Permutacje

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Udowodnij, że

$$\prod_{i<j=1}^{n}(x_i - x_j) = \pm \prod_{i<j=1}^{n}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$$

dla każdej permutacji $\sigma \in S_n$.

Rozwiązanie: Mamy, że

$$\prod_{i<j=1}^{n}(x_i - x_j) = \pm \prod_{i<j=1}^{n}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) \Leftrightarrow \left(\prod_{i<j=1}^{n}(x_i - x_j)\right)^2 = \left(\prod_{i<j=1}^{n}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})\right)^2. \tag{1.1}$$

Udowodnimy, że czynniki po prawej i lewej stronie ostatniej równości są takie same. Załóżmy, że $(x_i - x_j)^2$ pojawia się po lewej stronie tej ostatniej równości. Skoro σ to bijekcja i $i \neq j$, istnieją różne $\bar{a}_1$ i $\bar{a}_2$ takie, że $i = \sigma(\bar{a}_1)$ i $j = \sigma(\bar{a}_2)$. Więc,

$$(x_i - x_j)^2 = (x_{\sigma(\bar{a}_1)} - x_{\sigma(\bar{a}_2)})^2.$$

Teraz, zdefiniujemy $\bar{i} = \min(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ i $\bar{j} = \max(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$. Z tego wynika, że

$$(x_i - x_j)^2 = (x_{\sigma(\bar{i})} - x_{\sigma(\bar{j})})^2$$

i czynnik $(x_{\sigma(\bar{i})} - x_{\sigma(\bar{j})})^2$ jest po prawej stronie w ostatniej równości (1.1).

Odwrotnie, zakładamy, że czynnik $(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$ jest po prawej stronie. Ponieważ σ jest bijekcją, to $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Zdefiniujemy,

$$\bar{i} = \min(\sigma(i), \sigma(j)), \qquad \bar{j} = \max(\sigma(i), \sigma(j)).$$

Więc,

$$(x_{\bar{i}} - x_{\bar{j}})^2 = (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})^2$$

i taki czynnik też się pojawia po lewej stronie. Z tego wynika, że prawa i lewa strona ostatniej równości w (1.1) mają takie same czynniki i są równe. $\square$

Ćwiczenie 2. Oblicz znak i nośnik następujących permutacji

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oblicz $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_3$ i $\sigma_3 \circ \sigma_1$ i podaj znak tych permutacji. Napisz je w postaci $(a_1 \dots a_6)$.

Rozwiązanie: Nośnik permutacji $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ to zbiór elementów $a \in \{1, \dots, n\}$ takich, że $\sigma(a) \neq a$. Więc, nośnik permutacji σ_1 to $\{1, 2, 3, 4\}$. Możemy zapisać tą permutację, jako $(3, 4, 2, 5, 6)$. Aby obliczyć znak tej permutacji, zapisujemy permutację jako złożenie cykli rozłącznych i obliczymy jej znak korzystając z tego, że cykl n-elementów ma znak $(-1)^{n-1}$ i

$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \bar{\sigma}) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\bar{\sigma}).$$

Mówi się, że funkcja znak, czyli sign, jest morfizmem grup sign : $(S_n, \circ) \to (\mathbb{R}, \cdot)$. Aby zapisać permutację jako złożenie cykli rozłącznych, korzystamy z następującego algorytmu:

1. Wybieramy jeden element $a_1 \in \{1, 2 \dots, n\}$ nośniku permutacji σ.

2. Obliczymy elementy
$$a_1, \sigma(a_1), \sigma^2(a_1), \dots$$
aż do pierwszego n_0 takiego, że $\sigma^{n_0}(a_1) = a_1$. Z tego wynika, że σ działa na $\{a_1\, \sigma(a_1)\ \dots, \sigma^{n_0-1}(a_1)\}$ jako cykl $\sigma_1 = (a_1\, \sigma(a_1)\ \dots, \sigma^{n_0-1}(a_1))$.

3. Jeżeli już pojawiły się wszystkie elementy nośniku σ, to σ jest złożeniem wszystkich cykli $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Jeżeli nie, to wracamy do punktu 1 i wybieramy nowy element a_2 nośniku σ i powtarzamy poprzednie kroki.

