełniać pełny funkcjonal kwantowego działania efektywnego  $\Gamma[A_\mu^a, \dots]$ . Muszą one zachodzić, by teoria była wewnętrznie spójna, a mogą być naruszone przez konieczność wprowadzenia regularyzacji; zazwyczaj uważa się, że regularyzacja wymiarowa (polegająca na sformułowaniu teorii w  $d = 4 - \varepsilon$  wymiarach) zachowuje wszystkie te związki automatycznie, ale nie jest to prawdą; gdy symetrie cechowania mają charakter chiralny (działają inaczej na różne chiralne składowe tych samych diracowskich pól fermionowych, a tak właśnie jest w modelu standardowym), konieczne jest wtedy „ręczne restaurowanie” tych związków przez odpowiedni wybór nie-niezmienniczych kontrczłonów. Na bardziej zaawansowanym poziomie analiza tożsamości Zinn-Justina spełnianych przez pełny funkcjonal [patrz podkreślone na zielono wyrażenie II wierszy wyżej] umożliwia w zasadzie rekonstrukcję prawdziwych stanów asymptotycznych (in i out) i zdefiniowanie łączącego je operatora  $\hat{S}$  (a nie  $\hat{S}_0$ ), którego elementy pomiędzy stanami in i out dają macierz  $\hat{S}$  teorii.

Oprócz tego, że sformułowanie kwantowej teorii pola w języku całek funkcjonalnych otwiera, dzięki ich dyskretyzacji na skończonych sieciach punktów zastępujących czasoprzestrzenne kontinuum, możliwość numerycznego badania właściwości (głównie statystycznych takich jak zachodzenia przemian fazowych w układach pól) różnych jej modeli, całki po trajektoriach są właściwie jedynym narzędziem przy badaniu tych aspektów kwantowej teorii pola, które nie poddają się analizie za pomocą rachunku zaburzeń, np. uwzględniania tych przyczynków do amplitud, które zależą od stałych sprzężenia w sposób nieanalityczny. Możliwość taką daje obliczanie całek funkcjonalnych przez rozwijanie ich wokół pewnych nietrywialnych konfiguracji pól zamiast, jak ma to miejsce

w przypadku zwykłego rachunku zaburzeń, wokół pól równych zero. Pozwala to badać wpływ na widmo hamiltonianu teorii nietrywialnych warunków brzegowych, jakie mogą być nakładane na pola w nieskończoności. Warunki takie np. w przypadku nieabelowych pól cechowania prowadzą do istnienia nietrywialnych topologicznie konfiguracji, które istotnie zmieniają strukturę stanów własnych hamiltonianu, w szczególności jego stanu podstawowego. Przy badaniu takich efektów znów kluczowe staje się naszkicowane tu sformułowanie teorii jako teorii pól określonych na przestrzeni euklidesowej (dopełnione wickowskim przedłużeniem analitycznym). Jest tak dlatego, że z powodu nieoscylicyjnego charakteru czynnika eksponencjalnego, w takim sformułowaniu zupełnie inna jest waga z jaką do całki wchodzi poszczególne konfiguracje trajektorii. Najłatwiej to zilustrować przykładem z mechaniki kwantowej cząstki poruszającej się w jednym wymiarze przestrzennym w symetrycznym względem odbić potencjale  $V(x) = V(-x)$ , dążącym do nieskończoności, gdy  $|x| \rightarrow \infty$ , ale mającym dwa minima w  $x = -a$  i  $x = a$  przedzielone „górką” o wysokości  $h$  w  $x = 0$ . Gdyby górka była nieskończenie wysoka ( $h = \infty$ ), istniałyby dwie rozłączne grupy stanów własnych hamiltonianu  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$  o dokładnie odpowiadających sobie energiach, a cząstka znajdująca się w stanie będącym superpozycją stanów własnych  $H$ , zlokalizowanych wokół jednego z dołków, nigdy nie mogłaby być znaleziona w okolicy drugiego dołka. Przy skończonej wysokości góry istnieje niezerowa amplituda prawdopodobieństwa tego, że cząstka w chwili  $t_1$  całkowicie zlokalizowana w pobliżu  $x = -a$ , zostanie zarejestrowana w chwili  $t_2$  w pobliżu  $x = a$  (lub na odwrót).<sup>33</sup> Istnienie takich niezerowych amplitud

33. Jest to istota tzw. efektu tunelowego. Często przedstawia się ją bałamutnie (zapewne przy popularnych omówieniach jest to zabieg prestidigitatorski mający zdezorientować publikę, by lepiej przyjęła sztuczkę; gorzej jeśli takie stwierdzenia spotyka się w renomowanych podręcznikach), twierdząc, że jeśli cząstka znajduje się w chwili początkowej np. w lewym minimum i ma energię niższą niż wysokość „górki”, to nie istnieje trajektoria klasyczna, łącząca to minimum z prawym i dlatego klasycznie cząstka pozostaje uwięziona w lewym minimum oraz że to nieistnienie odpowiedniej trajektorii klasycznej jest powodem przejścia do sformułowania z urojonym czasem. Jak tłumaczę to w tekście, trajektorii klasycznych istnieje wiele. Bałamutność polega tu na tym, że z punktu widzenia mechaniki kwantowej cząstka zlokalizowana wokół np.  $x = -a$  nie może mieć określonej energii – jej stan jest superpozycją wszystkich możliwych stanów własnych hamiltonianu (mówienie więc, że cząstka ma jakąś energię jest po prostu bez sensu). Wobec tego istnieje prawdopodobieństwo znalezienia jej z każdą, nawet bardzo dużą, energią należącą do widma hamiltonianu – nic więc dziwnego, że może przekroczyć skończoną barierę potencjału. Dlatego za bardziej „szokującą” powinno się uważać możliwość znalezienia cząstki znajdującej się w stanie o dobrze określonej energii (w stanie własnym hamiltonianu) w obszarach, w których potencjał jest wyższy niż jej energia.

