KOLOKWIUM Z ALGEBRY I R

<u>**Instrukcje:**</u> *Każde zadanie jest za 4 punktów. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce oraz być napisane starannie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione według schematu:* **nr zadania, imię i nazwisko, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**.

Ćwiczenie 1. Ustal wszystkie liczby a, b i $c \in \mathbb{R}$ takie, że wielomian o współczynnikach rzeczywistych $\mathfrak{X}^5 + a\mathfrak{X}^4 + b\mathfrak{X}^3 + c\mathfrak{X}^2 + 1$ jest podzielny przez $\mathfrak{X}^3 - 2\mathfrak{X}^2 - 5\mathfrak{X} + 6$.

Ćwiczenie 2. Udowodnij, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\varphi + \alpha) = 2^n \cos^n \left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(n\frac{\varphi}{2} + \alpha\right).$$

Ćwiczenie 3. Sprawdzić, że

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_5 = 0\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^5$. Podaj bazę i wymiar tej podprzestrzeni. Napisz współrzędne wektora $(1, 2, 3, -5, 1)$ w tej bazie. Oblicz przecięcie $W \cap V$, gdzie

$$V = \langle (1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Ćwiczenie 4. Niech V będzie przestrzenią liniową funkcji $f : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie T jest przedziałem. Dowieść, że jeżeli liczby $t_1, \ldots, t_n \in T$ są parami różne, to funkcje $v_1, \ldots, v_n \in V$ określone wzorem $v_k(t) = |t - t_k|$ są liniowo niezależne.

Ćwiczenie 5. W zależności od $p \in \mathbb{R}$, ustal czy następujące wektory przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ p \end{bmatrix}, \qquad e_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -p \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_3 := \begin{bmatrix} p \\ p \\ 3 \end{bmatrix}.$$