Przestrzeń dualna, annihilatory

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Sprawdź, czy następujące odwzorowania są formami liniowymi:

$$a)\ D : C^\infty(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \sum_{n=0}^{p} a_n \frac{d^n f}{dt^n}(t_0) \in \mathbb{R}, \qquad a_n \in \mathbb{R}, \qquad p \in \mathbb{N}, \qquad t_0 \in \mathbb{R},$$

$$b)\ D : C^0([0,1]) \ni f \mapsto \int_{t_0}^{t_1} e^{ax'} f(x')dx' \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}, t_0, t_1 \in [0,1],$$

$$c)\ \mathrm{Tr} : M(n,\mathbb{K}) \ni \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_{ii} \in \mathbb{K}.$$

Ćwiczenie 2. Dana jest przestrzeń liniowa $M_2(\mathbb{R})$ macierzy 2×2 o współczynnikach w $\mathbb{R}$. Oblicz bazę dualną bazy

$$m_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Musimy znaleźć formy liniowe $\omega_1, \dots, \omega_4 : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ takie, że

$$\omega_i(m_j) = \delta_i^j,$$

gdzie δ_i^j to funkcja delta Kroneckera, czyli $\delta_i^j = 1$ dla $i = j$ i $\delta_i^j = 0$ dla $i \neq j$. Korzystając z form liniowych

$$\theta_i : M_2(\mathbb{R}) \ni \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \mapsto x_i \in \mathbb{R},$$

mamy, że

$$\omega_1 = \theta_1 - \theta_3, \qquad \omega_2 = \theta_4 - \theta_1, \qquad \omega_3 = \theta_1 + \theta_2 - \theta_4, \qquad \omega_4 = -\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$$

spełniają takie warunki. Skoro baza dualna jest jedyna, to $\omega_1, \dots, \omega_4$ to baza dualna bazy $\theta_1, \dots, \theta_4$.

Jeżeli nie widać bezpośrednio jaka jest baza dualna, to musimy obliczyć $\omega_1, \dots, \omega_4$. Za pomocą bazy dualnej mamy, że

$$\omega_1 = \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta.$$

Ta forma liniowa spełnia, że

$$1 = \omega_1(m_1) = \lambda_1 + \lambda_4, \quad 0 = \omega_1(m_2) = \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$0 = \omega_1(m_3) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \quad 0 = \omega_1(m_4) = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4.$$

Macierzowo taki uklad wyglada następująco

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Zatem $\lambda_3 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_4 = 0$ i $\lambda_1 = 1$ Dla drugiej formy ω_2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zatem $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_4 = 1$ i $\lambda_1 = -1$. Dla ω_3:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zatem $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_4 = -1$ i $\lambda_1 = 1$. Dla ω_4:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Zatem $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_4 = 1$ i $\lambda_1 = -1$. $\square$

Ćwiczenie 3. Dana jest przestrzeń $C^0([-1,1])$ funkcji ciągłych na $[-1,1]$. Dane są podprzestrzenie $P = \{f \in C^0([-1,1]) \,|\, f(x) = f(-x)\}$, $N = \{f \in C^0([-1,1]) \,|\, f(x) = -f(-x)\}$. Dowieść, że $P \oplus N = C^0([-1,1])$. Skonstruuj podprzestrzeni $B_1, B_2 \subset [C^0([-1,1])]^*$ takie, że

$$f \in P \leftrightarrow \omega_1(f) = 0 \ \forall \omega_1 \in B_1, \qquad f \in N \leftrightarrow \omega_2(f) = 0 \ \forall \omega_2 \in B_2.$$

Rozwiązanie: Zdefiniujemy

$$\delta_x : C^0[-1,1] \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

dla $x \in [-1,1]$. Łatwo udowodnić, że δ_x jest formą liniową:

$$\delta_x(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda \delta_x(f_1) + \lambda_2 \delta_x(f_2),$$

dla $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in C^0[-1,1]$. Widać, że $f \in P$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{aligned} f \in P \Leftrightarrow f(x) = f(-x), \forall x \in [-1,1] \Leftrightarrow \delta_x(f) = \delta_{-x}(f),\ \forall x \in [-1,1] \\ \Leftrightarrow (\delta_x - \delta_{-x})(f) = 0, \forall x \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Widać, że jeżeli $(\delta_x - \delta_{-x})(f) = 0$ dla x to $(\delta_x - \delta_{-x})(f) = 0$ dla $-x$. Więc,

$$f \in P \Leftrightarrow (\delta_x - \delta_{-x})(f) = 0, \forall x \in [0,1].$$

Formy $\omega_x = \delta_x - \delta_{-x}$ zgenerują podprzestrzenią $B_1 \subset [C^0[[-1,1]])]^*$. Widać, że

$$f \in P \Leftrightarrow \omega(f) = 0, \forall \omega \in B_1.$$

Podobnie

$$f \in N \Leftrightarrow \omega(f) = 0, \forall \omega \in B_2,$$

gdzie $B_2 = \langle \omega'_x = \delta_x + \delta_{-x} | x \in [0,1] \rangle$.