31. Weinberg w drugim tomie *Nowoczesne zastosowania swojej Teorii pól kwantowych* (PWN, 1999) szkicuje te dowody, ale w sposób bardzo niekompletny.

32. *Postępy Fizyki* 51, 49 i 281 (2000).

powinno zostać uwzględnione w całce funkcjonalnej reprezentującej np. operator ewolucji czasowej układu, np. w całce dającej  $\langle a | \exp\{-(i/\hbar)\hat{H}(t_2 - t_1)\} | -a \rangle$ . Istnieje jednak nieskończenie wiele klasycznych trajektorii (spełniających klasyczne równania ruchu, a więc będących punktami stacjonarnymi oscylacyjnego czynnika występującego w całce funkcjonalnej) takich, że cząstka rozpoczyna ruch w chwili  $t_1$  w  $x = -a$  i przechodzi przez  $x = a$  w zadanej chwili  $t_2$  (wystarczy wyobrazić sobie, że nadajemy jej w chwili  $t_1$  odpowiednio dobraną prędkość, by po wykonaniu większej lub mniejszej liczby oscylacji przechodziła przez  $x = a$  akurat w chwili  $t_2$ ), co utrudnia zadanie. Tymczasem w sformułowaniu z czasem urojonym, „klasyczny” lagrangian występujący w działaniu  $I_E$  ma postać  $T + V$  (zamiast  $T - V$ ) i klasyczne trajektorie będące jego punktami stacjonarnymi odpowiadają ruchowi cząstki w potencjale  $-V(x)$  mającym dwie „górkę” w  $x = -a$  oraz (przedzielone dołkiem o głębokości  $h$ )  $x = a$  i spadającym do  $-\infty$  przy  $|x| \rightarrow \infty$ . Jest intuicyjnie jasne, że dopiero przy  $(t_2 - t_1) \rightarrow \infty$  istnieje i to tylko jedna „klasyczna” trajektoria łącząca asymptotycznie  $x = -a$  z  $x = a$  i to ona daje ten istotny, związany z rozszczepieniem poziomów energetycznych hamiltonianu przy skończonym  $\hbar$ , przyczynek do całki funkcjonalnej. Uwzględnienie go pozwala przy  $(t_2 - t_1) \rightarrow \infty$  „odczytać” rozszczepienia poziomów energetycznych takiego układu powodowane skończoną wysokością bariery. W analogiczny sposób, istnienie nietrywialnych rozwiązań „euklidesowych” klasycznej teorii pola pozwala badać np. nietrywialną strukturę stanu podstawowego teorii z nieabelowym cechowaniem oraz topologiczne efekty w innych modelach kwantowej teorii pola.

#### Podsumowanie

Kwantowa teoria pola nie jest łatwa – jest to zwykle najtrudniejszy wykład (dziś utrudniony tym, że wiedza jaką

wynoszą studenci z typowego kursu mechaniki kwantowej jest, mówiąc ogólnie, bardzo ograniczona, a na kurs kwantowej teorii pola przeznaczają się jeden semestralny wykład w formacie 2 + 2). Przedstawiłem tu w zarysie mój punkt widzenia na to, jak powinno się dziś przedstawiać podstawy tej teorii i świadom jestem, że może on się wydać nieortodoksyjny, by nie rzec kontrowersyjny (zwłaszcza dla starszej generacji teoretyków wychowanych w ubóstwie równania Diraca). Jestem jednak przekonany, że zaproponowany tu punkt widzenia nie dość, że jest całkowicie poprawny, to jest jeszcze znacznie bardziej logiczny i dzięki temu łatwiejszy do zrozumienia dla dopiero uczących się kwantowej teorii pola. Jak to w mojej ulubionej książeczce *The Elements of Classical Thermodynamics* napisał jej autor, A. Brian Pippard:

*While it is fascinating for the historian of science to see how Carnot, in his astonishing memoir *Sur la puissance motrice du feu* (1824), arrived at so many correct conclusions after having started with the incorrect caloric theory of heat, only confusion would result from trying to base a modern treatment on this work.*

Prezentując dziś kwantową teorię pola w tradycyjny sposób w dużej mierze idzie się właśnie „śladami rozumowań Carnota”. Wydaje się, że w XXI wieku właściwe byłoby już otrząsnąć się z bezwładu umysłowego oraz bałwochwalczego uwielbienia równania Diraca i zacząć wykładać kwantową teorię pola, która, jak wspomniałem na wstępie, jest dziś absolutnie niezbędnym narzędziem każdego teoretyka – i to nie tylko zajmującego się fizyką wysokich energii i cząstek elementarnych, ale także zainteresowanego fizyką materii skondensowanej i fizyką statystyczną – w sposób, który uczyni ją bardziej logiczną i dzięki temu lepiej zrozumiałą. Jest to, jak się wydaje, podstawowy warunek twórczego z niej korzystania.