Podprzestrzeni wektorowe, bazy, rząd macierzy

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Sprawdzić, czy wektory

$$K_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad K_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}, \qquad K_3 := \begin{bmatrix} 2+2i \\ 4+3i \\ 1 \\ 3i \end{bmatrix},$$

są liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$ okreslając rząd macierzy.

Ćwiczenie 2. Sprawdzić, że W jest podprzestrzenią skończonego wymiaru przestrzeni $\mathbb{R}^N$, podać wymiar podprzestrzeni W i podać przykład jej bazy:

- $W = \{\mathbf{x} = (x_n \mid x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x}\,\text{jest ciągiem arytmetycznym}\}$,
- $W = \{\mathbf{x} : \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\}$.

Rozwiązanie: Podzbiór W to podprzestrzeń liniowa $\mathbb{R}^N$ wtedy i tylko wtedy gdy jest niepusty i dowolna liniowa kombinacja elementów W należy do W.

Przeanalizujemy czy pierwszy zbiór W jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^N$. Wiemy, że $\mathbf{x}$ należy do W wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{x}$ to ciąg arymetyczne. Dodatkowo, $\mathbf{x}$ to ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy gdy

$$\exists d \in \mathbb{R}, \qquad x_n = x_1 + (n-1)d, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

Dane dwa ciągi $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y} \in W$ mamy, że

$$\exists d_x, d_y \in \mathbb{R}, \qquad x_n = x_1 + (n-1)d_x, \qquad y_n = y_1 + (n-1)d_y, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zatem, dana dowolna liniowa kombinacja $\mathbf{z} := \lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y}$, gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, mamy, że

$$z_n := \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n \Rightarrow z_n = z_1 + (n-1)(\lambda_1 d_x + \lambda_2 d_y).$$

Zatem $\mathbf{z}$ jest ciągiem arytmetycznym i $\mathbf{z} \in W$. Czyli W jest domknięty względem liniowych kombinacji. Dodatkowo, ciąg $\mathbf{0} := (0, 0, \ldots)$ jest ciągiem arytmetycznym, $\mathbf{0} \in W$ i W jest niepusty. Z tego wynika, że W jest podprzestrzenią.

Szukamy teraz bazy W. Zdefiniujemy

$$\mathbf{a} := (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots), \qquad \mathbf{b} := (0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,).$$

Widać, że $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$. Dodatkowo, każdy ciąg arytmetyczny można wprowadzić do postaci $\mathbf{x} = x_0\mathbf{a} + d_x\mathbf{b}$. Zatem ciągi $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ generują W. Dodatkowo, $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nie są propocjonalne, więc, są liniowo niezależne. Z tego wynika, że W ma bazę $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\dim W = 2$.

Przeanalizujemy czy drugi zbiór W jest podprzestrzenią. Wiemy, że W to zbiórróżwiązań równania rekurencyjnego

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \qquad \forall n \in N_+. \tag{2.1}$$

Wiemy, że W to podprzestrzeń liniowa wtedy i tylko wtedy gdy jest niepusty i liniowa kombinacja elementów W należy do W. Widać, że W nie jest pusty: ciąg $\mathbf{0}$ spełnia równanie (**??**). Dodatkowo, jeżeli $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ spełniają to równania (**??**), to dla $\mathbf{z} = \lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y}$ otrzymamy, że

$$\begin{aligned} z_{n+2} = \lambda_1 x_{n+2} + \lambda_2 y_{n+2} &= \lambda_1(x_{n+1} + x_n) + \lambda_2(y_{n+1} + y_n) \\ &= \lambda_1 x_{n+1} + \lambda_2 y_{n+1} + \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n = z_{n+1} + z_n. \end{aligned}$$

Zatem $\mathbf{z}$ spełnia równania (**??**). Podsumując, W to podprzestrzeń liniowa $\mathbb{R}^N$.

