Znaleźć rozwiązanie ogólne dla $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ równania

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = \underbrace{e^t \frac{\sin t}{\cos t}}_{f(t)} \qquad (1)$$

Aby rozwiązać takie równanie, trzeba rozwiązać część jednorodną

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$$

Czyli:

$$D = \frac{d}{dt} \qquad (D^2 - 2D + 2)x = 0 \Rightarrow$$

wielomian charakterystyczny

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm i$$

Więc RORJ (Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego)

$$y = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t.$$

Aby rozwiązać (1) trzeba założyć, że $C_1 = C_1(t)$ i $C_2 = C_2(t)$ i korzystać, że

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{C}_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & x_2 \\ e^t \frac{\sin t}{\cos t} & \dot{x}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}} \\ \dot{C}_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ \dot{x}_1 & e^t \frac{\sin t}{\cos t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

II

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t\cos t & e^t\sin t \\ e^t\cos t - e^t\sin t & e^t\sin t + e^t\cos t \end{vmatrix} = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \dot{C}_1 = \frac{-e^{2t}\frac{\sin^2 t}{\cos t}}{e^{2t}} = -\frac{\sin^2 t}{\cos t} \to \quad C_1 = \ln\left|\frac{\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}}\right| + \sin t + \lambda_0$$

$$\Rightarrow \dot{C}_2 = \frac{+\cancel{e^{2t}}\sin t}{\cancel{e^{2t}}} = \sin t \to \quad C_2 = -\cos t + \lambda_2.$$

$$\Rightarrow y = \left[\ln\left|\frac{\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}}\right| + \cancel{\sin t} + \lambda_0\right]\cos t\, e^t + (\cancel{-\cos t} + \lambda_2)e^t\sin t.$$

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \sin(e^{-t}) + te^t \qquad (1)$$

Jak wcześniej, aby rozwiązać takie równanie, najpierw trzeba rozwiązać część jednorodną

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0.$$

Jak wcześniej, rozpatrujemy wielomian

$$D^2 - 3D + 2 = 0 \Rightarrow p^2 - 3p + 2 = 0 \Rightarrow p = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2}}{2}$$

$$p \to 2, \quad p \to 1.$$

$$p^2-3p+2=(p-2)(p-1) \Rightarrow (D^2-3D+2)=(D-2)(D-1)$$

Więc,

$$(D-2)(D-1)y=0 \Rightarrow \quad x=\underbrace{C_1 e^{2t}}_{x_1}+\underbrace{C_2 e^{t}}_{x_2}$$

Aby rozwiązać równanie (1) wystarczy widzieć, że

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(e^{-t})+te^{t} \end{pmatrix}$$

$$\dot{c}_1=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^t \\ \sin(e^{-t})+te^t & e^t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2t} & e^t \\ 2e^{2t} & e^t \end{vmatrix}}=\frac{-e^t(\sin(e^{-t})+te^t)}{-e^{3t}}$$

$$c_1 = -e^{-t}(1+t)+e^{-t}\cos e^{-t}-\sin e^{-t}+\lambda_1$$

$$\dot{c}_2=\frac{\begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 2e^{2t} & \sin(e^{-t})+te^t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2t} & e^t \\ 2e^{2t} & e^t \end{vmatrix}}=\frac{e^{2t}(\sin(e^{-t})+te^t)}{-e^{3t}}$$

$$\Rightarrow c_2=-\frac{t^2}{2}-\cos(e^{-t})+\lambda_2$$

Rozwiązanie ogólne

$$y=[\lambda_1-\sin e^{-t}+e^{-t}\cancel{\cos}\, e^{-t}-e^{-t}(1+t)]e^{2t}$$
$$+[\lambda_2-\frac{t^2}{2}-\cos(\cancel{e^{-t}})]e^t$$