Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XIX

J. de Lucas

Zadanie 1. Sprawdź zbieżność macierzowego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=2013}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} n!}{n^n} A^n, \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Rozwiązanie: Aby sprawdzić czy macierzowy szereg potęgowy jest zbieżny czy nie musimy sprawdzić czy moduły wartości własnych macierzy A są mniejsze od promienia szeregu

$$\sum_{n=2013}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} n!}{n^n} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_n a_n z^n$ to

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad \text{(Wzór Hadamard'a).}$$

Można też zdefiniować promień postaci

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

ale nasza definicja jest ogólniejsza. Przypominamy, że

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_k\}_{k\geqslant n}\right), \qquad \exists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \exists \limsup_{n\to\infty} a_n \text{ i } \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Można zauważyć, że promień zbieżności nie zależy od pierwszych terminów szeregów, czyli nie jest ważne czy szereg zaczyna się dla $n = 2013$ czy od innej liczby.

W naszym przykładzie $a_n = 2^{n/2} n!/n^n$, to

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n/2} n!/n^n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} (2^{1/2}/n) \sqrt[n]{n!}}.$$

Z wzoru Stirlinga

$$n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \qquad n >> 1,$$

i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\pi n} = 1$, to

$$r = \frac{n}{\limsup_{n\to\infty} 2^{1/2} n e^{-1}} = e 2^{-1/2} \simeq 1.92212.$$

Natomiast, wartości własne macierzy A to

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Więc, $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$, $\lambda_+ = 1.61803$ i $\lambda_- = -0.61804$. Skoro $|\lambda_\pm| < r$, to szereg jest zbieżny.

Komentarz: Można korzystać z innego wzoru dla promieni zbieżności szeregu

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

W tym zadaniu, to pozwala nam unikać skorzystać z wzoru Stirlinga.

Zadanie 2. Oblicz A^{50} i e^A dla

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Rozwiązanie:

Aby obliczyć A^{50} zakładamy, że A to macierz endomorfizmu $f_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ w bazach kanonicznych i prowadzimy zmianę do bazy gdzie A ma postać Jordana. Więc, obliczymy wartości własne i wektory własne odwzorowania liniowego macierzy A.

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 5 \\ -1 & -2 & -4-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = (1-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Aby sprawdzić czy powyższy wynik jest dobry czy nie, można skorzystać ze wzoru

$$\det(B - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + \mathrm{Tr} B (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1 \lambda + \det B,$$

gdzie $B \in M_n(\mathbb{C})$ i $a_{n-2}, \ldots, a_1 \in \mathbb{C}$. Łatwo zauważyć, że $\mathrm{spec}_{M_3(\mathbb{C})} A = \{1, -1\}$ i $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_{-1}$. Wektory własne są:

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Przestrzeń własna V_{-1} ma postać

$$V_{-1} = \left\langle v^j_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Każda przestrzeń V_λ jest niezmienna, czyli, jeżeli $v \in V_\lambda$, to $Av \in V_\lambda$. W naszym przypadku,

$$Av^j_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_{-1} - v^j_{-1} \in V_{-1}.$$

Korzystając z tego, macierz morfizmu f_A w nowej bazie $B' = \{v_1, v_{-1}, v^j_{-1}\}$ ma postać

$$(f_A)_{B'B'} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teraz, przypominamy diagram zmiany bazy. Wiemy, że $f_A = I \circ f_A \circ I$ gdzie I to funkcja tożsamościowa. Jeżeli rozpatrujemy macierze tych endomorfizmów, to

