## Suma i przecięcie podprzestrzeń, suma prosta, przestrzeń ilorazowa

Javier de Lucas

**Ćwiczenie 1.** W zależności od wartości parametru $p$, podaj wymiar przestrzeni $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, gdzie

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+2p \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} p \\ 5 \\ 3+p \\ -3p \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 10+p \\ -13 \end{bmatrix}.$$

**Ćwiczenie 2.** Podać bazę sumy i przecięcia powłoki liniowej $V = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ oraz $W = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, gdzie

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Podaj postać parametryczną i uwikłaną $V$, $W$, $V \cap W$ i $V + W$. Sprawdź, że

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W.$$

*Rozwiązanie*: W postaci parametrycznej piszemy elementy podprzestrzeni liniowej jako liniowe kombinacje elementów bazy tej podprzestrzeni. Dla $V$ mamy, że

$$V = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Szukamy bazy $V$. Powłoka liniowa układu generającego nie zmienia się kiedy zastąpimy wektor tego układu przez liniową kombinację zawierając taki wektor. Zatem

$$V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

i

$$V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Skoro
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
nie są proporcjonalne, to są liniowo niezależne i tworzą bazę $V$. Zatem, postać parametryczna $V$ to
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2.$$
Z postaci paramatrycznej można zapisać postać uwikłaną. W tej postaci opisujemy elementy podprzestrzeni jako rozwiązania układu równań liniowych. Na przykład, wcześniej mamy, że
$$x_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2, \qquad x_2 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2, \qquad x_3 = \lambda_1, \qquad x_4 = 0.$$
Zatem elementy $V$ są takie elementy, które spełniają, że
$$x_4 = 0, \qquad x_1 = x_3 + 2\lambda_2, \qquad x_2 = 2x_3 + 3\lambda_2.$$
Usunąc $\lambda_1$ i $\lambda_2$ możemy znaleźć równości między współrzędnami elementów $V$:
$$x_4 = 0, \qquad \lambda_2 = (x_1 - x_3)/2 = (x_2 - 2x_3)/3.$$
Wtedy
$$x_4 = 0, \qquad 0 = 3x_1 - 3x_3 - 2x_2 + 4x_3 = 3x_1 + x_3 - 2x_2.$$
Teraz dla drugiej podprzestrzeni
$$W = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$
Ale powłoka liniowa nie zmienia się kiedy zastąpimy wektor przez liniową kombinację zawierając taki wektor. Zatem
$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$
Skoro
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
nie są proporcjonalne, to są liniowo niezależne i tworzą bazę $W$.

Zatem, postać parametryczna podprzestrzeni $W$ to

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Z postaci paramatrycznej można zapisać postać uwikłaną. Ta postać polega na tym, że opisujemy elementy podprzestrzeni jako rozwiązania układu równań liniowych. Na przykład, wcześniej mamy, że

$$x_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2, \qquad x_2 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2, \qquad x_3 = 2\lambda_1 - \lambda_2, \qquad x_4 = 0.$$

Zatem elementy $W$ są takie elementy, które spełniają, że

$$x_4 = 0, \qquad x_2 = 2(x_1 - 2\lambda_2) + 3\lambda_2, \qquad x_3 = 2(x_1 - 2\lambda_2) - \lambda_2$$

Zatem

$$x_4 = 0, \qquad x_2 = 2x_1 - \lambda_2, \qquad x_3 = 2x_1 - 5\lambda_2$$

i

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 2x_1 - 5(2x_1 - x_2).$$

Wtedy

$$x_4 = 0, \qquad x_3 + 8x_1 - 5x_2 = 0.$$

Podprzestrzeń $V \cap W$ można łatwo oblizcyć za pomocą postaci uwikłanej podprzestrzeni $V, W$. Widać, że

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in V \cap W \Leftrightarrow x_4 = 0,\ x_3 + 8x_1 - 5x_2 = 0, x_4 = 0,\ 0 = 3x_1 + x_3 - 2x_2.$$

Zatem

$$x_4 = 0, \quad 5x_1 - 3x_2 = 0, \quad 3x_1 + x_3 - 2x_2 = 0.$$

To postać uwikłaną $V \cap W$. Możemy obliczyć teraz elementy $V \cap W$. Możemy zakładać, że $x_2$ przejmuję dowolną wartość $x_2 = \lambda$ i wtedy

$$x_4 = 0, \quad x_1 = 3/5\lambda, \quad x_3 = 2\lambda - 9/5\lambda = \lambda/5.$$

