Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XVII

Javier de Lucas

Zadanie 1. Niech A będzie algebrą z jedynką nad ciałem k, a $a \in A$ elementem odwracalnym w A. Udowodnij że $\lambda \in \mathrm{spec}_A(a) \ \Leftrightarrow\ \lambda^{-1} \in \mathrm{spec}_A(a^{-1})$ (Oczywiście zakładamy, że λ jest różny od zera. Inaczej, zdanie jest fałszywe skoro nie istnieje λ^{-1}).

Rozwiązanie:

Zamiast twierdzić, że $\lambda \in \mathrm{spec}_A(a) \ \Leftrightarrow\ \lambda^{-1} \in \mathrm{spec}_A(a^{-1})$, udowodnimy, że

$$\lambda \notin \mathrm{spec}_A(a) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \notin \mathrm{spec}_A(a^{-1}).$$

Oczywiście, obie rzeczy są równoważne.

Jeżeli $\lambda \notin \mathrm{spec}_A(a)$, to

$$(a - \lambda \cdot 1)^{-1} \in A.$$

Więc, istnieje $b \in A$ taki, że

$$(a - \lambda \cdot 1)b = 1.$$

Mnożąc najpierw przez a^{-1} po lewej stronie i później przez λa po prawej stronie, to

$$(1 - \lambda a^{-1} \cdot 1)b = a^{-1} \Rightarrow (1 - \lambda a^{-1})(\lambda ba) = \lambda \cdot 1.$$

Mnożąc przez λ^{-1}, to

$$(\lambda^{-1} \cdot 1 - a^{-1})(\lambda ba) = 1 \Rightarrow (a^{-1} - \lambda^{-1} \cdot 1)(-\lambda ba) = 1.$$

Więc, $(a^{-1} - \lambda^{-1} \cdot 1)^{-1} = -\lambda ba \in A$ i $\lambda^{-1} \notin \mathrm{spec}_A(a^{-1})$. Innymi słowy,

$$\lambda \notin \mathrm{spec}_A(a) \Rightarrow \lambda^{-1} \notin \mathrm{spec}_A(a^{-1}).$$

Podobnie można udowodnić, że

$$\lambda^{-1} \notin \mathrm{spec}_A(a^{-1}) \Rightarrow \lambda \notin \mathrm{spec}_A(a).$$

Z tego

$$\lambda^{-1} \notin \mathrm{spec}_A(a^{-1}) \Leftrightarrow \lambda \notin \mathrm{spec}_A(a).$$

Zadanie 2. Niech k będzie nieskończonym pierścieniem całkowitym, a $F \in M_n(k)$ dowolną macierzą górnotrójkątną (tzn. $i > j \Rightarrow F_{ij} = 0$). Udowodnij że

$$\prod_{i=1}^{n} (F - F_{ii} I_n) = 0,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową rozmiaru n.

Rozwiązanie:

Zdefiniujemy podprzestrzenie liniowe przestrzeni k^n postaci

$$E_k = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_n = x_{n-1} = \ldots = x_k = 0\}, \qquad k = 1, \ldots, n, \qquad E_{n+1} = k^n.$$

Zauważ, że

$$0 = E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset E_{n+1} = k^n, \qquad \dim E_k = k - 1.$$

Łatwo zauważyć, że

$$(F - F_{ii} I_n) E_{i+1} \subset E_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Na przykład,

$$(F - F_{ii}I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{i-1} \\ x_i \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}-F_{ii} & F_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & F_{1n} \\ 0 & F_{22}-F_{ii} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_{i-1i-1}-F_{ii} & \dots & \dots & \dots & F_{i-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & F_{in} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & F_{i+1i+1}-F_{ii} & \dots & F_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & F_{nn}-F_{ii} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{i-1} \\ x_i \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{i-1} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z tego

$$\operatorname{Im}\left(\prod_{i=1}^{n}(F - F_{ii}I_n)\right) = \prod_{i=1}^{n}(F - F_{ii}I_n)E_{n+1} \subset \prod_{i=1}^{n-1}(F - F_{ii}I_n)E_n \subset \prod_{i=1}^{n-2}(F - F_{ii}I_n)E_{n-1} = \ldots = 0.$$

Więc, dla dowolnego $x \in k^n$, to

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(F - F_{ii}I_n)\right)x = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n}(F - F_{ii}I_n) = 0.$$

Uwaga: Zauważ, że $(F - F_{ii}I_n)(F - F_{jj}I_n) = (F - F_{jj}I_n)(F - F_{ii}I_n)$ dla dowolnych $i, j = 1, \ldots, n$. Wobec tego, czynniki mnożenia $\prod_{i=1}^{n}(F - F_{ii}I_n)$ można napisać w dowolnej kolejności.

Zadanie 3. Niech A będzie algebrą z jedynką nad przymiennym pierścieniem k, i niech $\operatorname{inv}(k)$ oznacza zbiór odwracalnych elementów k. Udowodnij, że

$$\forall a, b \in A : \operatorname{spec}_A(ab) \cap \operatorname{inv}(k) = \operatorname{spec}_A(ba) \cap \operatorname{inv}(k).$$

Rozwiązanie Można zauważyć, że $ab - \lambda \cdot 1$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy $ba - \lambda \cdot 1$ jest odwracalny. Właśnie, niech $ab - \lambda \cdot 1$ będzie odwracalny, to możemy napisać

$$\begin{aligned}(ba - \lambda \cdot 1)(-1 + b(ab - \lambda \cdot 1)^{-1}a) &= -(ba - \lambda \cdot 1) + (ba - \lambda \cdot 1)b(ab - \lambda \cdot 1)^{-1}a \\ &= -(ba - \lambda \cdot 1) + b(ab - \lambda \cdot 1)(ab - \lambda \cdot 1)^{-1}a = -(ba - \lambda \cdot 1) + ba = \lambda \cdot 1.\end{aligned}$$

Skoro λ jest odwracalny, to $ba - \lambda \cdot 1$ jest odwracalny:

$$(ba - \lambda \cdot 1)^{-1} = \lambda^{-1}(-1 + b(ab - \lambda \cdot 1)^{-1}a).$$

Podobnie, można udowodnić, że kiedy $ba - \lambda \cdot 1$ jest odwracalny, to $ab - \lambda \cdot 1$ jest odwracalny. Wobec tego, dla dowolnego $\lambda \in \operatorname{inv}(k)$,

$$\forall a, b \in A : \lambda \notin \operatorname{spec}_A(ab) \Leftrightarrow \lambda \notin \operatorname{spec}_A(ba).$$

Więc,

$$\forall a, b \in A : \lambda \in \operatorname{spec}_A(ab) \cap \operatorname{inv}(k) \Leftrightarrow \lambda \in \operatorname{spec}_A(ba) \cap \operatorname{inv}(k).$$