Z (**??**) widać, że wartości pierwszych dwóch wyrazów ciągu rekurencyjnego określa wszystkie wartości tego ciągu. Ponadto, dane dowolne pierwsze wartości zawsze można określić jedno jedyne rozwiazanie (**??**). Z tego wynika, że dane ciągi

$$\mathbf{x_1} := (1, 0, 1, 1, 2, 3, \ldots), \qquad \mathbf{x_2} := (0, 1, 1, 2, 3, \ldots)$$

każdy inny ciąg $(a, b, \ldots) \in W$ ma postać

$$a\mathbf{x_1} + b\mathbf{x_2} = \mathbf{y}.$$

Więc, te ciągi $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in W$ generują W i skoro nie są proporcjonalne, to tworzą bazę W. Natomiast, nie znamy ogólnej postaci żadnego ciągu W. Teraz, opisujemy metodę, aby obliczyć ogólny wyraz ciągu W. Najpierw, szukamy bazy podprzestrzeni W. Mo zemy zauważyć, że możemy szukać ciągu W postaci

$$x_n = r^n, \qquad r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Jeżeli ten ciąg spełnia nasze równanie (**??**) dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, to

$$r^{n+2} = x_{n+2} = x_{n+1} + x_n = r^{n+1} + r^n \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Zatem, mamy dwa ciągi spełniające nasz warunek rekurencyjny:

$$\mathrm{r}_+ := (r_+, r_+^2, r_+^3, \ldots), \qquad \mathrm{r}_- = (r_-, r_-^2, r_-^3, \ldots).$$

Ewidentnie, $\mathbf{r}_+, \mathbf{r}_-$ nie są proporcjonalne, zatem są liniowo niezależne i tworzą bazę W. Dowolny element $\mathbf{x} \in W$ ma postać

$$\mathbf{x} = \lambda_+ \mathbf{r}_+ + \lambda_- \mathbf{r}_-.$$

Jeżeli $\mathbf{x}$ ma x_1, x_2 jako pierwsze wyraze, to

$$x_1 = \lambda_+ r_+ + \lambda_- r_-, \qquad x_2 = \lambda_+ r_+^2 + \lambda_- r_-^2$$

ten układ zawsze ma rozwiązanie λ_+, λ_-. Korzystając z tego ogólny wyraz $\mathbf{x}$ to

$$x_n = \lambda_+ r_+^n + \lambda_- r_-^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

□

Ćwiczenie 3. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni

$$V := \{v \in \mathbb{R}_3[\cdot] : v(1) = \dot{v}(0) = \frac{1}{2} v(0)\} \subset \mathbb{R}_3[\cdot].$$

Rozwiązanie: Przestrzeń liniowa $\mathbb{R}_3[\cdot]$ posiada bazę $v_0 := 1, v_1 := t, v_2 := t^2, v_3 := t^3$. Więc, każdy element $v \in \mathbb{R}_3[\cdot]$ można zapisać w postaci

$$v = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3,$$

dla pewnych $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Z warunku $v(1) = \dot{v}(0)$ wynika, że

$$v(1) = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 = \dot{v}(0).$$

Dodatkowo, mamy, że $\dot{v}(0) = \frac{1}{2} v(0)$ i $\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda_0$. Więc,

$$W = \{v = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 \in \mathbb{R}_3[\cdot] \,|\, \lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, 2\lambda_1 = \lambda_0\}.$$

Wtedy, $\lambda_3 = -\lambda_0 - \lambda_2 = -2\lambda_1 - \lambda_2$ i

$$v \in W \Leftrightarrow v = 2\lambda_1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + (-2\lambda_1 - \lambda_2)t^3, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Z tego wynika, że

$$v = \lambda_1(2 + t - 2t^3) + \lambda_2(t^2 - t^3) \Rightarrow W = \langle 2 + t - 2t^3, t^2 - t^3 \rangle.$$

Widać, że $w_1 = 2 + t - 2t^3$ i $w_2 = t^2 - t^3$ generują W. Ponadto, takie wielomiany są liniowo niezależne:

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_1\omega_1(0) + \lambda_2\omega_2(0) = 2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0.$$

Ponadto, widać, że takie dwa wektory nie są liniowo zależne ponieważ nie są proporcjonalne. $\square$

Ćwiczenie 4. Niech $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2 = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\}$. Dowieść, że gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, zbiór W jest 1-wymiarową przestrzenią, lecz jest sumą mnogościową dwóch 2-wymiarowych podprzestrzeni gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Rozwiązanie: Mamy, że

$$\begin{gathered}(x_1, x_2, x_3) \in W \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \Leftrightarrow \\ 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0 \Leftrightarrow \\ x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3+x_3^2+x_1^2-2x_1x_3 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2 = 0.\end{gathered}$$

Jeżeli założemy, że W to podprzestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$, to z poprzedniego warunku wynika, że

$$x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow W = \{(x_1, x_1, x_1) \,|\, x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

Więc, W to powłoka liniowa wektoru $(1,1,1)$. Z tego łatwo wynika, że W to podprzestrzeń liniowa.

