Przestrzeń sprzężona, anihilatory i formy dwuliniowe

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Dowieść, że następujące funkcje są formami liniowymi przestrzeni wektorowej V:

$$\omega_1(w(\mathfrak{X})) = \int_0^1 P(x)w(x)dx, \quad w(\mathfrak{X}) \in V = \mathbb{R}_n[\mathfrak{X}], \text{ dla ustalonego } P(\mathfrak{X}) \in V$$

$$\omega_2(w(\mathfrak{X})) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k w}{dx^k}(1), \quad w(\mathfrak{X}) \in V = \mathbb{R}_n[\mathfrak{X}], \quad d^0 w/dx = w,$$

$$\omega_3(v) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \text{ dla ustalonych } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Rozwiązanie: Badamy ω_1. Najpierw, trzeba zauważyć, że wszystkie odwzorowania są dobrze określone. Skoro w definiciach odwzorowań ω_1, ω_2, ω_3 pojawiając się pochodne, mnożenia i całki na zawartym przydziłem wielomianów, to widać, że $\omega_i(w(\mathfrak{X}))$ zawsze istnieje i każdy z powyższych odwzorowań mają postać $\omega : V \to \mathbb{R}$. Aby udowodnić, że są formami liniowymi, musimy dodatkowo udowodnić, że

$$\omega_i(\lambda_1 w_1(\mathfrak{X}) + \lambda_2 w_2(\mathfrak{X})) = \lambda_1 \omega_i(w_1(\mathfrak{X})) + \lambda_2 \omega_i(w_2(\mathfrak{X})), \qquad i = 1, 2, 3,$$

dla dowolnych wektorów $w_1, w_2 \in V$ i skalarnych λ_1, λ_2.

Dla pierwszego przykładu widać, że

$$\begin{aligned}\omega_1(\lambda_1 w_1(\mathfrak{X}) + \lambda_2 w_2(\mathfrak{X})) &= \int_0^1 P(x)((\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)(x)dx \\ &= \lambda_1 \int_0^1 P(x)w_1(x)dx + \lambda_2 \int_0^1 P(x)w_2(x)dx.\end{aligned}$$

Wówczas,

$$\omega_1(\lambda_1 w_1(\mathfrak{X}) + \lambda_2 w_2(\mathfrak{X})) = \lambda_1 \omega_1(w_1(\mathfrak{X})) + \lambda_2 \omega_2(w_2(\mathfrak{X})).$$

Badamy ω_2. Widać, że

$$\begin{aligned}\omega_2(\lambda_1 w_1(\mathfrak{X}) + \lambda_2 w_2(\mathfrak{X})) &= \sum_{k=0}^n \frac{d^k}{dx^k}[\lambda_1(w_1(x)) + \lambda_2 w_2(x)]\Big|_{x=1} \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^n \frac{d^k}{dx^k}[w_1(x)]\Big|_{x=1} + \lambda_2 \sum_{k=0}^n \frac{d^k}{dx^k}[w_2(x)]\Big|_{x=1}.\end{aligned}$$

Wówczas,

$$\omega_2(\lambda_1 w_1(\mathfrak{X}) + \lambda_2 w_2(\mathfrak{X})) = \lambda_1 \omega_1(w_1(\mathfrak{X})) + \lambda_2 \omega_2(w_2(\mathfrak{X})).$$

Aby udowodnić, że ω_2 jest formą liniową też można powiedzieć, że pochodna rzędu r, gdzie pochodna rzędu $r = 0$ to identyczność, jest formą liniową. Z tego wynika, że kombinacja liniowa pochodnych to odwzorowanie liniowe. Ponadto, odwzorowanie $\delta : \omega_1(\mathfrak{X}) \in V \to \delta(\omega_1) = \omega_1(1) \in \mathbb{R}$ to też jest odwzorowanie liniowe. Więc, ω_2 to złożenie odwzorowań liniowych. Zatem, ω_2 to odwzorowanie liniowe. Skoro ω_1 to odwzorowanie liniowe od V do $\mathbb{R}$, to ω_1 jest formą liniową.

Podobnie można udowodnić, że ω_3 jest formą liniową.

