Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXVI, 20 V 2013 r.

Zadanie 1. Niech V będzie *dowolną* zespoloną przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym dopuszczającym bazę ortonormalną. Udowodnij że macierz przejścia z jednej bazy ortonormalnej do drugiej musi być zawsze unitarna.

Rozwiązanie: Niech $B = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $B' = \{e'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będą bazami ortonormalnymi. Mamy, że

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j \in \mathbb{N}.$$

Macierz prejścia U z bazy B do B' to macierz identyczności w bazach B i B'. Więc $e_i = \sum_j U_{ji} e'_j$ dla każdej $i \in \mathbb{N}$. Z tego, dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ wynika, że

$$\delta_{ij} = \langle e_i \mid e_j \rangle = \left\langle \sum_l U_{li} e'_l \mid \sum_k U_{kj} e'_k \right\rangle = \sum_l \sum_k \overline{U}_{li} U_{kj} \langle e'_l \mid e'_k \rangle =$$
$$= \sum_l \sum_k \overline{U}_{li} U_{kj} \delta_{lk} = \sum_l \overline{U}_{li} U_{lj} = U^*_{il} U_{lj} = (U^* U)_{ij}.$$

Więc, $U^*U = \mathrm{Id}$. To oznacza, że $U^* = U^{-1}$ i $UU^* = \mathrm{Id}$. Wówczas, U jest unitarna.

Zadanie 2. Podaj bazę ortonormalną podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{C}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym generowanej przez wektory

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Aby podać bazę ortonormalną przestrzeni zgenerowanej przez v_1, v_2, v_3, najpierw musimy ustalić, który wektory są liniowo niezależne. W naszym przypadku, v_1, v_2 i v_3 są liniowo niezależny. Aby to sprawdzić, wystarczy obliczyć rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aby zauważyć, że rząd jest równy trzy. Właśnie, widać, że

$$\begin{vmatrix} i & -i & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = i \neq 0.$$

Teraz, stosujemy metodę Grama Schmidta na e_1, e_2 i e_3. Wybramy dowolny wektor, np. v_3, i sprawdzamy jego normę. Jeżeli jest różna od jeden, to musimy podzielić przez tą normę. W naszym przypadku,

$$\|v_3\| = \sqrt{\langle v_3 \mid v_3 \rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}.$$

Więc, v_3 nie jest unormowany i zdefiniujemy nowy wektor

$$\widetilde{v}_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

który jest unormowany. A jeszcze v_2 i v_1 nie są ani unormowane ani ortogonalne do v_3. Aby znaleźć unormowane wektory ktory zgenerują taką samą podprzestrzeń jak v_1, v_2 i v_3, zmienimy teraz v_2 do

$$\widetilde{v}_2 = \frac{v_2 - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_2 \rangle \widetilde{v}_3}{\|v_2 - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_2 \rangle \widetilde{v}_3\|}.$$

Widać, że $\widetilde{v}_2$ jest ortogonalne do $\widetilde{v}_3$:

$$\langle \widetilde{v}_3 \mid \widetilde{v}_2 \rangle = \frac{\langle \widetilde{v}_3 \mid v_2 \rangle - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_2 \rangle \langle \widetilde{v}_3 \mid \widetilde{v}_3 \rangle}{\|v_2 - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_2 \rangle \widetilde{v}_3\|} = 0.$$

W naszym przypadku $\langle \widetilde{v}_3 \mid v_2 \rangle = \sqrt{2}$, wówczas

$$\widetilde{v}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_2 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_2 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Widać, że $\langle \widetilde{v}_2 \mid \widetilde{v}_3 \rangle = 0$ i $\langle \widetilde{v}_2 \mid \widetilde{v}_2 \rangle = 1$. Natomiast, v_3 nie jest ani ortogonalne do $\widetilde{v}_2$ i $\widetilde{v}_3$ ani unormowany. Aby podać nowy wektor $\widetilde{v}_3$ spełniający takie właściwości piszemy

$$\widetilde{v}_1 = \frac{v_1 - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_1 \rangle \widetilde{v}_3 - \langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle \widetilde{v}_2}{\|v_1 - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_1 \rangle \widetilde{v}_3 - \langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle \widetilde{v}_2\|}.$$

Jak wczesniej, widać, że $\widetilde{v}_1$ jest jednostkowy. Ponadto, jest ortogonalne do $\widetilde{v}_2$ i $\widetilde{v}_3$, np.