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "M_{B'B'}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "I_{B'B}"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "I_{BB'}"] \arrow[r, "M_{BB}"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

gdzie M_{BB} to macierz endomorfizmu f_A w bazach kanonicznych, czyli A, macierz $M_{B'B'}$ to macierz endomorfizmu f_A w bazach B' i $I_{BB'}$ to macierz zmiany bazy od B do B' i $I_{B'B}$ to macierz zmiany bazy od B' do B, czyli macierz funkcji tożsamościowej od B do B' i odwrotnie. Można zauważyć, że kolumny macierzy $I_{B'B}$ są obrazami elementów bazy B' we współrzędnych bazy B. Czyli

$$I_{B'B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wówczas, $I_{BB'}$ to

$$I_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Więc

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Teraz, mamy, że

$$A^n = (I_{B'B}M_{B'B'}I_{BB'})^n = I_{B'B}M_{B'B'}I_{BB'} \cdot I_{B'B}M_{B'B'}I_{BB'} \cdot \ldots \cdot I_{B'B}M_{B'B'}I_{BB'} \cdot I_{B'B}M_{B'B'}I_{BB'} =$$
$$I_{B'B}M_{B'B'}M_{B'B'} \ldots M_{B'B'}M_{BB'}I_{BB'} = I_{B'B}M^{50}_{B'B'}I_{BB'}.$$

Możemy teraz obliczyć $M^{50}_{B'B'}$. To jest prostsze niż obliczyć A^{50} bo $M_{B'B'}$ jest macierzą górnotrójkątną. Więc,

$$M^{50}_{B'B'} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{50}.$$

Dwie powyższe macierze

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad i \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

spełniają, że $DN = ND$. Wobec tego

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{50} = \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{n-k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{k}.$$

Ponieważ $N^2 = 0$, to

$$M^{50}_{B'B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{50} + \binom{50}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{49} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i

$$A^{50} = \begin{pmatrix} -49 & 0 & -50 \\ -50 & 1 & -50 \\ 50 & 0 & 51 \end{pmatrix}.$$

Teraz, dana macierz H w postaci Jordana

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{n_r} \end{pmatrix}$$

i funkcja $\varphi(x)$, to

$$\varphi(H) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1)I_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(\lambda_2)I_{n_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \varphi(\lambda_r)I_{n_r} & \end{pmatrix} + \dots +$$

$$\frac{1}{n!}\begin{pmatrix} \varphi^{n)}(\lambda_1)(J_{n_1} - I_{n_1})^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi^{n)}(\lambda_2)(J_{n_2} - I_{n_2})^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi^{n)}(\lambda_r)(J_{n_r} - I_{n_r})^n \end{pmatrix}.$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ są wartościami własnymi macierzy i $n_i = \dim V_{\lambda_i}$ dla $i = 1, \dots, r$ i $\varphi^{k)}$ to pochodna k-tej funkcji φ. Korzystając z tego wzoru, to

$$\exp(M_{B'B'}) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Można łatwo zauważyć, że dla dowolnej macierzy C to

$$\exp(CM_{B'B'}C^{-1}) = C\exp(M_{B'B'})C^{-1}.$$

Więc,

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & -e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{e} & -\frac{1}{e} + e & e \\ \frac{1}{e} & -\frac{1}{e} + 2e & -\frac{1}{e} + 2e \\ -\frac{1}{e} & \frac{1}{e} - e & \frac{1}{e} - e \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Oblicz

$$A := \exp\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \log\begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązania:

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{2} & i & \frac{i}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{i}{2} & i & 1 + \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Aby rozwiązać drugą część trzeba skorzystać z własciwości funkcji logarytmu macierzy. Na przykład, dla dowolnych macierzy M i B takich, że

$$B = \log M,$$

to oznacza, że $\exp(B) = M$. Ponadto, można zauważyć, że

$$C = \log 2A \Rightarrow \exp(C) = 2A = \exp(\log 2I)A$$

Skoro $CI = IC$, to

$$\exp(C - \log 2I) = A \Rightarrow C - \log 2I = \log A \Rightarrow C = \log 2I + \log A.$$

Ponadto,

$$\log(I + C) = C - \frac{C^2}{2} + \frac{C^3}{3} - \frac{C^4}{4} + \dots$$

Trzeba zauważyć, że to nie zawsze jest dobrze zdefiniowane, zależy od promienia zbieżności szeregu. Na przykład, nie można korzystać z poprzedniego wzoru dla