Natomiast, jeżeli zakładamy, że $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, to

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$

ma więcej rozwiązań niż w poprzednym przypadku. Właśnie, mamy, że

$$x_1^2-x_1(x_2+x_3)+x_2^2+x_3^2-x_2x_3=0.$$

Więc,

$$x_1=\frac{x_2+x_3\pm\sqrt{(x_2+x_3)^2-4(x_2^2+x_3^2-x_2x_3)}}{2}=\frac{x_2+x_3\pm\sqrt{-3x_2^2-3x_3^2+6x_2x_3}}{2}.$$

Proszę zauważyć, że dla liczb rzeczywistych $\sqrt{k}>0$ i $\pm\sqrt{k}$ oznacza pierwiastek nieujemny i niedodatni z k. Natomiast, dla liczb zespolonych $\pm\sqrt{z}$ to tylko notacja aby wysnaczyć, że mamy dwa pierwiastki. Nie ma naturalny sposób, aby wyznaczyć co to jest $\sqrt{z}$. Biorąc to pod uwagę, mamy, że

$$x_1=\frac{x_2+x_3\pm\sqrt{(x_2+x_3)^2-4(x_2^2+x_3^2-x_2x_3)}}{2}=\frac{x_2+x_3\pm\sqrt{-3x_2^2-3x_3^2+6x_2x_3}}{2}$$

i

$$x_1=\frac{x_2+x_3\pm\sqrt{-3}(x_2-x_3)}{2}\Rightarrow x_1^\pm=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}x_2+\frac{1\mp\sqrt{3}i}{2}x_3.$$

Widać, że

$$\omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Rightarrow\omega^2=-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=-\bar{\omega},\qquad x_1^+=\omega x_2+\bar{\omega}x_3,x_1^-=\bar{\omega}x_2+\omega x_3.$$

Dodatkowo,

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\Leftrightarrow(x_1-x_1^+)(x_1-x_1^-)=0.$$

Więc, $W=W^+\cup W^-$, gdzie

$$W^-=\{(\omega x_2+\bar{\omega}x_3,x_2,x_3)\,|\,x_2,x_3\in\mathbb{R}\},\qquad W^+=\{(\bar{\omega}x_2+\omega x_3,x_2,x_3)\,|\,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}.$$

Z tego łatwo zobaczyć, że W to nie podprzestrzeń liniowa, np $(\omega,1,0),(\bar{\omega},1,0)\in W$ ale $(\omega+\bar{\omega},2,0)=(1,2,0)\notin W$. $\square$

Ćwiczenie 5. Niech $n \in \mathbb{N}$, sprawdzić, że wielomiany $v_k(t) = t^k + t^{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, tworzą bazę podprzestrzeni $W := \{v \in \mathbb{K}_n[t], v(-1) = 0\} \subset \mathbb{K}_n[t]$.

Rozwiązanie: Aby udownodnić, że $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę podprzestrzeni W musimy sprawdzić, że są liniowo niezależne i generujące. Udowodnimy, że $v_1, \ldots, v_n$ są generujące. Dany wielomian $P \in W$, mamy, że z definicje przestrzeni $P(-1) = 0$. Więc, z twierdzenia Bezouta wynika, że $P(t) = (t+1)Q(t)$ dla pewnego wielomianu $Q(t)$ stopnia $q \leq n-1$. Zatem, $Q(t) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \lambda_\alpha t^\alpha$ dla pewnych współczynnikach $\lambda_\alpha \in \mathbb{K}$. Wówczas,

$$P(t) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \lambda_\alpha (t^{\alpha+1} + t^\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \lambda_\alpha v_{\alpha+1}(t)$$

Dodatkowo, $v_k(-1) = 0$ dla $k = 1, \ldots, n$. Więc, $v_1, \ldots, v_n \in W$ i generują W.

Wielomiany $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne. Mamy, że

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_{\alpha-1} v_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_{\alpha-1}(t^\alpha + t^{\alpha-1}) = (t+1) \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_{\alpha-1} t^{\alpha-1}.$$

Przestrzeń wielomianów o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$ to dziedzina całkowitości, czyli to jest pierścienią i jeżeli $PQ = 0$ to albo $P = 0$ albo $Q = 0$. Zatem,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_{\alpha-1} t^{\alpha-1} = 0.$$

Jeżeli wielomian jest równy zero to oznacza, że wszystkie współczynniki równają się zeru. Zatem $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$. Hence, $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne.

Z tego wynika, że $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę W. $\square$