Wielomiany i liczby zespolone

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Ustal dla których $a, b \in \mathbb{R}$ można podzielić

$$f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 - 3\mathfrak{X}^2 + a\mathfrak{X} - b \text{ przez } f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 3\mathfrak{X} + 2$$

$f_3(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + (3-a-b)\mathfrak{X}^3 + (1-3(a+b)+ab)\mathfrak{X}^2 + (3ab-a-b)\mathfrak{X} + ab$ przez $f_4(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 4\mathfrak{X} + 4$.

Ćwiczenie 2. Napisz dwa wielomiany o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$ określające tą samą funkcję.

Rozwiązanie: Mamy, na przykład

$$P_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}(\mathfrak{X}-1)(\mathfrak{X}-2)(\mathfrak{X}-3)(\mathfrak{X}-4), \qquad P_2(\mathfrak{X}) = 0.$$

Oba wielomiany są różne. Natomiast, dla dowolnej wartości $\lambda \in \mathbb{Z}_5$ drugi wielomian jest bezpośrednio równy zeru. Dla P_1 mamy, że $\mathfrak{X}$ może przejmować wartości $0, 1, 2, 3, 4$. Dla każdej możliwej wartości λ, jeden czynnik $\mathfrak{X} - i$ się zeruję. Więc, $P_1(\lambda) = 0$. $\square$

Ćwiczenie 3. Za pomocą algorytmu Euklidesa dla wielomianów, podaj największy wspólny dzielnik następujących wielomianów o współczynnikach w $\mathbb{R}$

$$f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 - 6\mathfrak{X}^4 + 45\mathfrak{X}^2 - 46\mathfrak{X} - 24 \qquad i \qquad f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 5\mathfrak{X}^4 + 6\mathfrak{X}^3 - 3\mathfrak{X}^2 - 7\mathfrak{X} - 2$$

$$f_3(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 2\mathfrak{X}^4 - \mathfrak{X}^3 + \mathfrak{X}^2 - 2\mathfrak{X} - 1 \qquad i \qquad f_4(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + 6\mathfrak{X}^3 + 15\mathfrak{X}^2 + 18x + 5.$$

Ćwiczenie 4. Załóżmy, że punkty $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 1, \ldots, n$ (gdzie $n > 2$ i $x_k, y_k \in \mathbb{R}$) są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w akrąg $C(0; r)$ (środek 0 i promień r). Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \frac{n}{2} r^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0.$$

Rozwiązanie: Punkty wpisane w okrąg $C(0; r)$ są takie, że $|z_k| = r$ dla $k = 1, \ldots, n$. Zatem $z_k = re^{i\theta_k}$ dla pewnych kąt $\theta_1, \ldots, \theta_n \in [0, 2\pi[$. Skoro $|z_k - z_{k+1}|^2 = |z_k - z_{k-1}|^2$ to

$$(z_k - z_{k+1})(\bar{z}_k - \bar{z}_{k+1}) = r^2 + r^2 - 2r^2\cos(\theta_k - \theta_{k+1}) =$$
$$r^2 + r^2 - 2r^2\cos(\theta_k - \theta_{k-1}) = (z_k - z_{k-1}|)(\bar{z}_k - \bar{z}_{k-1}).$$

Zatem różnicza między kątami jest taką samą. Więc, $\Delta = \theta_i - \theta_{i-1}$ i $\Delta = 2\pi/n$. Zatem, $z_k = e^{i\theta_0}e^{ik\Delta}$ dla $k = 1, \ldots, n$. Z tego wynika, że

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = r^2 e^{2i\theta_0} \sum_{k=1}^{n} e^{i4k\pi/n} = r^2 e^{2i\theta_0} e^{i4\pi/n} \frac{1 - e^{i4n\pi/n}}{1 - e^{i4\pi/n}} = 0$$

Pisąc $z_k = x_k + iy_k$ i $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, otrzymamy, że $z_k^2 = x_k^2 - y_2^k + 2ix_k y_k$. Więc,

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \sum_{k=1}^{n} [x_k^2 - y_k^2 + 2ix_k y_k] = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} [x_k^2 - y_k^2] = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0.$$

Dodatkowo, $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$ i

$$nr^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} [x_k^2 + y_k^2] \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = nr^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \frac{nr^2}{2}.$$

□

Ćwiczenie 5. Niech $f(z) \equiv z^{-1}$ dla $z \in \mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C} - \{0\}$. Wykazać, że dla każdego $u = e^{i\theta}$, gdzie $0 < \theta < \pi/2$ istnieje okrąg $C = C(s, r)$ (znaleźć środek s i promień r), przechodzący przez u i $\bar{u}$, f-niezmienniczy $f(C) = C$ i różne od $C(0, 1)$.

