Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXV, 13 V 2013 r.

Zadanie 1. Udowodnij że sprzężenie hermitowskie * ma następujące własności:

a) $\forall\, f \in \mathrm{End}(V) : f^{**} = f$,

b) $\forall\, f \in \mathrm{End}(V),\ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$,

c) $\forall\, f, g \in \mathrm{End}(V) : (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Rozwiązanie: Niech $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie bazą przestrzeni V. Możemy zapisać

$$f(e_i) = \sum_k f_{ki} e_k, \qquad f^*(e_i) = \sum_k f^*_{ki} e_k, \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

w tej bazie.

- Dowód części a)

  Metoda a: Z definicji sprzężonego operatora f^* operatora f, wynika, że $f^*(e_i) = \sum_k \bar{f}_{ik} e_k$. Korzystając z tego i (1), wynika, że

  $$f^*_{ki} = \bar{f}_{ik}, \qquad\qquad i, j \in \mathbb{N}.$$

  Z tego $f^{**}_{ki} = \overline{f^*_{ik}} = \overline{\overline{f}_{ki}} = f_{ki}$ dla każdych $i, j \in \mathbb{N}$. Wówczas $f^{**} = f$.

  Metoda b:

  Równoważnie, mamy że

  $$\langle f e_1 \mid e_2 \rangle = \langle e_1 \mid f^* e_2 \rangle = \langle f^{**} e_1 \mid e_2 \rangle$$

  dla wszystkich $e_1, e_2 \in V$. Więc,

  $$\langle f e_1 | e_2 \rangle = \langle f^{**} e_1 | e_2 \rangle, \qquad e_1, e_2 \in V.$$

  Z tego, mamy, że $\langle (f - f^{**}) e_1 \mid e_2 \rangle = 0$ dla każdego $e_2 \in V$. Więc, dla $e_2 = (f - f^{**}) e_1$ to

  $$\langle (f - f^{**}) e_1 \mid (f - f^{**}) e_1 \rangle = 0 \Rightarrow (f - f^{**}) e_1 = 0 \ (\forall e_1 \in V) \Rightarrow f = f^{**}.$$

- W drugim przypadku

  $$(\lambda f)^*_{ki} = \overline{\lambda f}_{ik} = \bar{\lambda} \overline{f}_{ik} = \bar{\lambda} f^*_{ki}, \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

  Wówczas $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$. Równoważnie

  $$\langle e_1 \mid \bar{\lambda} f^* e_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle e_1 \mid f^* e_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle f e_1 \mid e_2 \rangle = \langle \lambda f e_1 \mid e_2 \rangle = \langle e_1 \mid (\lambda f)^* e_2 \rangle, \qquad \forall e_1, e_2 \in V.$$

  Z tego, mamy, że $(\lambda f)^* e_2 = \bar{\lambda} f e_2$ dla każdego $e_2 \in V$, czyli $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$.

- W trzecim przypadku, dla dowolnych $k, i \in \mathbb{N}$,

  $$(f \circ g)^*_{ki} = \overline{f \circ g}_{ik} = \sum_l \overline{f_{il} g_{lk}} = \sum_l \overline{f_{il}}\, \overline{g_{lk}} = \sum_l f^*_{li} g^*_{kl} = (g^* \circ f^*)_{ki} \Rightarrow (f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

  Równoważnie

  $$\langle e_1 \mid (f \circ g)^* e_2 \rangle = \langle (f \circ g) e_1 \mid e_2 \rangle = \langle g e_1 \mid f^* e_2 \rangle = \langle e_1 \mid g^* \circ f^* e_2 \rangle, \qquad \forall e_1, e_2 \in V.$$

  Wówczas $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Uwaga 1. Czasami f^* definiuje się jako operator taki, że $\langle e_1 \mid fe_2\rangle = \langle f^*e_1 \mid e_2\rangle$ dla dowolnych $e_1, e_2 \in V$. W takim przypadku, f^* nie jest jednoznacznie zdefiniowany. Można zagwarantować, że istnieje tylko jeden f^*, gdy $\dim V < \infty$. Ponadto, jeżeli korzystamy z poprzedniej definicji, nie trzeba korzystać z bazy ortonormalnej, aby zdefiniować f^*.

Natomiast, nasza definicja operatora f^* jest oparta na istnieniu bazy ortonormalnej. Ortonormalizacja Grama-Schmidta i aksjomat wyboru pozwala nam twierdzić, że każda przestrzeń liniowa ma ortonormalną bazę. Ponadto, nasza definicja jest niezależna od bazy wykorzystanej do zdefiniowania f^* i z niej wynika, że $\langle fe_1 \mid e_2\rangle = \langle e_1 \mid f^*e_2\rangle$.