□

Ćwiczenie 2. Dana przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}_2[\mathfrak{X}]$, sprawdź, czy następujące formy liniowe $\omega^1, \omega^2, \omega^3 \in \mathbb{R}_2[\mathfrak{X}]^*$ postaci

$$\omega_1(P(\mathfrak{X})) = \int_0^1 P(x)dx, \qquad \omega_2(P(\mathfrak{X})) = \int_{-1}^1 P(x)dx, \qquad \omega_3(P(\mathfrak{X})) = \int_{-2}^0 P(x)dx.$$

tworzą bazę przestrzeni sprzężonej $\mathbb{R}_2[\mathfrak{X}]^*$. Oblicz bazę e_1, e_2, e_3 przestrzeni $\mathbb{R}_2[\mathfrak{X}]$ taką, że

$$\omega^j(e_i) = \delta_i^j, \qquad i, j = 1, \ldots, 3.$$

Oblicz Y°, gdzie

$$Y = \langle e_1 + e_3, e_2 \rangle$$

Rozwiązanie: Aby sprawdzić, czy $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ są odwzorowaniami liniowymi liniowo nieżale znymi, trzeba udowdonić, że

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Skoro $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3$ to forma liniowa, to

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3 = 0 \Rightarrow (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)(P(\mathfrak{X})) = 0, \qquad \forall P(\mathfrak{X}) \in \mathbb{R}_2[\mathfrak{X}].$$

Widać, ze

$$\omega_1(a_0 + a_1\mathfrak{X} + a_2\mathfrak{X}^2) = a_1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2, \qquad \omega_2(a_0 + a_1\mathfrak{X} + a_2\mathfrak{X}^2) = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2,$$
$$\omega_3(a_0 + a_1\mathfrak{X} + a_2\mathfrak{X}^2) = 2a_0 - 2a_1 + \frac{8}{3}a_2.$$

Korzystając z tego, możemy zapisać następujące równania

$$(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)(1) = 0, \qquad (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)(\mathfrak{X}) = 0,$$
$$(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)(\mathfrak{X}^2) = 0.$$

w postaci macierzowej i oblyczyć $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-1/3K_1+K_3\to K_3]{-1/2K_1+K_2\to K_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Z tego wynika, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Teraz, mamy szukać wektorów e_1, e_2, e_3 takich, że $\omega^j_(e_i) = 0$. Więc, wektor e_1 spełnia, że

$$\omega^1(e_1) = 1, \qquad \omega^2(e_1) = 0, \qquad \omega^3(e_1) = 0.$$

Jeżeli zapisujemy e_1 w postaci $e_1 = a_0 + a_1\mathfrak{X} + a_2\mathfrak{X}^2$, to mamy, że

$$1 = \omega^1(e_1) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2, \quad 0 = \omega^2(e_1) = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2, \quad 0 = \omega^3(e_1) = 2a_0 - 2a_1 + \frac{8}{3}a_2.$$

Rozwiązując ten układ, mamy, że $a_1 = 2, a_2 = 2, a_0 = -2/3$.

Jeżeli zapisujemy e_2 w postaci $e_2 = a_0 + a_1\mathfrak{X} + a_2\mathfrak{X}^2$, to mamy, że

$$0 = \omega^1(e_2) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2, \quad 1 = \omega^2(e_2) = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2, \quad 0 = \omega^3(e_2) = 2a_0 - 2a_1 + \frac{8}{3}a_2.$$

Rozwiązując ten układ mamy, że $a_1 = -1, a_2 = -1/2, a_0 = -1/3$.

Jeżeli zapisujemy e_3 w postaci $e_3 = a_0 + a_1\mathfrak{X} + a_2\mathfrak{X}^2$, to mamy, że

$$0 = \omega^1(e_3) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2, \quad 0 = \omega^2(e_3) = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2, \quad 1 = \omega^3(e_3) = 2a_0 - 2a_1 + \frac{8}{3}a_2.$$

Rozwiązując ten układ mamy, że $a_1 = 0, a_2 = 1/2, a_0 = -1/6$.

