Odwzorowania transponowane, wyznaczniki i ślad

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Dane odwzorowanie $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ postaci

$$[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

w bazie kanonicznej $\mathcal{E}$, sprawdź, że $[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = ([F^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{E}^*})^T$ dla bazy

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}.$$

Ćwiczenie 2. Niech $F : E \to E$ będzie odwzorowaniem liniowym takim, że $F^2 = F$ i $\dim E < \infty$. Udowodonij, że istnieje taka baza $\mathcal{E}$ dla której $[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ ma postać

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right].$$

Ćwiczenie 3. Kommutator macierzy przestrzeni wektorowej $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ to

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A, \qquad A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Udowodnij, że odwzorowanie $b : (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto [A, B] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ to odwzorowanie biliniowe alternujące spełniające

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]], \qquad \text{identyczność Jacobiego},$$

dla dowolnych $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Mówi się wtedy, że $(M_n(\mathbb{C}), [\cdot, \cdot])$ to algebra Liego. Ustal, że $\mathrm{Tr}[A, B] = 0$ dla dowolnych macierzy A, B. Udowodnij, że z tego wynika, że zbiór macierzy bezśladowych z działaniem b jest algebrą Liego. Czy to jest też prawda: a) dla macierzy symetrycznych $A = A^T$, b) dla macierzy antysymetrycznych $A = -A^T$.

Ćwiczenie 4. Dane odwzorowanie $F : E \to E$, gdzie E to przestrzeń liniowa skończonego wymiaru, wiemy, że

$$\det F = \det[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}, \qquad \operatorname{Tr} F = \operatorname{Tr}[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$$

dla dowolnej bazy $\mathcal{B}$. Udowodnij, że $\det F$ i $\operatorname{Tr} F$ są dobrze zdefiniowane (czyli niezależne od bazy).