Zadanie 2. Niech $V := \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{C}$ będzie zespoloną przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym względem którego baza kanoniczna $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest bazą ortonormalną. Oblicz sprzężenie hermitowskie endomorfizmu $s \in \mathrm{End}(V)$ zadanego wzorem $\forall\ i \in \mathbb{N}$: $s(e_i) = e_{i+1}$. Pokaż że endomorfizm ss^* jest samosprzężonym idempotentem (projekcją). Podaj przykład endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ który jest normalny, ale nie jest ani hermitowski ani unitarny, i którego macierz w bazie kanonicznej nie jest diagonalna.

Rozwiązanie: Z definicji operatora s wynika, że jeżeli piszemy

$$s(e_i) = \sum_k s_{ki}e_k, \qquad i \in \mathbb{N},$$

to

$$s(e_i) = \sum_k s_{ki}e_k = e_{i+1}, \qquad \forall i \in \mathbb{N},$$

i $s_{ki} = \delta_k^{i+1}$ dla $k, i \in \mathbb{N}$. Korzystając z definicji operatora s^*, mamy, że $s^*_{ij} = \overline{s_{ji}}$. Więc,

$$s^*_{ij} = \overline{s_{ji}} = \overline{\delta_j^{i+1}} = \delta_{j-1}^{i}, \qquad i = 2, 3, \ldots.$$

Gdy $i = 1$, to $s^*_{ij} = 0$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$.

Łatwo widać, że s^*s jest samosprzężony. Właśnie $(ss^*)^* = s^{**}s^* = ss^*$. Ponadto

$$(ss^*ss^*)(e_i) = (s^*ss^*)e_{i-1} = (ss^*)e_i, \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

i

$$(ss^*ss^*)(e_1) = 0 = (ss^*)e_1.$$

Więc, $ss^*ss^* = ss^*$ i ss^* jest samosprzężony i idempotentem, czyli jest projekcją.

Teraz będziemy konstruować macierz normalną która, nie jest ani hermitowska ani unitarna. Aby to zrobić, korzystamy z pewnej niediagonalnej macierzy unitarnej U takiej, że U^2 nie jest proporcjonalna do I. To łatwo znaleźć. Wiemy, że $UU^* = U^*U = Id$. Więc, mnożąc przez liczbę zespoloną λ taką, że $|\lambda| \notin \{0, 1\}$, to

$$\lambda U(\lambda U)^* = |\lambda|^2 UU^* = |\lambda|^2 U^*U = (\lambda U)^*\lambda U.$$

Więc, λU jest normalną macierzą. Skoro $(\lambda U)(\lambda U)^* \neq I$, macierz λU nie jest unitarną. Skoro U^2 nie jest proporcjonalna do I, to U nie jest hermitowska (w takim przypadku $U^2 = UU^* = I$). Więc, λU też nie jest hermitowska. Korzystając z tego, możemy z jednej takiej U, np.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

skontruować przedmiotową macierz mnożąc przez liczbę zespoloną której moduł jest różny od zera i jednego, np.

$$\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 2i\sin\theta \\ 2i\sin\theta & 2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ta macierz jest normalna, ale nie jest ani unitarna ani hermitowska.

Zadanie 3. Niech f będzie endomorfizmem hermitowskim. Udowodnij że, jeżeli v_1 i v_2 są wektorami własnymi f odpowiadającymi różnym wartościom własnym, to $\langle v_1 \mid v_2\rangle = 0$.

Rozwiązanie: Najpierw, pamietamy, że wartości własne macierzy hermitowskiej są liczbami rzeczywistymi. Właśnie, jeżeli v_1 to wektor własny z wartością własną λ_1, to

$$\bar{\lambda}_1\langle v_1 \mid v_1\rangle = \langle \lambda_1 v_1 \mid v_1\rangle = \langle f v_1 \mid v_1\rangle = \langle v_1 \mid f v_1\rangle = \langle v_1 \mid \lambda_1 v_1\rangle = \lambda_1\langle v_1 \mid v_1\rangle.$$

Więc, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$ i $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Ponadto, jeżeli v_2 to wektor własny z wartością własną $\lambda_2 \neq \lambda_1$, to

$$\lambda_1\langle v_1 \mid v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1 \mid v_2\rangle = \langle f v_1 \mid v_2\rangle = \langle v_1 \mid f v_2\rangle = \langle v_1 \mid \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1 \mid v_2\rangle.$$

Więc, $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1 \mid v_2\rangle = 0$ i $\langle v_1 \mid v_2\rangle = 0$.

