Liczby zespolone i liniowa zależność

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2},\qquad \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Rozwiązanie: Skoro $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, to

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[e^{\frac{2\pi i}{2n+1}}\right]^k\right).$$

Korzytając ze wzoru sumy szeregu geometrycznego, czyli

$$\sum_{i=n_0}^{n}r^i=\frac{r^{n_0}-r^{n+1}}{1-r},\qquad r\neq 1,$$

to

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[e^{\frac{2\pi i}{2n+1}}\right]^k\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{2\pi i}{2n+1}}-e^{\frac{2\pi(n+1)i}{2n+1}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{2n+1}}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{2n+1}}-e^{\frac{\pi(2n+1)i}{2n+1}}}{e^{-\frac{\pi i}{2n+1}}-e^{\frac{\pi i}{2n+1}}}\right)=$$
$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{2n+1}}(1-e^{\frac{2n\pi i}{2n+1}})}{e^{-\frac{\pi i}{2n+1}}-e^{\frac{\pi i}{2n+1}}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{2n+1}}e^{\frac{n\pi i}{2n+1}}(e^{\frac{-n\pi i}{2n+1}}-e^{\frac{n\pi i}{2n+1}})}{e^{-\frac{\pi i}{2n+1}}-e^{\frac{\pi i}{2n+1}}}\right)=\frac{\sin(\frac{n\pi}{2n+1})\cos(\frac{(n+1)\pi}{2n+1})}{\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}$$
$$=-\frac{\sin(\frac{n\pi}{2n+1})\cos(\frac{n\pi}{2n+1})}{\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}=-\frac{\sin(\frac{2n\pi}{2n+1})}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}=-\frac{\sin(\frac{2n\pi}{2n+1})}{2\sin\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right)}=-\frac{1}{2},$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Natomiast,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{Re}\left(\left[e^{\frac{\pi i}{2n+1}}\right]^{k}\right)$$
$$=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{2n+1}}-e^{\frac{(2n+1)\pi i}{2n+1}}}{1-e^{\frac{\pi i}{2n+1}}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{2n+1}}+1}{1-e^{\frac{\pi i}{2n+1}}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{(e^{\frac{\pi i}{2n+1}}+1)(e^{\frac{-\pi i}{2n+1}}+1)}{(1-e^{\frac{\pi i}{2n+1}})(e^{\frac{\pi i}{2n+1}}+1)}\right)$$
$$=\mathrm{Re}\left(\frac{(e^{\frac{\pi i}{2n+1}}+1)(e^{\frac{-\pi i}{2n+1}}+1)}{(1-e^{\frac{\pi i}{2n+1}})(e^{-\frac{\pi i}{2n+1}}+1)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{2+e^{\frac{\pi i}{2n+1}}+e^{\frac{-\pi i}{2n+1}}}{-e^{\frac{\pi i}{2n+1}}+e^{-\frac{\pi i}{2n+1}}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{2+2\cos(\frac{\pi i}{2n+1})}{-2i\sin(\frac{\pi i}{2n+1})}\right)=0.$$

Więc,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}=0\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

□

Ćwiczenie 2. Niech $n\in\mathbb{N}$ oraz $z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$. Wykazać, że

$$|z_1+\ldots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n|\Leftrightarrow\left(\begin{array}{c}\exists z\neq 0:\exists r_1,\ldots,r_m\in\mathbb{R}_+:\\ z_j=r_jz\ \text{dla}\ j\in 1,\ldots,n\end{array}\right). \tag{2.1}$$

Rozwiązanie: Dowód jest trywialny dla $n=1$. Więc, założymy, że $n>1$.

Udowodnimy, że z lewej strony (2.1) wynika prawa strona. Zdefiniujemy $s=z_1+\ldots+z_n$. Dla $s=0$, mamy, że z prawej strony (2.1) wynika, że $z_1=\ldots=z_n=0$ i jest trywialne, że prawa strona (2.1) jest prawdziwa.

Zakładamy teraz, że $s\neq 0$ i zdefiniujemy $w_j=z_j/s$ dla $j=1,\ldots,n$. Dla dowolnej liczby zespolonej $z\in\mathbb{C}$ mamy, że $\mathrm{Re}(z)\leq|z|$. Z tego,

$$1=\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}w_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(w_j)\leq\sum_{j=1}^{n}|w_j|=1.$$

Równość $\mathrm{Re}(z)=|z|$ spełnia się wtedy i tylko wtedy gdy $z\in\mathbb{R}_+$. Zatem, mamy, że

$$z_j=\omega_jz,\qquad \omega_j\in\mathbb{R}_+,\qquad j=1,\ldots,n,\qquad z\neq 0.$$

Teraz udowodnimy, że z prawej strony (2.1) wynika lewa strona. Mamy

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} r_j z\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} r_j\right| |z| = \left(\sum_{j=1}^{n} |r_j|\right) |z| = \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

To kończy dowód.

Dodatkowo, też możemy udowodnić, że prawa strona (2.1) wynika z lewej strony (2.1) za pomocą indukcji. Dla $n = 2$, mamy, że jeżeli

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

i $z_1 + z_2 = 0$, to $z_1 = z_2 = 0$ i można przedstawić $z_2 = z_1 = 0z$ dla dowolnego $z \neq 0 \in \mathbb{C}$. Jeżeli $z_1 + z_2 \neq 0$, to

$$|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \Leftrightarrow (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|.$$

To równoważnie

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1\bar{z}_2|.$$

Skoro $s = z_1 + z_2 \neq 0$, to jedna ze zmiennych jest różna od zera, np. z_2. Wówczas,

$$z_1\bar{z}_2 = |z_1\bar{z}_2| \Leftrightarrow z_1 = |z_1\bar{z}_2|z_2/|z_2|^2 \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli zdefiniujemy

$$r = \frac{|z_1\bar{z}_2|}{|z_2|^2},$$

to widać, że prawa strona (2.1) się spełnia.