Teraz mamy obliczyć annihilator podprzestrzeni Y. Taki annihilator to zbiór wszystkich form liniowych takich, że zerują się na Y. Dana forma liniowa $\omega \in Y^\circ$ możemy napisać w współrzędnych

$$\omega = \lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2 + \lambda_3\omega^3.$$

Mamy, ze

$$\omega \in Y^\circ \Leftrightarrow \omega(e_1 + e_3) = 0 \wedge \omega(e_2) = 0.$$

Zatem

$$\omega \in Y^\circ \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \wedge \lambda_2 = 0.$$

i $\lambda_1 = -\lambda_3$ i λ_3 jest dowolna. Z tego wynika, że

$$Y^\circ = \langle \omega_1 - \omega_3 \rangle.$$

Właśnie wiemy, że $\dim Y^\circ = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Y = 3 - 2 = 1$. Zatem, nasz wynik ma sens.
$\square$

Ćwiczenie 3. Zbadaj czy odwzorowanie $\omega : V \oplus V \longrightarrow \mathbb{R}$ określa formę dwuliniową, jeśli:

a) $V := \mathbb{R}_n[x], \quad \forall\, v, w \in V : \ \omega(v, w) := \int_0^1 v(x)w(x)\, dx;$

b) $V := \mathbb{R}_n[x], \quad \forall\, v, w \in V : \ \omega(v, w) := \int_0^1 v'(x)w(x)\, dx;$

c) $V := \mathbb{R}^n, \quad \forall\, v, w \in V : \ \omega(v, w) := v \cdot w.$

Ćwiczenie 4. Czy każda forma dwu-liniowa $b : \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ można przedstawić w postaci

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega_1(\mathbf{x})\omega_2(\mathbf{y}), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \tag{4.1}$$

dla pewnych form-liniowych $\omega_1, \omega_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$.

Rozwiązanie: Możemy ustalić tzw bazą kanoniczną przestrzeni $\mathbb{R}^2$ postaci

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

W tej bazie, wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ można napisać w postaci $x = x_1e_1 + x_2e_2$ i $y = y_1e_1 + y_2e_2$. Wtedy

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) = \sum_{i,j=1}^{2} x_iy_jb(e_i, e_j).$$

Trzeba zauważyć, że wartości $b(e_i, e_j)$ są dowolne. Te wartości zdefiniują formę dwuliniową. np.

$$b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = 1, \qquad b(e_1, e_2) = b(e_2, e_1) = 0,$$

to standardowy iloczyn skalarny.

Po drugiej stronie, mamy, że każda forma liniowa $\omega_i \in (\mathbb{R}^2)^*$ ma postać,

$$\begin{aligned} \omega_1(\mathbf{x}) &= \omega_1(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1\omega_1(e_1) + x_2\omega_1(e_2), \\ \omega_2(\mathbf{y}) &= \omega_2(y_1e_1 + y_2e_2) = y_1\omega_2(e_1) + y_2\omega_2(e_2). \end{aligned}$$

Mówiąc inaczej, każda forma liniowa jest określona przez obrazy wektorów jednej bazy.

Jeżeli (4.1) się spełnia, to

$$\sum_{i,j=1}^{2} x_iy_jb(e_i, e_j) = (x_1\omega_1(e_1) + x_2\omega_1(e_2))(y_1\omega_2(e_1) + y_2\omega_2(e_2)), \qquad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

dla pewnych wartości $\omega_i(e_j)$, gdzie $i, j = 1, 2$. Skoro (4.2) ma się spełniac dla wszystkich wartości x_i, y_j, dla $i, j = 1, 2$, to many, że $b(e_i, e_j) = \omega_1(e_i)\omega_2(e_j)$. Zakładamy, że $b(e_1, e_2) = b(e_2, e_1) = 0$ i $b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = 1$. Wtedy,

$$\omega_1(e_1)\omega_2(e_2) = 0 \Rightarrow \omega_1(e_1) \vee \omega_2(e_2) = 0.$$

Z tego wynika, że $0 = b(e_1, e_1) = \omega_1(e_1)\omega_2(e_1) = 0$ lub $b(e_2, e_2) = \omega_1(e_2)\omega_2(e_2) = 0$. To sprzecność ponieważ $b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = 1$ i (4.1) nie może się spełniać dla żadnych ω_1 i ω_2.