Stosujemy nasz algorytm do σ_1. Nośnik σ_1 jest $\{1, 2, 3, 4\}$. Element 1 należy do nośniku σ_1, ponieważ $\sigma_1(1) = 3$. Mamy,

$$1, \quad \sigma_1(1) = 3, \quad \sigma_1^2(1) = 2, \quad \sigma_1^3(1) = 4, \quad \sigma_1^4(1) = 1.$$

Więc, cykl działa jako $(1\,3\,2\,4)$ na $\{1, 3, 2, 4\}$. Skoro nie ma więcej elementów w nośniku σ_1, to $\sigma_1 = (1\,3\,2\,4)$. Skoro to cykl czterech elementów, to znak ma postać $\mathrm{sign}\,\sigma = (-1)^{4-1} = -1$. Ponadto, możemy napisać σ_1 w postaci $\sigma_1 = (3, 4, 2, 1, 5, 6)$.

Teraz stosujemy nasz algorytm do σ_2. Nośnik σ_2 jest $\{1,2,3,4,5,6\}$. Element 1 należy do nośniku σ_2. Mamy,

$$1,\quad \sigma_2(1)=2,\quad \sigma_2^2(1)=3,\quad \sigma_2^3(1)=4,\quad \sigma_2^4(1)=5,\quad \sigma_2^5(1)=6,\quad \sigma_2^6(1)=1.$$

Więc, cykl działa jako $(1\,2\,3\,4\,5\,6)$ na $\{1,3,2,4,5,6\}$. Skoro nie ma więcej elementów w nośniku σ_2, to $\sigma_2=(1\,2\,3\,4\,5\,6)$. Skoro ten cykl ma sześć elementów, to $\operatorname{sign}\sigma_1$ ma postać $\operatorname{sign}\sigma=(-1)^{6-1}=-1$. Ponadto, możemy napisać σ_2 w postaci $\sigma_2=(2,3,4,5,6,1)$.

Stosujemy nasz algoritm do σ_3. Element 1 należy do nośniku σ_3. Mamy,

$$1,\sigma_3(1)=3,\ \sigma_3^2(1)=2,\ \sigma_3^3(1)=4,\ \sigma_3^4(1)=6,\ \sigma_2^5(1)=1.$$

Więc, cykl działa jak $(1\,3\,2\,4\,6)$ na $\{1,3,2,4,6\}$. Skoro nie ma więcej elementów w nośniku σ_3 (5 nie należy do nośniku), to $\sigma_3=(1\,3\,2\,4\,6)$. Skoro to cykl pięcu elementów, to znak ma postać $\operatorname{sign}\sigma=(-1)^{5-1}=1$. Ponadto mamy, możemy napisać σ_3 w postaci $\sigma_3=(3,4,2,6,5,1)$.

Obliczymy $\sigma_1\circ\sigma_2$, $\sigma_2\circ\sigma_3$ i $\sigma_3\circ\sigma_1$. Mamy, że

$$\begin{aligned}
\sigma_1\circ\sigma_2(1)&=\sigma_1(2)=4,\\
\sigma_1\circ\sigma_2(2)&=\sigma_1(3)=2,\\
\sigma_1\circ\sigma_2(3)&=\sigma_1(4)=1,\\
\sigma_1\circ\sigma_2(4)&=\sigma_1(5)=5,\\
\sigma_1\circ\sigma_2(5)&=\sigma_1(6)=6,\\
\sigma_1\circ\sigma_2(6)&=\sigma_1(1)=3.
\end{aligned}$$

Więc,

$$\sigma_1\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&2&1&5&6&3\end{pmatrix},\qquad \sigma_1\circ\sigma_2=(4,2,1,5,6,3).$$

Nośnik: $\{1,3,4,5,6\}$. Mamy, że funkcja sign jest taka, że dane cykle σ_a i σ_b to $\operatorname{sign}(\sigma_1\cdot\sigma_2)=\operatorname{sign}\sigma_1\operatorname{sign}\sigma_2$. Wówczas

$$\operatorname{sign}(\sigma_1\circ\sigma_2)=\operatorname{sign}[(1\,3\,2\,4)\circ(1\,2\,3\,4\,5\,6)]=\operatorname{sign}(1\,3\,2\,4)\cdot\operatorname{sign}(1\,2\,3\,4\,5\,6)]=1.$$

Też widać, że

$$\sigma_1\circ\sigma_2=(1\,4\,5\,6\,3)\Rightarrow\operatorname{sign}(\sigma_1\circ\sigma_2)=(-1)^4=1.$$

Teraz mamy, że

$$\begin{aligned} \sigma_2 \circ \sigma_3(1) &= \sigma_2(3) = 4, \\ \sigma_2 \circ \sigma_3(2) &= \sigma_2(4) = 5, \\ \sigma_2 \circ \sigma_3(3) &= \sigma_2(2) = 3, \\ \sigma_2 \circ \sigma_3(4) &= \sigma_2(6) = 1, \\ \sigma_2 \circ \sigma_3(5) &= \sigma_2(5) = 6, \\ \sigma_2 \circ \sigma_3(6) &= \sigma_2(1) = 2. \end{aligned}$$