Trzeba zauważyć, że jeżeli v_1 i v_2 mają tą samą wartością własną, nie zawsze $\langle v_1 \mid v_2\rangle = 0$. Na przykład, dana macierz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

endomorfizmu $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ w bazie ortonormalnej $\{e_1, e_2, e_3\}$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$ wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny, widać, że f jest odwzorowaniem hermitowskim. Właśnie, $\overline{M_{ij}} = M_{ji}$ dla $i, j = 1, 2, 3$. Ponadto, wektory

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mają wartość własną 1. Natomiast, nie są ortonormalne

$$\langle v_1 \mid v_2\rangle = \bar{0}\cdot(-1) + \bar{0}\cdot i + \bar{1}\cdot 1 = (0,0,1)\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Zadanie 4. Niech V będzie zespoloną przestrzenią wektorową z bazą ortonormalną $\{e_k\}_{k\in I}$. Udowodnij że każdy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ da się jednoznacznie zapisać w postaci $f = f_1 + i f_2$, gdzie $f_1^* = f_1$ i $f_2^* = f_2$.

Rozwiązanie: Dany endomorfizm f mamy, że

$$f = \frac{f + f^*}{2} + i\frac{f - f^*}{2i}.$$

Widać, że

$$f_1 = \frac{f + f^*}{2}, \qquad f_2 = \frac{f - f^*}{2i}$$

spełniają, że

$$f_1^* = \frac{f^* + f^{**}}{2} = \frac{f^* + f}{2} = f_1, \qquad f_2^* = \frac{f^* - f^{**}}{-2i} = \frac{f - f^*}{2i} = f_2.$$

Zadanie 5. Niech $C_0^\infty([0,1], \mathbb{C})$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji gładkich $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ takich, że

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(0) = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(1) = 0, \qquad k \in \mathbb{N},$$

wyposażoną w iloczyn skalarny:

$$\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Wykaż, że odwzorowanie

$$D : C_0^\infty([0,1],\mathbb{C}) \ni f \mapsto -i\frac{df}{dx} \in C_0^\infty([0,1],\mathbb{C})$$

jest odwzorowaniem hermitowskim.

Rozwiązanie: Dane funkcje $f, g \in C_0^\infty([0,1],\mathbb{C})$ mamy, że

$$\langle f \mid Dg\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} \left(-i\frac{dg}{dx}(x)\right) dx = -i[f(x)g(x)]_0^1 + \int_0^1 i\frac{d\bar{f}}{dt}(x)g(x)dx =$$

$$\int_0^1 \overline{\left(-i\frac{df}{dt}(x)\right)} g(x)dx = \langle Df \mid g\rangle.$$

Więc, D jest operatorem hermitowskim.

Uwaga 2. Można zauważyć, że D jest dobrze zdefiniowany, bo Df spełnia, że wszystkie jego pochodne na brzegu zerują się.

Zadanie 6. W przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym odwzorowanie $H \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ w bazie kanonicznej jest zadane macierzą

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdź, że H jest odwzorowaniem hermitowskim. Pokaż, że w $\mathbb{C}^3$ istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych H. Sprawdź, że macierz przejścia od bazy kanonicznej do tej bazy wektorów własnych jest unitarna.

Rozwiązanie: Baza kanoniczna przestrzeni $\mathbb{C}^3$ wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny jest bazą ornormalną. Więc, aby zauważyć, że H jest operatorem hermitowskim wystarczy sprawdzić, że $H_{ij} = \bar{H}_{ji}$ dla $i, j = 1, 2, 3$.

Teraz, będziemy szukać wartości własnych za pomocą wielomianu charakterystycznego:

$$p_H(\lambda) = \det \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & i & 1 \\ -i & 1-\lambda & i \\ 1 & -i & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4.$$

Możemy szukać pierwiastków postaci dzielników -4. Właśnie, widać, że $\mathrm{spec}_{\mathrm{End}(\mathbb{C}^3)} H = \{2, -1\}$. Teraz, wektory własne z wartością własną 2 to

$$\ker(H - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ -i & -1 & i \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Natomiast

$$\ker(H + I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Z tego, możemy zbudować ortonormalną bazę wektorów własnych

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Widać, że macierz przejścia bazy, czyli

$$M_{B'B} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & i & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & i\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

jest unitarna.