To zadanie można rozwiązać szybczej. Forma dwuliniowa b mówi się niezdegenerowana, gdy nie istnieje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ taki, że

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \qquad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2.$$

Iloczyń skalarny nie jest zdegenerowany, właśnie, $b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$ dla $\mathbf{x} \neq 0$. Natomiast, forma dwuliniowa $\omega_1(\mathbf{x})\omega_2(\mathbf{y})$ jest zawsze zdegenerowana. Dla każdego ω_1 istnieje taki $\mathbf{x}$, że $\omega_1(\mathbf{x}) = 0$. Więc, forma dwuliniowa $\omega_1(\mathbf{x})\omega_2(\mathbf{y})$ jest zdegenerowana. Zatem, to nie możliwe, że $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ma postać (4.1). $\square$

Ćwiczenie 5. Dana baza

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Oblicz bazę dualną $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ do tej bazę. Napisz formę dwuliniową

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \qquad \mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T,\ \mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T,$$

jako liniową kombinację form-dwuliniowych

$$b^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \theta^i(\mathbf{x})\theta^j(\mathbf{y}), \qquad \text{dla } i, j = 1, \ldots, 3.$$

Rozwiązanie: Niech $\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3$ będzie bazą sprzężną do bazy kanonicznej $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ w $\mathbb{R}^3$. Wtedy, baza sprzężona do bazy e_1, e_2, e_3 ma postać

$$\theta^i = \mu_1^i \bar{\theta}^1 + \mu_2^i \bar{\theta}^2 + \mu_3^i \bar{\theta}^3, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Skoro

$$\theta^i(e_j) = \delta^i_j, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

to dla $i = 1$ mamy, że taki układ w postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Więc,

$$\mu_3^1 = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \mu_2^1 = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \mu_1^1 = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\theta^1 = \frac{1}{2}\bar{\theta}_1 + \frac{1}{2}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{2}\bar{\theta}_3.$$

Podobno można obliczyć resztę form, namely

$$\theta^2 = \frac{1}{2}\bar{\theta}^1 - \frac{1}{2}\bar{\theta}^2 + \frac{1}{2}\bar{\theta}^3, \qquad \theta^3 = -\frac{1}{2}\bar{\theta}^1 + \frac{1}{2}\bar{\theta}^2 + \frac{1}{2}\bar{\theta}^3.$$

Jest ważny zauważać, że możemy rozwiązać te układy korzystając z symmetrii. Mamy układ

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_1 & + & \mu_2 & & & = & 1, \\ \mu_1 & & & + & \mu_3 & = & 0, \\ & & \mu_2 & + & \mu_3 & = & 0. \end{array}$$

Jeżeli zmienimy zmienne μ_2 przez μ_3, otrzymamy układ

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_1 & + & \mu_2 & & & = & 0, \\ \mu_1 & & & + & \mu_3 & = & 1, \\ & & \mu_2 & + & \mu_3 & = & 0. \end{array}$$

To układ ustalający θ^2. Więc, rozwiązanie tego układu można otrymać z rozwiązania poprzedniego układu zamieniając μ_2 przez μ_3. Widać, że

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\theta}^1(\mathbf{x})\bar{\theta}^1(\mathbf{y}) + \bar{\theta}^2(\mathbf{x})\bar{\theta}^2(\mathbf{y}) + \bar{\theta}^3(\mathbf{x})\bar{\theta}^3(\mathbf{y})$$

Mamy, że

$$\bar{\theta}^1 = \theta^1 + \theta^2, \qquad \bar{\theta}^2 = \theta^1 + \theta^3, \qquad \bar{\theta}^3 = \theta^2 + \theta^3.$$

Zatem,

$$
\begin{aligned}
b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = {} & 2\theta_1(\mathbf{x})\theta_1(\mathbf{y}) + 2\theta_2(\mathbf{x})\theta_2(\mathbf{y}) + 2\theta_3(\mathbf{x})\theta_3(\mathbf{y}) + \theta_3(\mathbf{y})\theta_3(\mathbf{x}) \\
& + \theta_1(\mathbf{x})\theta_2(\mathbf{y}) + \theta_1(\mathbf{y})\theta_2(\mathbf{x}) + \theta_2(\mathbf{x})\theta_3(\mathbf{y}) + \theta_2(\mathbf{y})\theta_3(\mathbf{x}) + \theta_1(\mathbf{x})\theta_3(\mathbf{y}) + \theta_1(\mathbf{y})\theta_3(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

□