$$\langle \widetilde{v}_2 \mid \widetilde{v}_1 \rangle = \frac{\langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_1 \rangle \langle \widetilde{v}_2 \mid \widetilde{v}_3 \rangle - \langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle \langle \widetilde{v}_2 \mid \widetilde{v}_2 \rangle}{\|v_1 - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_1 \rangle \widetilde{v}_3 - \langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle \widetilde{v}_2\|} = \frac{\langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle - \langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle \langle \widetilde{v}_2 \mid \widetilde{v}_2 \rangle}{\|v_1 - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_1 \rangle \widetilde{v}_3 - \langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle \widetilde{v}_2\|} = 0.$$

Podobnie $\langle \widetilde{v}_3 \mid \widetilde{v}_1 \rangle = 0$. Obliczmy $\widetilde{v}_1$. W naszym przypadku, $\langle \widetilde{v}_3 \mid v_1 \rangle = \sqrt{2}$ i $\langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle = -1$, więc

$$\widetilde{v}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_1 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \widetilde{v}_3 \mid v_1 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \widetilde{v}_2 \mid v_1 \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}$$

Wówcas

$$\widetilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i szukana baza to

$$\widetilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Wektor $\epsilon_1 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ uzupełnij do bazy ortonormalnej $\mathbb{C}^3$.

Rozwiazanie: Aby rozwiązać problem, będziemy podać bazę $\mathbb{C}^3$ zawierającą ϵ_1 i ortonormalizamy korzystając za pomocą metody Grama Schmidta. Na przykład, rozpatrywamy bazę

$$\epsilon_1 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jak w poprzednim zadaniu, sprawdzamy normę jednego wektora, np. ϵ_1. Widać, że $\|\epsilon_1\| = 1$. Więc, nie trzeba nic zrobić. Teraz, sprawdzamy, czy ϵ_2 jest ortonormalny do ϵ_1, jeżeli nie jest ortogonalne, korzystamy z metody Grama Schmidta aby ortonormalizować. Widać, że ϵ_2 nie jest ortogonalne do ϵ_1, właśnie $\langle \epsilon_2 \mid \epsilon_1 \rangle = \sqrt{2/3}$. Więc, ortonormalizujemy ϵ_2 na względu ϵ_1, czyli

$$\widetilde{\epsilon}_2 = \frac{\epsilon_2 - \langle \epsilon_1 \mid \epsilon_2 \rangle \epsilon_1}{\|\epsilon_2 - \langle \epsilon_1 \mid \epsilon_2 \rangle \epsilon_1\|}.$$

Więc,

$$\widetilde{\epsilon}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1/3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1/3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Więc, $\widetilde{\epsilon}_2$ już jest ortogonalne do ϵ_1. Ponadto, widać, że jest unormowany, tj. $\|\widetilde{\epsilon}_2\| = \sqrt{\langle \widetilde{\epsilon}_2 \mid \widetilde{\epsilon}_2 \rangle} = 1$. Teraz, ortonormalizujemy ϵ_3 na względu $\widetilde{\epsilon}_1$ i $\widetilde{\epsilon}_2$, czyli

$$\widetilde{\epsilon}_3 = \frac{\epsilon_3 - \langle \widetilde{\epsilon}_2 \mid \epsilon_3 \rangle \widetilde{\epsilon}_2 - \langle \epsilon_1 \mid \epsilon_3 \rangle \epsilon_1}{\|\epsilon_3 - \langle \widetilde{\epsilon}_2 \mid \epsilon_3 \rangle \widetilde{\epsilon}_2 - \langle \epsilon_1 \mid \epsilon_3 \rangle \epsilon_1\|}.$$

Skoro $\langle \epsilon_1 \mid \epsilon_3 \rangle = 1/\sqrt{6}$ i $\langle \widetilde{\epsilon}_2 \mid \epsilon_3 \rangle = -1/\sqrt{3}$ to

$$\widetilde{\epsilon}_3 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podsomując, szukana baza, to

$$\epsilon_1 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\epsilon}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4. Dane są dwie macierze zespolone:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Pokaż że A i B są diagonalizowalne i każdy z nich ma bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych.

ii) Zbadaj czy A i B mają wspólne wektory własne.

iii) Sprawdź czy endomorfizm $C = A + i\,B$ jest normalny.