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Natomiast, można dla

$$C = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Korzytając z tego,

$$\log\begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I\log 2 + \log\begin{pmatrix} 1 & i/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\log 2 + \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3 + \ldots$$

To

$$\log\begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I\log 2 + \log\begin{pmatrix} 1 & i/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\log 2 + \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log 2 & i/2 \\ 0 & \log 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4. Wyznaczyć $\exp(tA)$ oraz $\exp(tB)$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązania:

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad \exp(tB) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & -\operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

Zadanie 5. Oblicz

$$A := \sin\left(\frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right).$$

Rozwiązania

Sinus macierzy definiuje się jak zwykły sinus, czyli

$$\sin A = \frac{\exp(iA) - \exp(-iA)}{2i}.$$

Korzystając z formuły funkcji wykładniczej macierzy

$$\sin A = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iA)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iA)^n}{n!}\right) = \sum_{n \text{ nieparzysty}} \frac{i^n A^n}{n!} = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \frac{1}{7!}A^7 + \ldots.$$

Aby obliczyć $\sin A$ prowadzimy zmianę bazy. Rozumiemy A jako macierz endomorfizmu f_A w bazie kanonicznej i rozpatrujemy jej wartości i wektory własne.

$$\det(A - \lambda I) = \left|\begin{pmatrix} -\pi/2 - \lambda & -\pi \\ 3\pi/2 & 4\pi/2 - \lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 - \frac{3\pi}{2}\lambda + \frac{\pi^2}{2} = (-1)^2\lambda^2 + (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A)\lambda + (-1)^2\det A.$$

Więc, $\operatorname{spec}_{M_2(\mathbb{R})} A = \{\pi/2, \pi\}$ i wektory własne są:

$$v_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

W nowej bazie $B' = \{v_{\pi/2}, v_\pi\}$ macierz endomorfizmu f_A ma postać

$$(f_A)_{B'B'} := \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teraz przypominamy diagram zmiany bazy. Wiemy, że $f_A = I \circ f_A \circ I$ gdzie I to funkcja tożsamościowa. Jeżeli rozpatrujemy macierze tych endomorfizmów, to

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "M_{B'B'}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "I_{B'B}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "I_{BB'}"] \arrow[r, "M_{BB}"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

gdzie M_{BB} to macierz endomorfizmu f_A w bazach kanonicznych, $M_{B'B'}$ to macierz endomorfizmu f_A w bazie B' i $I_{BB'}$ to macierz zmiany bazy od B do B' i $I_{B'B}$ to macierz zmiany bazy od B' do B. Można zauważyć, że kolumny macierzy $I_{B'B}$ są obrazami elementów bazy B' we współrzędnych bazy B. Czyli

$$I_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Wówczas, $I_{B'B}$ to

$$I_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Więc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi/2 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Teraz, mamy, że

$$\sin(A) = \sin\left(I_{B'B}M_{B'B'}I_{BB'}\right) = \frac{1}{2}\left(\exp(I_{B'B}M_{B'B'}I_{BB'}) - \exp(I_{B'B}M_{B'B'}I_{BB'})\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(I_{B'B}\exp(M_{B'B'})I_{BB'} - I_{B'B}\exp(M_{B'B'})\right)I_{BB'} = I_{B'B}\sin(M_{B'B'})I_{BB'}. \quad (1)$$

Możemy obliczyć teraz $\sin(M_{B'B'})$. To jest prostsze niż obliczyć $\sin(A)$, bo $M_{B'B'}$ to macierz górnotrójkątna. Więc,

$$\sin\begin{pmatrix} \pi/2 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} - \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} \pi/2 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} \pi/2 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}^4 + \ldots = \begin{pmatrix} \sin\pi/2 & 0 \\ 0 & \sin\pi \end{pmatrix}.$$

Wobec tego

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \sin\begin{pmatrix} \pi/2 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$