ALGEBRA I R

Dodatkowe zadania II

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Udowodnij, że

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} : \quad \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} k} = 0\,.$$

Ćwiczenie 2. Udowodnij, że:

$$a)\ \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}, \qquad b)\ \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi k}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

Ćwiczenie 3. Wykazać, że odwzorowanie homograficzne

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (ad - bc = 1), \qquad z \in \mathbb{C},$$

odwzorowuje prostą rzeczywistą na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b, c, d są rzeczywiste.

Ćwiczenie 4. Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równania $|z+i| + |z-i| = 2$.

Ćwiczenie 5. Niech $f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f(u) = \frac{2u}{u^2 - 4u + 1}\,.$$

Znajdź zbiór wszystkich wartości funkcji f.

Ćwiczenie 6. Wykaż, że $\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

a) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)},$

b) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{1}{2}nx \sin\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x}.$

Ćwiczenie 7. Oblicz

$$\sqrt[3]{2 - 3i + \sqrt{2-4i}}, \qquad \sqrt[4]{-7-24i}.$$

Ćwiczenie 8. *Rozszerzoną płaszczyzną zespoloną* nazywa się płaszczyznę zespoloną z dołączonym ,,punktem w nieskończoności" ∞. Wykazać, że jeżeli (z_1, z_2, z_3) i (w_1, w_2, w_3) są dwiema trójkami parami różnych punktów rozszerzonej płaszczyzny zespolonej, to istnieje odwzorowanie homograficzne

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0,$$

przeprowadzające pierwszą z tych na drugą.

Ćwiczenie 9. Rozwiąż równanie $z^5 + 40z^2 - 69z + 108 = 0$. Wsk: Skorzystać z tego, że wielomian o rzeczywistych współczynnikach można napisać jako mnożenie wielomianów aż do drugiego stopnia.

Ćwiczenie 10. Udowodnij, że $\cos(2\pi/7)$ jest pierwiastkiem wielomianu $8z^3+4z^2-4z-1$.

Ćwiczenie 11. Podaj przykład wielomianu nad $\mathbb{Z}_5$ którego funkcja wielomianowa jest zerem.

Ćwiczenie 12. Dla których wartości p następujące wektory

$$\begin{bmatrix} p \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ p \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.

Ćwiczenie 13. Dla każdego z poniższych podzbiorów W przestrzeni liniowej V sprawdzić czy spełnia on definicję podprzestrzeni:

a) $W := \{(x_1, x_2) \in V \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$;

b) $W := \{(x_1, x_2) \in V \,|\, x_1 = 0 \text{ lub } x_2 = 0\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$;

c) $W := \{(x_1, x_2) \in V \,|\, |x_1| - |x_2| = 1\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$;

d) $W := \{(x_1, x_2) \in V \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$;

e) $W := \{w \in V : \; w' = 2w \}$, gdzie V to przestrzeń wielomianów o współczynnikach rzeczywistych aż do stopnia n i w' oznacza pochodną wielomianu w.

Ćwiczenie 14. Sprawdź liniową niezależność następujących wektorów w przestrzeni liniowej wielomianów. Jeżeli są liniowo zależne to zredukuj system do liniowo niezależnego.

$$\begin{aligned} v_1 &= x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \\ v_2 &= x^3 + 3x^2 + 4x + 5, \\ v_3 &= x^2 + 2x^2 + 3x + 3, \\ v_4 &= x^3 + 2x^2 + 3x. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 15. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^4$, gdzie V_1 jest rozpięta przez wektory

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a V_2 przez wektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni $V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2$.

Ćwiczenie 16. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^4$, gdzie V_1 jest rozpięta przez wektory

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

a V_2 jest opisana układem równań

$$U_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni $V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2$.

Ćwiczenie 17. Niech $v_1 = (3, 2, 1, 2)$, $v_2 = (9, 6, 3, 6)$, $v_3 = (6, 6, 6, 5)$ i $v_4 = (6, 8, 10, 6)$. Czy wektor $u = (1, 2, 3, 4)$ jest kombinacją liniową wektorów $\{v_i\}_{i=1,\dots,4}$?

Ćwiczenie 18. Dana przestrzeń $\mathbb{R}^4$ i podprzestrzenie

$$V_1 = \langle (1,0,1,0), (1,1,1,1), (3,2,3,2) \rangle, \qquad V_2 = \langle (2,3,4,5), (1,2,3,0) \rangle.$$

Oblicz bazy V_1, V_2 i ich wymiary. Oblicz $V_1 + V_2$ i $V_1 \cap V_2$. Czy $V_1 \oplus V_2$? W takim przypadku oblicz rzutowanie wektora $(1,2,3,0)$ na V_1 równolegle do V_2.

Ćwiczenie 19. Czy przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (x_1+2)^2 - x_1 - x_3 - 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \end{pmatrix},$$

jest przekształceniem liniowym?

Ćwiczenie 20. Określ wymiar i znajdź bazy podprzestrzeni w $\mathbb{R}^5$ zadanych przez układy równań:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Ćwiczenie 21. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^4$ opisanymi układami równań liniowych odpowiednio U_1 i U_2:

$$U_1 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \quad U_2 : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni $V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2$.

Ćwiczenie 22. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^4$ opisanymi układami równań liniowych odpowiednio U_1 i U_2:

$$U_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 & = & 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0, \end{array} \right. \quad U_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 6x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

Znaleźć bazy i wymiary podprzestrzeni $V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2$.