

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Seria XV

6 II 2013 r.

Zadanie 1. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy za pomocą rozwinięcia Laplace'a:

$$\begin{aligned} a) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, & b) & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, & c) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ d) & \begin{pmatrix} i & 0 & 3 \\ 2 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & e) & \begin{pmatrix} i & 0 & 2 & 0 \\ i & 1 & 3 & 0 \\ 2-i & 0 & i+2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & f) & \begin{pmatrix} i & -i & 2 & 0 \\ i+1 & -2i & 4 & 0 \\ 2-i & 0 & i+2 & 1 \\ 1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wyznacz macierze odwrotne macierzy a , b , c i d .

Zadanie 2. Sprawdź czy następujące macierze są odwracalne. W takim przypadku, oblicz ich macierze odwrotne.

$$\begin{aligned} a) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ (rozpatr. na } \mathbb{Z} \text{)}, & b) & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ (rozpatr. na } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{)}, \\ c) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ (rozpatr. na } \mathbb{R} \text{)}, & d) & \begin{pmatrix} 1+i & -i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i-1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ (rozpatr. na } \mathbb{C} \text{)}. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Ustal, dla których a następujące macierze są odwracalne w \mathbb{C} i w \mathbb{R} . Jeżeli są odwracalne, to oblicz macierz odwrotną.

$$a) \begin{pmatrix} i & 0 & 3 \\ 1 & -i & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} a & 1/4 & 0 \\ i & a & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 4. Niech A będzie odwracalną macierzą ze współczynnikami w pierścieniu \mathcal{A} , czy A^n , gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest macierzą odwracalną?

Zadanie 5. Ustal, dla których $a \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ następujące macierze są odwracalne lub mają nietrywialne jądro (w $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$).

$$a) \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 2 \\ 3+a & 1 & 3a+2 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 6. Dana $f \in \text{End}((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3)$ postaci

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix},$$

czy f jest bijekcją?