□

Ćwiczenie 4. Dana jest podprzestrzeń $\mathbb{R}_n[\cdot]$ wielomianów o współczynnikach w ciele $\mathbb{R}$ stopnia mniejszego/równego n. Dana jest baza $P_0 = 1, \ldots, P_n = t^n$ wielomianów $\mathbb{R}_n[\cdot]$. Zbuduj bazę dualną.

Rozwiązanie: Musimy znaleźć formy liniowe $\omega_0, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}_n[\cdot]$ takie, że $\omega_i(P_j) = \delta_i^j$. Wiemy, że istnieje tylko jedna taka baza. Zdefiniujemy

$$\delta^k : \mathbb{R}^n[\cdot] \ni P \mapsto \frac{1}{k!}\frac{d^k P}{dt^k}(0) \in \mathbb{R}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

gdzie $\delta^0 P = P(0)$. Wtedy łatwo widać, że

$$\delta^k(t^j) = \delta_j^k.$$

□

Ćwiczenie 5. Dana jest podprzestrzeń V przestrzeni liniowej E. Udowodnij, że zbiór V° wszystkich form liniowych $\omega \in E^*$ takich, że $\omega(v) = 0$ dla każdego $v \in V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni E^*. Jeżeli $\dim E < \infty$, wykaż, że $\dim V^\circ = \dim E - \dim V$.

Rozwiązanie: Udowodnimy, że V° jest podprzestrzenią liniową. Aby to zrobić pokazujemy, że jest niepusty i że dowolna liniowa kombinacja elementów V° należy do V°.

Widać, że V° jest niepusty ponieważ forma liniowa zero, czyli $\omega : e \in E \to 0 \in \mathbb{R}$ należy do V°. Teraz, dane dowolne formy liniowe $\omega_1, \omega_2 \in V^\circ$ i skalary $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mamy, że

$$(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)(v) = \lambda_1\omega_1(v) + \lambda_2\omega_2(v) = 0.$$

Zatem V° jest podprzestrzenią liniową.

Udowodnimy teraz, że jeżeli $\dim E < \infty$ to $\dim V^\circ = \dim E - \dim V$. Dana baza $\{v_1, \ldots, v_r\}$ podprzestrzeni V, możemy rozszerzyć tą bazę do bazy przestrzeni E za pomocą pewnych wektorów $v_{r+1}, \ldots, v_n$, gdzie $n = \dim V$. Do bazy $\{v_1, \ldots, v_r\}$ przestrzeni liniowej E istnieje zawsze baza dualna $\omega_1, \ldots, \omega_r$ spełniająca, że

$$\omega_i(v_j) = \delta^i_j,$$

gdzie δ^i_j to delta Kroneckera, czyli $\delta^i_j = 1$ dla $i = j$ i $\delta^i_j = 0$ dla $i \neq j$. We szczególności widać, że dla $i = r+1, \ldots, n$ mamy, że $\omega_i(v_j) = 0$. To oznacza, że formy $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_n$ zerują się na bazie podprzestrzeni V. Skoro $v_1, \ldots, v_r$ generują V i $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_r$ sąliniowe, to te formy liniowe zerują się na podprzestrzeni V. Wówczas, formy liniowe podprzestrzeni $\langle \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n \rangle$ zerują się na V, czyli

$$\langle \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n \rangle \subset V^\circ.$$

Teraz możemy udowodnić, że $V^\circ \subset \langle \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n \rangle$. Dana dowolna forma liniowa $\omega \in V^\circ$, taka forma liniowa można zapisać jako liniową kombinację elementów bazy dualnej

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \omega_\alpha.$$

Skoro ω się zeruje na V, to zeruje się na $v_1, \ldots, v_r$. Więc,

$$0 = \omega(v_j) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \omega_\alpha(v_j) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \delta^j_\alpha, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Z tego wynika, że $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$. Więc,

$$\omega = \sum_{\alpha=j+1}^{r} \lambda_\alpha \omega_\alpha \in \langle \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n \rangle.$$

Zatem $V^\circ \subset \langle \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n \rangle$ i

$$V^\circ = \langle \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n \rangle.$$

To oznacza, że $\dim V^\circ = n - r$. $\square$

Ćwiczenie 6. Dane są podprzestrzenie V, W przestrzeni liniowej E. Udowodnij, że

$$(V+W)^\circ = V^\circ \cap W^\circ, \qquad V^\circ + W^\circ \subset (V \cap W)^\circ, \qquad V \subset V^{\circ\circ}$$

Jeżeli $\dim E < \infty$, to $V^{\circ\circ} = V$ i $V^\circ + W^\circ = (V \cap W)^\circ$.