Rozwiązanie: Jeżeli s to środek i r to promień okręgu, to $|u - s| = |\bar{u} - s| = r$. Zatem

$$|u|^2 - s\bar{u} - \bar{s}u + s^2 = |u|^2 - \bar{s}u - su + s^2 = r^2 \Rightarrow \bar{s}(\bar{u} - u) = s(\bar{u} - u) \Rightarrow (\bar{s} - s)(\bar{u} - u) = 0.$$

Skoro $u = e^{i\theta}$ dla $0 < \theta < \pi/2\pi$ z założenia, to $u \neq \bar{u}$ i $\bar{s} = s$. Czyli $s \in \mathbb{R}$. Zatem

$$r^2 = |u - s|^2 \Rightarrow 1 = 1 - 2s\cos\theta + s^2.$$

Mamy, że $C \cap \mathbb{R} = \{s - r, s + r\}$. Z założenia $f(C \cap \mathbb{R}) = C \cap \mathbb{R}$. Więc, mamy dwie możliwości

$$f(s + r) = s + r, \qquad f(s + r) = s - r.$$

Nie może być $f(s + r) = s + r$. W takim przypadku, $f(s - r) = s - r$ też i z definicji f wynika, że

$$f(s \pm r) = s \pm r \Rightarrow |s \pm r| = 1.$$

To oznaczałoby, że $s = 0$, ale to niemożliwe z założenia. Skoro $f(s \pm r) = s \mp r$, to $(s + r)(s - r) = 1$. Zatem $s^2 - r^2 = 1$ i

$$r^2 = 1 - 2s\cos\theta + s^2 = s^2 - 1 \Rightarrow s = \frac{1}{\cos\theta},\ r = \tan\theta.$$

Na końcu sprawdzamy, że $C = C(s,r)$ jest niezmienniczy względem f. Mamy, że

$$z \in C(s,r) \Leftrightarrow |z-s|^2 = r^2 = s^2-1 \Leftrightarrow |z|^2 - s(z+\bar{z}) + s^2 = s^2 - 1 \Leftrightarrow |z|^2 - s(z+\bar{z}) + 1 = 0.$$

Ponieważ $z \neq C(s,r)$, to

$$z \in C(s,r) \Leftrightarrow 1 - s\frac{(z+\bar{z})}{|z|} + \frac{1}{|z|^2} = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right|^2 - s\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} \in C(s,r)$$

Wóczas, $C(s,r)$ jest f-niezmienniczy. □

Ćwiczenie 6. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Rozwiązanie: Skoro $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, to

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[e^{\frac{2\pi i}{2n+1}}\right]^k\right).$$

Korzytając ze wzoru sumy szeregu geometrycznego, czyli

$$\sum_{i=n_0}^{n} r^i = \frac{r^{n_0} - r^{n+1}}{1-r}, \qquad r \neq 1,$$

to

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[e^{\frac{2\pi i}{2n+1}}\right]^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{2\pi i}{2n+1}} - e^{\frac{2\pi(n+1)i}{2n+1}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{2n+1}}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{2n+1}} - e^{\frac{\pi(2n+1)i}{2n+1}}}{e^{-\frac{\pi i}{2n+1}} - e^{\frac{\pi i}{2n+1}}}\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{2n+1}}(1 - e^{\frac{2n\pi i}{2n+1}})}{e^{-\frac{\pi i}{2n+1}} - e^{\frac{\pi i}{2n+1}}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{2n+1}} e^{\frac{n\pi i}{2n+1}}(e^{\frac{-n\pi i}{2n+1}} - e^{\frac{n\pi i}{2n+1}})}{e^{-\frac{\pi i}{2n+1}} - e^{\frac{\pi i}{2n+1}}}\right) = \frac{\sin(\frac{n\pi}{2n+1})\cos(\frac{(n+1)\pi}{2n+1})}{\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}$$