Więc,

$$\sigma_2 \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nośnik: $\{1, 2, 4, 5, 6\}$. Mamy, że

$$\operatorname{sign}(\sigma_2 \circ \sigma_3) = \operatorname{sign}[(1\,2\,3\,4\,5\,6) \circ (1\,3\,2\,4\,6)] = \operatorname{sign}(1\,2\,3\,4\,5\,6) \cdot \operatorname{sign}(1\,3\,2\,4\,6) = -1.$$

Mamy, że

$$\begin{aligned} \sigma_3 \circ \sigma_1(1) &= \sigma_3(3) = 2, \\ \sigma_3 \circ \sigma_1(2) &= \sigma_3(4) = 6, \\ \sigma_3 \circ \sigma_1(3) &= \sigma_3(2) = 4, \\ \sigma_3 \circ \sigma_1(4) &= \sigma_3(1) = 3, \\ \sigma_3 \circ \sigma_1(5) &= \sigma_3(5) = 5, \\ \sigma_3 \circ \sigma_1(6) &= \sigma_3(6) = 1. \end{aligned}$$

Więc,

$$\sigma_2 \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 \circ \sigma_3 = (2, 6, 4, 3, 5, 1).$$

Nośnik: $\{1, 2, 3, 4, 6\}$. Mamy, że

$$\operatorname{sign}(\sigma_3 \circ \sigma_1) = \operatorname{sign}[(1\,3\,2\,4\,6) \circ (1\,3\,2\,4)] = \operatorname{sign}[(1\,3\,2\,4\,6)] \cdot \operatorname{sign}[(1\,3\,2\,4)] = -1.$$

Też widać, że

$$\operatorname{sign}(\sigma_3 \circ \sigma_1) = \operatorname{sign}[(1\,2\,6)(3\,4)] = \operatorname{sign}[(1\,2\,6)] \cdot \operatorname{sign}[(3\,4)] = -1.$$

$\square$

Ćwiczenie 3. Udowodnij, że każda permutacja jest złożeniem cykli rozłącznych.

Rozwiązanie: Dany zbiór $S = \{1, \dots, n\}$, i permutacja $\sigma \in S_n$, zdefiniujemy relację równoważności

$$a\,R\,b \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \sigma^n(a) = b,$$

gdzie $\sigma^0(a) = b$. Właśnie, relacja ta spełnia następujące własności:

$$\text{Odwrotna} : a\,R\,a \Longrightarrow \sigma^0 a = a.$$

$$\text{Symmetryczna} : a\,R\,b \Longrightarrow \sigma^n a = b.$$

Udowodnimy, że $\sigma^{n_0} b = a$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$. Mamy, że

$$b, \sigma(b), \sigma^2(b), \sigma^3(b), \dots$$

Skoro S ma skończone wiele elementów, dwa elementy powyższej listy mają się powtarzać, czyli $\sigma^{p_1}(b) = \sigma^{p_2}(b)$ dla pewnych $p_1 < p_2$. Więc,

$$b = \sigma^{p_2 - p_1}(b).$$

Niech $n_0 = p_2 - p_1$. Istnieje liczba naturalna k taka, że $kn_0 > n$. Wówczas, $kn_0 - n \in N$ i

$$\sigma^n(a) = b = \sigma^{kn_0}(b) \Rightarrow a = \sigma^{kn_0 - n}(b) \Rightarrow b\,R\,a.$$

$$\text{Przechodnia} : a\,R\,b \;\wedge\; b\,R\,c \Rightarrow \sigma^{n_1}(a) = b \wedge \sigma^{n_2}(b) = c \Rightarrow \sigma^{n_1+n_2}(a) = c \Rightarrow a\,R\,c.$$

Skoro R to relacja równoważności, możemy podzielić S na warsztatach. Dowolne elementy a, b każdego warsztatu są w relacji, czyli istnieje n taki $\sigma^n(a) = b$. Z tego wynika,

$$[a] \subset \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \sigma^3(a), \dots\}.$$

Skoro już udowodniliśmy, że powyższa lista ma się powtarzać od pewnego momentu, to

$$[a] \subset \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \sigma^3(a), \dots, \sigma^{n_0}(a) = a\}.$$

gdzie n_0 to najmiejsza liczba naturalna taka, że $\sigma^{n_0}(a) = a$. Z tego wynika, że σ działa jak cykl na $[a]$. Ponieważ warszaty są rozłączne, to σ działa jak rozłączne cykle.