Teraz zakładamy, że prawa strona (2.1) wynika z lewej strony dla n i zakładamy

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

Skoro

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|$$

to

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}|$$

i

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|.$$

Z założenia, istnieją $s \in \mathbb{C}$ i liczby $r', r_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ takie, że

$$z_{n+1} = r_{n+1}s, \qquad z_1 + \ldots + z_n = r's, \qquad s \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Też z założenia

$$z_i = r_i s', \quad i = 1, \ldots, n, \qquad s' \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

gdzie $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}_+$. Więc,

$$z_1 + \ldots + z_n = (r_1 + \ldots + r_n)s' = r's.$$

Widać, że $s's^{-1} \in \mathbb{R}$. Więc, $s' = \lambda s$ dla $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Wobec tego,

$$z_i = \lambda_i s, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \qquad i = 1, \ldots, n+1.$$

$\square$

Ćwiczenie 3. Oblicz wyrażenie

$$\frac{(1 + i \operatorname{ctg} \varphi)^{19}}{(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)^{19}}.$$

Rozwiązanie: Mamy, że

$$\frac{(1 + i \operatorname{ctg} \varphi)^{19}}{(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)^{19}} = \left(\frac{\sin\varphi + i\,\cos\varphi}{\sin\varphi - i\cos\varphi}\right)^{19} = \left(\frac{\cos(\pi/2 - \varphi) + i\,\sin(\pi/2 - \varphi)}{\cos(\pi/2 - \varphi) - i\sin(\pi/2 - \varphi)}\right)^{19}.$$

Zatem,

$$\frac{(1 + i \operatorname{ctg} \varphi)^{19}}{(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)^{19}} = \left(\frac{e^{(\pi/2+\varphi)i}}{e^{(\pi/2-\varphi)i}}\right)^{19} = e^{38\varphi i} = \cos 38\varphi + i \sin 38\varphi.$$

$\square$

Ćwiczenie 4. Dowieść, że wektory

$$\begin{bmatrix} 326 \\ 471 \\ 797 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 263 \\ 714 \\ 977 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 632 \\ 147 \\ 779 \end{bmatrix}$$

w $\mathbb{R}^3$ są liniowo zależne.

Rozwiązanie: Wektory $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni liniowej V są liniowo niezależne gdy

$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

W naszym przypadku nasze wektory są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 326 \\ 471 \\ 797 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 263 \\ 714 \\ 977 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 632 \\ 147 \\ 779 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Kiedy nie jest tak, to takie wektory są liniowo zależne. Aby sprawdzić, czy nasze wektory są liniowo zależne, trzeba obliczyć rozwiązania układu

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 326 \\ 471 \\ 797 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 263 \\ 714 \\ 977 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 632 \\ 147 \\ 779 \end{bmatrix} = 0.$$

Jeżeli taki układ tylko ma rozwiązanie trywialne, czyli $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, to wektory są liniowo niezależne. Inaczej, wektory są liniowo zależne. Zapiszemy taki układ w postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 326 & 263 & 632 & 0 \\ 471 & 714 & 147 & 0 \\ 797 & 977 & 779 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3 - R_2 - R_1 \to R_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 326 & 263 & 632 & 0 \\ 471 & 714 & 147 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\overset{R_2 - R_1 \to R_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 326 & 263 & 632 & 0 \\ 145 & 451 & -485 & 0 \end{array}\right].$$

Mamy dwa kompatybilne równania i trzy zmienne, więc taki układ ma nietrywialne rozwiązania i nasze wektory są liniowo zależne.

□

Ćwiczenie 5. Dowieść, że wektory

$$u_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad u_2 := \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad u_3 := \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad u_4 := \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

w $\mathbb{R}^4$ są liniowo zależne.

Rozwiązanie: Wektory $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni liniowej V są liniowo niezależne gdy

$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

W naszym przypadku nasze wektory są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ a_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ a_2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ a_3 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ a_4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Kiedy nie jest tak, to takie wektory są liniowo zależne. Aby sprawdzić, czy nasze wektory są liniowo zależne, trzeba obliczyć rozwiązania układu

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ a_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ a_2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ a_3 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ a_4 \end{bmatrix} = 0.$$

Jeżeli taki układ tylko ma rozwiązanie trywialne, czyli $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, to wektory są liniowo niezależne. Inaczej, wektory są liniowo zależne. Zapiszemy taki układ w postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 8 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 5 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2 - 7R_1 \to R_2 \\ R_3 - 4R_1 \to R_3 \\ R_4 - a_1 R_1 \to R_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -34 & -22 & -54 & 0 \\ 0 & -17 & -11 & -27 & 0 \\ 0 & a_2 - 5a_1 & a_3 - 4a_1 & a_4 - 8a_1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_2 - 2R_3 \to R_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & -11 & -27 & 0 \\ 0 & a_2 - 5a_1 & a_3 - 4a_1 & a_4 - 8a_1 & 0 \end{array}\right].$$

Widać, że taki układ ma nietrywialne rozwiązania (mamy trzy równania i cztery zmienny). Wówczas, wektore są liniowo zależne.

$\square$