Układy równań i ostatnie rzeczy

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. W zależności od wartości parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań

$$\begin{bmatrix} 3a-1 & 2a & 3a+1 \\ 2a & 2a & 3a+1 \\ a+1 & a+1 & 2a+2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

Ćwiczenie 2. Znaleźć, jeżeli to możliwe, odwrotność macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3. Pokazać, że jeśli $A \in M_n(\mathbb{C})$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$, to równanie $A(z) = \lambda \bar{z}$ ma niezerowe rozwiązanie $z \in \mathbb{C}^n$ wtedy i tylko wtedy gdy $A\bar{A} - |\lambda|^2 \mathrm{Id}$, gdzie $\bar{A}$ ma elementy $\bar{a}_{ij} = \overline{a_{ij}}$, jest osobliwa.

Ćwiczenie 4. Wykazać, że jeśli macierz kwadratowa i odwracalna A ma własność: suma elementów każdego wiersza jest taka sama, to tę samą własność ma macierz odwrotna A^{-1}.

Ćwiczenie 5. Obliczyć ślad i wyznacznik operatora $F \in \mathrm{End}V$, jeżeli $V = \mathbb{K}_n[t], a \in \mathbb{K}$, natomiast F ma następującą postać:

- $Fw(t) = w'(t)$,
- $Fw(t) = tw'(t) + aw(t)$,
- $Fw(t) = w'(t) + aw(t)$,

Ćwiczenie 6. Niech $F : E \to E$ będzie operatorem nilpotentnym, czyli $T^{n_0} = 0$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$, na przestrzeni wektorowej E skończonego wymiaru. Udowodnij, że $\mathrm{Tr}\, T = 0$ i $\det T = 0$.

Ćwiczenie 7. Oblicz

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$$

dla dowolnych $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{C}$.