Rozwiązanie:

Najpierw, udowodnimy, że $(V+W)^\circ = V^\circ \cap W^\circ$. Jeżeli $\omega \in (V+W)^\circ$, to ω zeruję się we szególności na V i na W. Zatem $\omega \in V^\circ \wedge \omega \in W^\circ$. Wóczas $\omega \in W^\circ \cap V^\circ$ i $(V+W)^\circ \subset W^\circ \cap V^\circ$.

Odwrotnie, zakładamy, że $\omega \in V^\circ \cap W^\circ$. Z definicji przestrzeni $V+W$, każdy element $e \in V+W$ można zapisać, jako sumę $e = e_V + e_W$, gdzie $e_V \in V$ i $e_W \in W$. Skoro ω jest liniowa, to

$$\omega(e) = \omega(e_V) + \omega(e_W).$$

Skoro $\omega \in V^\circ$ i $\omega \in W^\circ$, to

$$\omega(e) = \omega(e_V) + \omega(e_W) = 0 + 0 = 0.$$

Zatem, $\omega(e) = 0$ dla dowolnego $e \in V+W$ i $\omega \in (V+W)^\circ$. Z tego wynika, że $V^\circ \cap W^\circ \subset (V+W)^\circ$.

Ponieważ $(V+W)^\circ \subset V^\circ \cap W^\circ$ i $V^\circ \cap W^\circ \subset (V+W)^\circ$, to $V^\circ \cap W^\circ = (V+W)^\circ$.

Teraz udowodnimy, że $V^\circ + W^\circ \subset (V \cap W)^\circ$. Jeżeli $\omega \in V^\circ + W^\circ$, to

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

dla pewnych $\omega_1 \in V^\circ$ i $\omega_2 \in W^\circ$. Zatem, dla dowolnego $e \in V \cap W$ mamy, że

$$\omega(e) = \omega_1(e) + \omega_2(e) = 0 + 0 = 0.$$

Więc, $\omega \in (V \cap W)^\circ$. Zatem $V^\circ + W^\circ \subset (V \cap W)^\circ$.

Teraz udowodnimy, że $V \subset V^{\circ\circ}$. Zauważmy, że lewa strona to $V \subset E$ i prawa strona to $V^{\circ\circ} \subset E^{**}$, czyli V i $V^{\circ\circ}$ należą do różnych przestrzeń. Natomiast, takie wyrażenie ma sens ponieważ, każdy element E, w szczególności każdy element V, można zrozumieć jako element w E^{**}. Aby to zrobić, przypominamy, że każdy element $e \in E$ można zrozumieć jako odwzorowanie $\phi_e : E^* \to \mathbb{R}$, czyli $\phi_e \in E^{**}$, postaci

$$\phi_e(\omega) = \omega(e).$$

Widać, że ϕ_e jest formą liniową na przestrzeni sprzężonej E^*:

$$\phi_e(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)(e) = \lambda_1\omega_1(e) + \lambda_2\omega_2(e) = \lambda_1\phi_e(\omega_1) + \lambda_2\phi_e(\omega_2)$$

dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\omega_1\, \omega_2 \in E^*$.

Dany element $e \in V$, mamy że

$$\omega(e) = 0, \qquad \forall \omega \in V^\circ.$$

Jako element $\phi_e \in E^{**}$, możemy zapisać

$$\phi_e(\omega) = 0, \qquad \forall \omega \in V^\circ$$

i $\phi_e \in V^{\circ\circ}$. Więc, $V \subset V^{\circ\circ}$.

Aby udowodnić, że $V^{\circ\circ} = V$ trzeba korzystać ze skończonego wymiaru V (ogólnie to nie prawda).

Skoro $\dim E < \infty$, to $\dim V^\circ = \dim E - \dim V$ i $\dim E = \dim E^*$. Zatem mamy, że

$$\dim V^\circ = \dim E - \dim V \Rightarrow \dim V^{\circ\circ} = \dim E^* - \dim V^\circ = \dim E^* - \dim E + \dim V = \dim V.$$

Wówczas, dla $\dim E < \infty$, mamy, że $\dim V^{\circ\circ} = \dim V$ i $V^{\circ\circ} \subset V$. Zatem $V^{\circ\circ} = V$.

Jeżeli zakładamy, że $\dim E < \infty$, można udowodnić, że $V^\circ + W^\circ = (V \cap W)^\circ$. Właśnie,

$$\dim(V \cap W)^\circ = \dim E - \dim V \cap W = \dim E - (\dim V + \dim W - \dim V + W)$$
$$= \dim E - \dim V - \dim E + \dim E - \dim W + \dim V + W = \dim V^\circ + \dim W^\circ - \dim(V + W)^\circ.$$

Z tego wynika, że

$$\dim(V \cap W)^\circ = \dim V^\circ + \dim W^\circ - \dim(V^\circ \cap W^\circ) = \dim(V^\circ + W^\circ).$$

Skoro $\dim(V^\circ + W^\circ) = \dim(V \cap W)^\circ$ i $V^\circ + W^\circ \subset (V \cap W)^\circ$ to $V^\circ + W^\circ = (V \cap W)^\circ$. $\square$