$$= -\frac{\sin(\frac{n\pi}{2n+1})\cos(\frac{n\pi}{2n+1})}{\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)} = -\frac{\sin(\frac{2n\pi}{2n+1})}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)} = -\frac{\sin(\frac{2n\pi}{2n+1})}{2\sin\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right)} = -\frac{1}{2},$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Natomiast,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n} \cos\frac{k\pi}{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{Re}\left(\left[e^{\frac{\pi i}{2n+1}}\right]^k\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{2n+1}} - e^{\frac{(2n+1)\pi i}{2n+1}}}{1 - e^{\frac{\pi i}{2n+1}}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{2n+1}} + 1}{1 - e^{\frac{\pi i}{2n+1}}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(e^{\frac{\pi i}{2n+1}} + 1)(e^{\frac{-\pi i}{2n+1}} + 1)}{(1 - e^{\frac{\pi i}{2n+1}})(e^{\frac{\pi i}{2n+1}} + 1)}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{(e^{\frac{\pi i}{2n+1}} + 1)(e^{\frac{-\pi i}{2n+1}} + 1)}{(1 - e^{\frac{\pi i}{2n+1}})(e^{-\frac{\pi i}{2n+1}} + 1)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2 + e^{\frac{\pi i}{2n+1}} + e^{\frac{-\pi i}{2n+1}}}{-e^{\frac{\pi i}{2n+1}} + e^{-\frac{\pi i}{2n+1}}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2 + 2\cos(\frac{\pi i}{2n+1})}{-2i\sin(\frac{\pi i}{2n+1})}\right) = 0.$$

Więc,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

□

Ćwiczenie 7. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Wykazać, że

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n| \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \exists z \neq 0 : \exists r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}_+ : \\ z_j = r_j z \text{ dla } j \in 1, \ldots, n \end{array}\right). \tag{7.1}$$

Rozwiązanie: Dowód jest trywialny dla $n = 1$. Więc, założymy, że $n > 1$.

Udowodnimy, że z lewej strony (7.1) wynika prawa strona. Zdefiniujemy $s = z_1 + \ldots + z_n$. Dla $s = 0$, mamy, że z prawej strony (7.1) wynika, że $z_1 = \ldots = z_n = 0$ i jest trywialne, że prawa strona (7.1) jest prawdziwa.

Zakładamy teraz, że $s \neq 0$ i zdefiniujemy $w_j = z_j/s$ dla $j = 1, \ldots, n$. Dla dowolnej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ mamy, że $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$. Z tego,

$$1 = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}(w_j) \leq \sum_{j=1}^{n} |w_j| = 1.$$

Równość $\mathrm{Re}(z) = |z|$ spełnia się wtedy i tylko wtedy gdy $z \in \mathbb{R}_+$. Zatem, mamy, że

$$z_j = \omega_j z, \qquad \omega_j \in \mathbb{R}_+, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad z \neq 0.$$

Teraz udowodnimy, że z prawej strony (7.1) wynika lewa strona. Mamy

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} r_j z\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} r_j\right| |z| = \left(\sum_{j=1}^{n} |r_j|\right) |z| = \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

To kończy dowód.

Dodatkowo, też możemy udowodnić, że prawa strona (7.1) wynika z lewej strony (7.1) za pomocą indukcji. Dla $n = 2$, mamy, że jeżeli

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

i $z_1 + z_2 = 0$, to $z_1 = z_2 = 0$ i można przedstawić $z_2 = z_1 = 0z$ dla dowolnego $z \neq 0 \in \mathbb{C}$. Jeżeli $z_1 + z_2 \neq 0$, to

$$|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \Leftrightarrow (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|.$$

To równoważnie

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1\bar{z}_2|.$$

Skoro $s = z_1 + z_2 \neq 0$, to jedna ze zmiennych jest różna od zera, np. z_2. Wówczas,

$$z_1\bar{z}_2 = |z_1\bar{z}_2| \Leftrightarrow z_1 = |z_1\bar{z}_2|z_2/|z_2|^2 \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli zdefiniujemy

$$r = \frac{|z_1\bar{z}_2|}{|z_2|^2},$$

to widać, że prawa strona (7.1) się spełnia.

Teraz zakładamy, że prawa strona (7.1) wynika z lewej strony dla n i zakładamy

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

Skoro

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|$$

to

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}|$$

i

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|.$$

Z założenia, istnieją $s \in \mathbb{C}$ i liczby $r', r_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ takie, że

$$z_{n+1} = r_{n+1}s, \qquad z_1 + \ldots + z_n = r's, \qquad s \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Też z założenia

$$z_i = r_i s', \quad i = 1, \ldots, n, \qquad s' \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

gdzie $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}_+$. Więc,

$$z_1 + \ldots + z_n = (r_1 + \ldots + r_n)s' = r's.$$

Widać, że $s's^{-1} \in \mathbb{R}$. Więc, $s' = \lambda s$ dla $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Wobec tego,

$$z_i = \lambda_i s, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \qquad i = 1, \ldots, n+1.$$

$\square$