Układy równań i ostatnie rzeczy

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Zbadać, czy odwzorowanie $u \mapsto \sigma(u) = u^{99}$ jest permutacją zbioru:

- $\sqrt[1995]{1}$,
- $\sqrt[1996]{1}$,.

Jeśli jest, podać jawny wzór na σ^{-1}.

Rozwiązanie: (a) σ nie jest injektywne. Widać, że 1995 i 99 nie są względnie pierwsze: obie liczby są podzielne przez 3. Korzystając z tego, widać, ze $e^{2\pi i/3} \in \sqrt[1995]{1}$ i

$$\sigma(e^{2\pi i/3}) = \sigma(1).$$

Więc, σ nie jest injekcją i nie jest permutację. Ponadto, widać, że dany pierwiastki $z_1 = e^{i2\pi k_1/1995}$ i $z_1 = e^{2i\pi k_2/1995}$, gdzie $k_1, k_2 \in [0, 1994]$, to

$$\sigma(z_1) = \sigma(z_2) \leftrightarrow 99k_1 = 99k_2 + l1995$$

dla pewnego $l \in \mathbb{N}$. Z tego wynika, że $99(k_1 - k_2) = 1995l$. Więc, $99(k_1 - k_2)/1995 = 33(k_1 - k_2)/665 \in \mathbb{N}$. To się spełnia dla $k_1 = k_2 + 665$. Więc, σ nie jest injekcją.

Natomiast, dla (b) σ jest permutacją. Mamy, że σ jest injekcją: dany pierwiastki $z_1 = e^{i2\pi k_1/1996}$ i $z_1 = e^{2i\pi k_2/1996}$, gdzie $k_1, k_2 \in [0, 1995]$, to

$$\sigma(z_1) = \sigma(z_2) \leftrightarrow 99k_1 = 99k_2 + l1996$$

dla pewnego $l \in \mathbb{N}$. Z tego wynika, że $99(k_1 - k_2) = 1996l$. Liczby 99 i 1996 są względnie pierwsze. Zatem, jedyna możliwość jest, że $k_1 - k_2$ będzie proporcjonalna do 1996. Natomiast, to niemożliwe ponieważ $k_1 - k_2 \in [0, 1995]$. Skoro σ jest injekcją, jest surjekcją i jest permutacją.

Aby obliczyć σ^{-1} szukamy liczby całkowytej n takiej, że

$$\sigma(z_1)^n = z_1, \qquad \forall z_1 \in \sqrt[1996]{1}.$$

Widać, że

$$k_1 99n = k_1 + 1996l$$

dla każdego k_1, czyli

$$k_1(99n - 1) = 1996l.$$

Możemy szukać n takiej, że $99n - 1996l = 1$

Ostatnie równanie można rozwiązać za pomocą algorytmu Euklidesa. Jeżeli p i q są liczbami względymi pierwszymi, to istnieją λ_1 i λ_2 takie, że

$$\lambda_1 p + \lambda_2 q = 1.$$

Jak to obliczyć? Korzystamy z przykładu. Z algorytmu Euklidesa dla liczb całkowitych

$$1996 = 20 \cdot 99 + 16 \to 99 = 6 \cdot 16 + 3 \to 16 = 5 \cdot 3 + 1.$$

Więc,

$$16 - 5 \cdot 3 = 1.$$

Skoro $3 = 99 - 6 \cdot 16$ to

$$1 = 16 - 5(99 - 6 \cdot 16) = 31 \cdot 16 - 5 \cdot 99.$$

Skoro $16 = 1996 - 20 \cdot 99$ to

$$1 = 31 \cdot (1996 - 20 \cdot 99) - 5 \cdot 99 = 31 \cdot 1996 - 625 \cdot 99.$$

Więc, możemy wybierać $n = -625$. Więc, $\sigma^{-1}(z) = z^{-625}$. Równoważnie, to jest $\sigma^{-1}(z) = z^{-625+1996} = z^{1371}$. $\square$