Widać, że poprzedni dowód podaję metod aby napisać permutację jako złożenie rozłącznych cykl. Elementy nie należace do nośniku nie zmieniają się i nie trzeba zapisać w cyklu. Teraz, wystarczy wybierać jeden element nośniku $a \in S$ i obliczyć $a, \sigma(a), \dots, \sigma^{n_0}(a) = a$. To daje pierwsze cykl. Szukamy drugiego elementu nośniku tej permutacji i powtarzamy az do końcu elementów nośniku σ. Na końcu, musimy napisać złożeniem znaledzionych cykl. To właśnie algoritm podane do tej pory, aby napisac permutację jako złożeniem cykl.

□

Ćwiczenie 4. Napisz następujące permutacje

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

jako złożenie transpozycji i cykli.

Rozwiązanie: Możemy zapisać permutację

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

jak cykl następująco. Przyponmimy, że każda permutacja działa jak złożeniem cykl rozłącznych na zbiorach postaci

$$a, \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots.$$

Jeżeli a nie należy do nośniku permutacji, to a jest niezmennice. z tego powodu, kiedy pisze się σ_1 jako złozeniem cykl rozłącznych, takie elementy nie pojawiają się w tej dekompozycji, poniewaz permutacjia nie zmienia ich.

Korzystając z poprzednich argumentów, zaczynamy od dowolnego elementu nośniku σ_1, np. 1. mamy, że $\sigma_1(1) = 3$, $\sigma_1(3) = 1$. Więc, permutacja działa na $\{1, 3\}$ jak cykl $(1\,3)$. Sprawdzamy, jak działa permutacja dla reszty elementów nośniku permutacji. Ważny zauważyć, że poprzedni elementy, tj. $\{1, 3\}$ nie pojawiają się jako obrazy reszty elementów: σ_1 jest bijeckcją i 1 i 3 są obrazami tylko jednego elementu $3, 1$ odpowiednio. Wybieramy element nosniku σ_1 nie należący do poprzednego cyklu, np. 4. Mamy, że $\sigma_1(4) = 5$, $\sigma_1(5) = 6$ i $\sigma_1(6) = 4$. Zatem, σ_1 działa jak cykl $(4\,5\,6)$ na $\{4, 5, 6\}$. Reszta elementów są niezmennicze. Zatem,

$$\sigma_1 = (1\,3)(4\,5\,6).$$

Ponadto, mamy, że

$$(1\,3)(4\,5\,6) = (1\,3)(4\,5)(5\,6).$$

Własnie, widać, że

$$\begin{aligned}
(1\,3)(4\,5)(5\,6)(1) &= (1\,3)(4\,5)(1) = (1\,3)(1) = 3,\\
(1\,3)(4\,5)(5\,6)(2) &= (1\,3)(4\,5)(2) = (1\,3)(2) = 2,\\
(1\,3)(4\,5)(5\,6)(3) &= (1\,3)(4\,5)(3) = (1\,3)(3) = 1,\\
(1\,3)(4\,5)(5\,6)(4) &= (1\,3)(4\,5)(4) = (1\,3)(5) = 5,\\
(1\,3)(4\,5)(5\,6)(5) &= (1\,3)(4\,5)(6) = (1\,3)(6) = 6,\\
(1\,3)(4\,5)(5\,6)(6) &= (1\,3)(4\,5)(5) = (1\,3)(4) = 4,
\end{aligned}$$

i $(1\,3)(4\,5)(5\,6)$ działa tak samo jak σ_1. Możemy zapisać permutację

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

jak cykl następująco. Postępujemy jak poprzednio. Zaczynamy od dowolnego elementu nośniku σ_2, np. 1. mamy, że

$$1,\ \sigma_2(1) = 3,\ \sigma_2^2(1) = \sigma_2(3) = 1.$$

Więc, permutacja działa na $\{1, 3\}$ jak cykl $(1\,3)$. Sprawdzamy, jak działa permutacja dla reszty elementów nośniku permutacji. Wybieramy element nosniku σ_1 nie należący do poprzednego cyklu, np. 4. Mamy, że

$$4,\ \sigma_2(4) = 2,\ \sigma^2(4) = \sigma_2(2) = 4.$$

Zatem, σ_2 działa na $\{4, 2\}$ jak cykl $(4\,2)$. Jeszcze 5 należy do nośniku σ_2. Zatem, $\sigma_2(6) = 5$ i $\sigma_2(5) = 2$. Zatem

$$\sigma_2 = (1\,3)(2\,4)(6\,5).$$

Już permutacja pojawia się jak zło zenie cykl rozłącznych. □

Ćwiczenie 5. Oblicz znak permutacji

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2m-2 & 2m-1 & 2m \\ m+1 & 1 & m+2 & 2 & m+3 & \dots & m-1 & 2m & m \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie:Widać, że $(1\,2) \circ \sigma_1$ jest

$$(1\,2) \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2m-2 & 2m-1 & 2m \\ 1 & m+1 & m+2 & 2 & m+3 & \dots & m-1 & 2m & m \end{pmatrix}$$

