Przestrzenie wektorowe, liniowa niezależność

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. W zbiorze $V := \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ określmy naturalne dodawanie $(x_1, x_2)+(y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, a mnożenie przez liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ zdefiniujmy jednym z następujących wzorów:

$$(a)\ \lambda\cdot(z_1, z_2) := (\lambda_1 z_1, z_2); \qquad (b)\ \lambda\cdot(z_1, z_2) := (\lambda z_1, 0);$$
$$(c)\ \lambda\cdot(z_1, z_2) := ((\mathrm{Re}\lambda)z_1, (\mathrm{Re}\lambda z_2).$$

Dla każdego z tych przypadków sprawdzić, które z aksjomatów przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{C}$ są spełnione, a które nie są.

Ćwiczenie 2. Niech $V := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\ i\ \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in \mathbb{Q}\}$. Sprawdzić, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$, jeżeli zdefiniujemy $\oplus : (v, w) \in V \times V \mapsto vw \in V$ i mnożenie $\cdot : (\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V \mapsto v^\lambda \in V$, gdzie vw i v^λ to zwykłe mnożenie i potęgowanie liczb rzeczywistych. Wykazać, że liczby pierwsze $2, 3, 5, 7, 11, \cdots$ są liniowo niezależne i generują całą V.

Ćwiczenie 3. Niech $\mathbb{R}_3[\mathfrak{X}]$ będzie przestrzenią wektorową (nad $\mathbb{R}$) wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia nie większego od 3. Zbadać liniową zależność wektorów $P_1(\mathfrak{X}) := 1 + \mathfrak{X} + 2\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}^3$, $P_2(\mathfrak{X}) := 2 + \mathfrak{X} + \mathfrak{X}^2 - \mathfrak{X}^3$, $P_3(\mathfrak{X}) := 7 + 5\mathfrak{X} + 4\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}^3$.

Ćwiczenie 4. Zbadać liniową zależność wektorów

- $(1, -1, 0, 2, 4)$, $(7, -5, 0, 2, 2)$, $(1, 0, 1, 0, 1)$, $(8, -4, 2, 0, 0)$ w $\mathbb{Q}^5$ (nad $\mathbb{Q}$).
- $(1, \sqrt{2}, 0, 2, 4)$, $(1, 0, \sqrt{3}, 0, \sqrt{5})$, $(1+\sqrt{2}, 0, 1, 0, \sqrt{2})$, $(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 4, 1, 0, 4\sqrt{2})$ w $\mathbb{R}^5$ (nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{Q}$).
- $(i, -i, 0, 2, 4)$, $(2, 0, 0, 2 - 2i, 1 - 4i)$, $(1, 1, 0, 2, 1)$ w $\mathbb{C}^5$ (nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$).

Ćwiczenie 5. Zbadać liniową zależność w przestrzeni $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, czyli przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, układu funkcji:

- $\cos\varphi$, $\cos 3\varphi$, $\cos^3\varphi$,
- $\sin\varphi$, $\sin 3\varphi$, $\sin^3\varphi$,
- $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$.