Wówczas

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in V \cap W \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3/5 & 1 \\ 1/5 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow V \cap W = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Drugie wyrażenie daje nam postać parametryczną $V \cap W$. Na samym koncu mamy, że $V+W$ to podprzestrzeń zgenerowana przez elementy $V$ i $W$. Wtedy

$$V+W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Zatem

$$V+W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$V+W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$V+W = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Widać, że

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

tworzą bazę $V+W$. Postać uwikłana $V+W$ to $x_4 = 0$. □

**Ćwiczenie 3.** Dane są podprzeszteni $V, W \subset \mathbb{C}^2_2$, gdzie $\mathbb{C}^2_2$ to przeztrzeń liniowa nad $\mathbb{C}$ macierzy $2 \times 2$ o współczynnikack w ciele $\mathbb{C}$, postaci

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \mid x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0 \right\}, \qquad W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Oblicz $V+W$, $V \cap W$. Czy $\mathbb{C}^2_2$ jest sumą prostą podprzestrzeni $V$ i $W$? W takim przypadku podaj rokład na składowe wektorów

$$a = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Rozwiązanie*: Z definicji $V+W$ to zbiór $\mathbb{C}^2_2$ wektorów postaci

$$V+W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}.$$

Aby ustalić $V+W$, obliczymy układy generujące $V$ i $W$. Takie układy dają nam układ generujący $W+V$.

Dla $V$ mamy

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in V \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Z tego wynika, że

$$V = \left\langle M_1^V := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, M_2^V := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Łatwo widać, że

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

to baza dla $V$. Dla $W$ już mamy, że baza to

$$M_1^W := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_2^W := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Więc,

$$V + W = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Zastąpiąc elementy układu generującego $V + W$ przez liniowe kombinacje z tym elementem widać ,że

$$V + W = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$V + W = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V + W = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Więc, $V + W$ jest zgenerowana przez bazę kanoniczną $\mathbb{C}_2^2$. Zatem, $W + V = \mathbb{C}_2^2$ i $\dim W + V = 4$.

Można bezpośrednio zauważyć, że

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow V \cap W = 0.$$

Możemy obliczyć też obliczyć $V \cap W$ za pomocą postaci uwikłanych $V$ i $W$. Znamy już postać uwikłaną $V$. Dla $W$ mamy, że

$$\left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{array}\right] \in W \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{array}\right] = \lambda \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] + \mu \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Z tego wynika, że $x_1 = x_4 = \mu$ i $x_2 = x_3 = \lambda$ i postać uwykłana to $x_1 - x_4 = 0$, $x_2 - x_3$. Wtedy widać, że

$$v = \left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{array}\right] \in W \cap V \Leftrightarrow x_1 = x_4, x_2 = x_3, x_1 = -x_4, x_2 = -x_3.$$

Hence,

$$v = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right].$$

Skoro $V + W = \mathbb{C}_2^2$ 0 $V \cap W = \{0\}$ to mówi się, że $V, W$ są w sumie prostej. Z tego wynika, że każdy element $M \in \mathbb{C}_2^2$ można zapisać tylko w jednym sposób jak $M = M_V + M_W$ gdzie $M_V \in V$ i $M_W \in W$. Właśnie, dany drugi rozkład $M = M'_V + M'_W$ to

$$M_V + M_W = M'_V + M'_W \Leftrightarrow M_V - M'_V = M'_W - M_W.$$

Prawa strona należy do $V$ i lewa do $W$. Skoro $V \cap W = \{0\}$ to

$$0 = M_V - M'_V = M'_W - M_W$$

i z tego wynika, że rozkład $M$ jest jedynym. W naszym przypadku, musimy obliczyć $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ takie, że

$$a = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{array}\right] = \lambda_1 M_1^V + \lambda_2 M_2^V + \lambda_3 M_1^W + \lambda_4 M_2^W. \tag{3.1}$$

Takie układ równań liniowych ma postać

$$1 = \lambda_2 + \lambda_3, \qquad -1 = \lambda_1 + \lambda_4, \qquad 3 = -\lambda_1 + \lambda_4, \qquad 1 = -\lambda_2 + \lambda_3.$$

Z tego wynika, że

$$\lambda_3 = 1, \qquad \lambda_4 = 1, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 = -2.$$

Aby rozwiązać taki układ możemy też korzystać z form liniowych

$$\omega_1 = x_1 + x_4, \omega_2 = x_2 + x_3, \omega_3 = x_1 - x_4, \omega_4 = x_2 - x_3.$$