Ponadto, mamy, że $(2\,3)\circ(3\,4)\circ(1\,2)\circ\sigma_1$ jest

$$(2\,3)\circ(4\,3)\circ(1\,2)\circ\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2m-2 & 2m-1 & 2m \\ 1 & 2 & m+1 & m+2 & m+3 & \dots & m-1 & 2m & m \end{pmatrix}$$

Dalej, mamy, że $(3\,4)\circ(4\,5)\circ(5\,6)\circ(2\,3)\circ(3\,4)\circ(1\,2)\circ\sigma_1$ jest

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2m-2 & 2m-1 & 2m \\ 1 & 2 & 3 & m+1 & m+2 & m+3 & \dots & m-1 & 2m & m \end{pmatrix}$$

Kontynujemy, i po m razy mamy że σ_1 po $1+2+3+\ldots+m$ transpozycji jest identyczność. Czyli, mamy

$$\frac{(1+m)m}{2}$$

transpozycje. Więc,

$$\operatorname{sign}\sigma_1 = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

□

Ćwiczenie 6. Oblicz wszystkie 3-liniowe formy alternujące na $\mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie: Dana 3-forma alternująca b na $\mathbb{R}^3$, dla dowolnych elementów

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3, \\ \mathbf{y} &= y^1e_1 + y^2e_2 + y^3e_3, \\ \mathbf{z} &= z^1e_1 + z^2e_2 + z^3e_3., \end{aligned}$$

gdzie e_1, e_2, e_3 tworzą bazę $\mathbb{R}^3$, mamy, że

$$b(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} x^iy^jz^kb(e_i,e_j,e_k). \tag{6.1}$$

Z tego wynika, że wartości b tylko zależą od wartości $b(e_i,e_j,e_k)$, gdzie $i,j,k = 1,\ldots,3$. Skoro b jest alternująca, mamy, że

$$b(e_i,e_j,e_k) = \operatorname{sign}(\sigma)b(e_{\sigma(i)},e_{\sigma(j)},e_{\sigma(k)}), \qquad \forall\sigma\in S_n.$$

Ponadto, jeżeli b spełnia poprzedni warunek, widać z (6.1), że b jest alternująca.

Wówczas, jeżeli $i = j$, $i = k$, lub $j = k$, to $b(e_i, e_j, e_k) = 0$. Więc,

$$b(e_1, e_1, e_1) = 0,\ b(e_1, e_1, e_2) = 0,\ b(e_1, e_1, e_3) = 0,\ b(e_2, e_2, e_1) = 0,$$
$$b(e_2, e_2, e_2) = 0,\ b(e_2, e_2, e_3) = 0,\ b(e_3, e_3, e_1) = 0,\ b(e_3, e_3, e_2) = 0,$$
$$b(e_3, e_3, e_3) = 0,\ b(e_1, e_2, e_1) = 0,\ b(e_1, e_3, e_1) = 0,\ b(e_2, e_1, e_2) = 0,$$
$$b(e_2, e_3, e_2) = 0,\ b(e_3, e_1, e_3) = 0,\ b(e_3, e_2, e_3) = 0,\ b(e_2, e_1, e_1) = 0,$$
$$b(e_3, e_1, e_1) = 0,\ b(e_1, e_2, e_2) = 0,\ b(e_3, e_2, e_2) = 0,\ b(e_1, e_3, e_3) = 0,$$
$$b(e_2, e_3, e_3) = 0.$$

Oprócz tego, mamy, że

$$\lambda = b(e_1, e_2, e_3) = b(e_2, e_3, e_1) = b(e_3, e_1, e_2) =$$
$$-b(e_2, e_1, e_3) = -b(e_1, e_3, e_2) = -b(e_3, e_2, e_1).$$

dla pewnej $\lambda \in \mathbb{R}$. Z tego wynika, że wszystkie 3-formy alternujące mają postać

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \lambda(x^1y^2z^3 + x^2y^3z^1 + x^3y^1z^2 - x^2y^1z^3 - x^1y^3z^2 - x^3y^2z^1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\square$