Rozwiązanie: Z prostego obliczenia wynika, że A ma wartości własne 6 i 3 i przestrzeni własne

$$V_6 = \left\langle v_6^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_6^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V_3 = \left\langle v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ponadto, widać, że

$$V_6 = \ker(A - 7\mathrm{Id})$$

i mamy bazę wektorów własnych. Takie wektory nie muszą otworzyć bazy ortonormalnej. Tylko możemy zgwarantować, że wektory własny z róznimy wartosciami własnymi są ortogonalne, czyli

$$\langle v_6^1 \mid v_3 \rangle = \langle v_6^2 \mid v_3 \rangle = 0.$$

Z tej bazę możemy stworzyć bazę ortogonalną. Wystarczy skonstruować bazę ortonormalną przestrzeni V_6 i znormalizować v_3. Znormalizowanie wektora v_3 jest proste:

$$\widetilde{v}_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{v_3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Natomiast, możemy tworzec ortonormalną bazę V_6 za pomocą metody Grama Schmidta, tj.

$$\widetilde{v}_6^2 = \frac{v_6^2}{\|v_6^2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i

$$\widetilde{v}_6^1 = \frac{v_6^1 - \langle \widetilde{v}_6^2 \mid v_6^1 \rangle \widetilde{v}_6^2}{\|v_6^1 - \langle \widetilde{v}_6^2 \mid v_6^1 \rangle \widetilde{v}_6^2\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Szukana bazę wektorów własnych A to

$$\widetilde{v}_6^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{v}_6^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Natomiast, B ma wartości własne -7 i 7 i przestrzeni własne

$$V_{-7} = \left\langle v_{-7}^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{-7}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V_7 = \left\langle v_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ponadto, widać, że

$$V_{-7} = \ker(A + 7\mathrm{Id})$$

i mamy bazę wektorów własnych. Jak wczeniej, takie wektory nie muszą otworzyć bazy ortonormalnej. Tylko możemy zgwarantować, że wektory własny z róznimy wartosciami własnymi są ortogonalne, czyli

$$\langle v_{-7}^1 \mid v_7 \rangle = \langle v_{-7}^2 \mid v_7 \rangle = 0.$$

Z tej bazę możemy stworzyć bazę ortogonalną. Wystarczy skonstruować bazę ortonormalną przestrzeni V_{-7} i znormalizować v_7. Znormalizowanie v_7 daje:

$$\widetilde{v}_7 = \frac{v_7}{\|v_7\|} = \frac{v_7}{\sqrt{14}}.$$

Natomiast, możemy tworzec ortonormalną bazę V_{-7} za pomocą metody Grama Schmidta, tj.

$$\widetilde{v}_{-7}^2 = \frac{v_{-7}^2}{\|v_{-7}^2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i

$$\widetilde{v}_{-7}^1 = \frac{v_{-7}^1 - \langle \widetilde{v}_{-7}^2 \mid v_{-7}^1 \rangle \widetilde{v}_{-7}^2}{\|v_{-7}^1 - \langle \widetilde{v}_{-7}^2 \mid v_{-7}^1 \rangle \widetilde{v}_{-7}^2\|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Więc, szukana baza to

$$\widetilde{v}_{-7}^1 = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{v}_{-7}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_7 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aby sprawdzić, czy A i B mają wspólne wektory własne, trzeba sprawdzić, czy $V_{-7} \cap V_3$ albo $V_7 \cap V_3$ albo $V_6 \cap V_7$ albo $V_6 \cap V_{-7}$ mają niezerowe elementy. Łatwo sprawdzyc, że

$$V_{-7} \cap V_3 = \{0\},\ V_7 \cap V_3 = \{0\},\ V_6 \cap V_7 = \{0\},\ V_6 \cap V_{-7} = \langle (1, -2, 1)^T \rangle.$$

Wówczas, jedyny wspólny wektor własny, to $(1, -2, 1)^T$.

Abi sprawdzyc, czy $C = A + iB$ jest macierzą normalną wystarczy widać, że

$$CC^* - C^*C = (A + iB)(A^* - iB^*) - (A^* - iB^*)(A + iB) \neq 0.$$

Własnie, skoro $A^* = A$ i $B^* = B$, to

$$CC^* - C^*C = (A + iB)(A - iB) - (A - iB)(A + iB) = i2(BA - AB) = 2i[B, A].$$

Skoro $[B, A] \neq 0$, to $A + iB$ to nie macierz normalna.