Właśnie zastosując $\omega_1$ po obu stronach (3.1) otrzymujemy

$$2 = \omega_2(a) = \omega_1(\lambda_1 M_1^V + \lambda_2 M_2^V + \lambda_3 M_1^W + \lambda_4 M_2^W) = 2\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 1.$$

Podobnie

$$0 = \omega_2(a) = \omega_2(\lambda_1 M_1^V + \lambda_2 M_2^V + \lambda_3 M_1^W + \lambda_4 M_2^W) = 2\lambda_4 \Rightarrow \lambda_4 = 1.$$

Znowu

$$0 = \omega_3(a) = \omega_2(\lambda_1 M_1^V + \lambda_2 M_2^V + \lambda_3 M_1^W + \lambda_4 M_2^W) = 2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 0.$$

$$-4 = \omega_4(a) = \omega_2(\lambda_1 M_1^V + \lambda_2 M_2^V + \lambda_3 M_1^W + \lambda_4 M_2^W) = 2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = -2.$$

Zatem

$$a = -2M_1^V + M_1^W + M_2^W$$

i

$$a = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in V, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in W.$$

□

**Ćwiczenie 4.** Niech $V = \mathbb{R}^3$ i $W = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\}$. Oblicz klasy przestrzeni $V/W$ i podaj interpretację geometrycznţych klas. Udowodnij, że $V/W$ jest isomorficzny do $\mathbb{R}$.

*Rozwiązanie*: Z definicji, klasa absktrakcji $[v]$ przestrzeni $V/W$ to zbiór

$$[v] = \{w \in V \,|\, v - w \in W\}.$$

Widać, że zbiór

$$v + W := \{v + w \,|\, w \in W\}$$

należy do $[v]$. Właśnie, widać z definicji $[v]$, że każdy element $[v]$ należy też do $[v]$. Zatem, $[v] = v + W$.

Geometrycznie, $W$ to płaszczyźna $\pi$ przechodąca przez $(0,0,0)$. Widać, że $W = [0]$. Dodatkowo, mamy, że $[v]$ to płaśzczyźna $\pi_v$ 'równoległa' do $W$ przechodząc przez $v$. W dokładności, aby zdefiniować równoległość potrzebujemy jakieś struktury matematycznej aby zdefiniować kąty i jeszcze tego nie mamy. Tutaj równoległy tylko oznacza, że płaszczyźnie $\pi$ i $\pi_v$ mają puste przecięcie.

Możemy udowodnić, że $V/W \simeq \mathbb{R}$ dwoma sposobami. Możemy zdefiniować odwzorowanie:

$$\Phi : V/W \in [v] \mapsto \Phi([v]) = \omega(v) \in \mathbb{R},$$

gdzie $\omega(v) = (x + y + z)(v)$, gdzie $x, y, z$ to są odwzorowanie

$$x(x_1, x_2, x_3) = x_1, \qquad y(x_1, x_2, x_3) = x_2, \qquad z(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

Można udowodnić, że $\omega$ to odwzorowanie liniowe, cyzli $\omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \omega(v_1) + \lambda_2 \omega(v_2)$ dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Teraz, udowodnimy, że $\Phi$ jest dobrze zdefiniowane. Właśnie, trzeba zauważyć, że może sią zdarzyć, że $[v_1] = [v_2]$. A takim przypadku $\Phi([v_1]) = \omega(v_1)$ i $\Phi([v_2]) = \omega(v_2)$. Ale skoro $[v_1] = [v_2]$, nasze odwzorowanie jest dobrze zdefiniowane wtedy i tylko wtedy gdy $\omega(v_1) = \omega(v_2)$. Natomiast,

$$[v_1] = [v_2] \Leftrightarrow \exists w \in W, v_1 = v_2 + w \Rightarrow \omega(v_1) = \omega(v_2) + \omega(w).$$

Z definicji $W$ wynika, że $\omega(w) = 0$. Zatem $\omega(v_1) = \omega(v_2)$ i $\Phi$ jest dobrze zdefiniowane.

Udowodnimy, że $\Phi$ jest liniowe. Trzeba pamiętać, że $V/W$ ma strukturą przestrzeni liniowej z działaniami:

$$\lambda[v_1] = [\lambda v_1], \qquad [v_1 + v_2] = [v_1] + [v_2], \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in V.$$

Teraz

$$\Phi(\lambda_1[v_1] + \lambda_2[v_2]) = \Phi(\lambda_1[v_1] + \lambda_2[v_2]) = \Phi([\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2])$$

i zatem

$$\omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \omega(v_1) + \lambda_2 \omega(v_2) = \lambda_1 \Phi([v_1]) + \lambda_2 \Phi([v_2]).$$

Teraz, mamy udowodnić, że $\Phi$ jest injekcją, czyli musimy sprawdzić, że

$$\Phi([v_1]) = \Phi([v_2]) \Rightarrow [v_1] = [v_2].$$

Korzystając z liniowości $\omega$ mamy, że

$$\Phi([v_1]) = \Phi([v_2]) \Rightarrow \omega(v_1) = \omega(v_2) \Rightarrow \omega(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \in W \Rightarrow [v_1] = [v_2].$$

Więc, $\Phi$ jest injekcją.

Sprawdzamy, że $\Phi$ jest surjekcją. Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ mamy, że

$$\Phi([\lambda(1,0,0)]) = \omega(\lambda(1,0,0)) = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zatem, $\Phi(V/W) = \mathbb{R}$ i $\Phi$ jest surjekcją. Z tego wynika, że $\Phi$ jest izomorfizmem.

Istnieje inna metoda, aby udowodnić, że $\Phi$ jest izomorfizmem. Trzeba udowodnić, że posiada funkcja odwrotna po prawie i lewej stronie, czyli istnieje $\bar{\Phi} : \mathbb{R} \to V/W$ takie, że $\bar{\Phi} \circ \Phi = \mathrm{Id}_{V/W}$ i $\Phi \circ \bar{\Phi} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Możemy zdefinjować $\bar{\Phi} : \mathbb{R} \in \lambda \mapsto [\lambda(1,0,0)] \in V/W$. Wtedy

$$\Phi \circ \bar{\Phi}(\lambda) = \Phi([\lambda(1,0,0)] = \omega(\lambda(1,0,0)) = \lambda = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(\lambda)$$

i

$$\bar{\Phi} \circ \Phi([v]) = \bar{\Phi}(\omega(v)) = \omega(v)[(1,0,0)].$$

Skoro $\omega(v) = \omega(\omega(v)(1,0,0))$, to $[v] = [\omega(\omega(v)(1,0,0))]$ i

$$\bar{\Phi} \circ \Phi([v]) = \bar{\Phi}(\omega(v)) = [v] = \mathrm{Id}_{V/W}([v]).$$

Więc, $\Phi$ jest bijekcją.

Ostatecznie, możemy zdefiniować $\Phi$ inaczej. Dana podprzestrzeń $W$, możemy zdefiniować podprzestrzeń $\bar{W}$ taką, że $W \oplus \bar{W} = \mathbb{R}^3$, np $\bar{W} = \langle(1,0,0)$. W takim przypadku, każdy element $v \in \mathbb{R}^3$ ma tylko jeden rozkład

$$v = v_W + v_{\bar{W}}, \qquad v_W \in W, v_{\bar{W}} \in \bar{W}.$$

Korzystając z tego, zdefiniujemy

$$\Phi : V/W \ni [v] \mapsto v_W \in \bar{W}$$

Takie odwzorowanie jest dobrze zdefiniowane, czyli jeżeli $[v] = [w]$ to $\Phi([v_1]) = \Phi([v_2])$. Właśnie,

$$[v^1] = [v^2] \Leftrightarrow \exists w \in W, v^1_W + v^1_{\bar{W}} = v^2_W + v^2_{\bar{W}} + w \Leftrightarrow v^1_W - v^2_W = v^2_{\bar{W}} + w - v^1_{\bar{W}}$$

Skoro $W \cap \bar{W}$, lewa strona należy od $W$ i prawa do $\bar{W}$, to

$$[v^1] = [v^2] \Leftrightarrow v_W^1 - v_W^2 = 0 \Leftrightarrow v_W^1 = v_W^2.$$

Zatem $\Phi([v^1]) = \Phi([v^2])$. Poza tym, $\Phi)[v^1] = \Phi([v^2]) \Rightarrow [v^1] = [v^2]$ i $\Phi$ jest injekcją. Dodatkowo, $\Phi$ jest surjekcją ponieważ dla dowolnego elementu $e \in \bar{W}$ mamy, że

$$\Phi([e]) = e.$$

Więc, $\Phi$ jest bijekcją i skoro $\bar{W} \simeq \mathbb{R}$ wynika, że $V/W \simeq \mathbb{R}$. $\square$