Zadanie 5. Znajdź wszystkie macierze normalne w $M_2(\mathbb{C})$.

Rozwiązanie: Każda macierz normalna jest diagonalizowalna i macierz przejścia do bazy ortonormalnej jest unitarna. Z tego, każda macierz normalna $A \in M_2(\mathbb{C})$ ma postać

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^*$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Pondato, każda macierz tej postaci jest macierz normalną:

$$AA^* = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_2 \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & 0 \\ 0 & |\lambda_2|^2 \end{pmatrix} U^*$$

i

$$A^*A = U \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_2 \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & 0 \\ 0 & |\lambda_2|^2 \end{pmatrix} U^*$$

Więc, możemy obliczyć wszystkie macierzy normalne jeżeli możemy ustalić wszystkie macierzy unitarny. To łatwe, jeżeli piszemy

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

to

$$UU^* = \mathrm{Id} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oznacza, że

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \qquad ac^* + bd^* = 0, \qquad a^*c + b^*d = 0, \qquad |c|^2 + |d|^2 = 1.$$

Mówiąc innaczej, $(a, b)^T$ i $(c, d)^T$ tworzą układ wektorów ortonormalnych. Dany dowolny unormowany wektor $(a, b)^T$, wektor ortogonalny ma postac $\lambda(b^*, -a^*)^T$, gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$. Skoro $|a|^2 + |b|^2 = 1$, to $\lambda(b^*, -a^*)^T$ jest unormowany gdy $1 = |\lambda|^2(|a^*|^2 + |b^*|^2) = |\lambda|^2(|a|^2 + |b|^2) = |\lambda|^2$. Wówczas, $|\lambda| = 1$,

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* e^{i\theta} & a^* e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

i macierzy normalne mają postac

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* e^{i\theta} & a^* e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & -be^{-i\theta} \\ b^* & ae^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 6. W przestrzeni rzeczywistych funkcji wielomianowych generowanej przez 1, x, x^2, z iloczynem skalarnym danym przez $\langle f|g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, skonstruuj bazę ortonormalną.

Rozwiązanie: Dana baza

$$B = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\},$$

korzystamy z metody Grama Schmidta, aby obliczyć bazę ortonormalną. Zaczynając z e_1, widać, że

$$\langle e_1 \mid e_1\rangle = 2.$$

Więc, e_1 nie jest unormowany i musimy zdefiniować

$$\widetilde{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}.$$

Teraz, skoro $\langle \widetilde{e}_1 \mid e_2\rangle = 0$, to e_2 już jest ortogonalny do $\widetilde{e}_1$. Więc, po prostu trzeba unormalizować go, czyli $\widetilde{e}_2 = e_2/\|e_2\| = \sqrt{3/2}e_2 = \sqrt{3/2}x$. Równoważnie, można korzystać też ze formuły

$$\widetilde{e}_2 = \frac{e_2 - \langle \widetilde{e}_1 \mid e_2\rangle \widetilde{e}_1}{\|e_2 - \langle \widetilde{e}_1 \mid e_2\rangle \widetilde{e}_1\|} = \frac{x - 1/2\langle 1 \mid x\rangle}{\|x - 1/2\langle 1 \mid x\rangle\|} = \sqrt{3/2}x.$$

Na końcu,

$$\widetilde{e}_3 = \frac{e_3 - \langle \widetilde{e}_1 \mid e_3 \rangle \widetilde{e}_1 - \langle \widetilde{e}_2 \mid e_3 \rangle \widetilde{e}_2}{\| e_2 - \langle e_1 \mid e_2 \rangle e_1 \|} = \frac{x^2 - 1/2\langle 1 \mid x^2 \rangle - \sqrt{3/2}\langle x \mid x^2 \rangle x}{\| x^2 - 1/2\langle 1 \mid x^2 \rangle - \sqrt{3/2}\langle x \mid x^2 \rangle x \|} = \frac{x^2 - 1/2\langle 1 \mid x^2 \rangle}{\| x^2 - 1/2\langle 1 \mid x^2 \rangle \|},$$

gdzie korzystaliśmy z $\langle x \mid x^2 \rangle = 0$. Wówczas,

$$\widetilde{e}_3 = \frac{x^2 - 1/3}{\| x^2 - 1/3 \|} = \frac{2}{3}\sqrt{5/2}(x^2 - 1/3).$$

Szukana baza to

$$\widetilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \widetilde{e}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \qquad e_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}(x^2 - 1/3).$$