Egzamin poprawkowy z Analizy II
11 września 2013

Uwagi organizacyjne: każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Na wszelki wypadek prosimy też o podanie numeru grupy. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

Zadanie 1. Zapisz równanie $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, gdzie $z = z(x, y)$, w zmiennych $\xi = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\eta = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

Rozwiązanie: Wiemy, że

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Więc,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial \eta} = (\eta^2 - \xi^2)\frac{\partial}{\partial \xi} - 2\eta\xi\frac{\partial}{\partial \eta},$$

i

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial \eta} = 2\eta\xi\frac{\partial}{\partial \xi} + (\eta^2 - \xi^2)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Z tego wynika, że

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left((\eta^2 - \xi^2)\frac{\partial}{\partial \xi} - 2\eta\xi\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left((\eta^2 - \xi^2)\frac{\partial z}{\partial \xi} - 2\eta\xi\frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

i

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (\eta^2-\xi^2)^2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 4\eta^2\xi^2\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - 2\eta(\eta^2-3\xi^2)\frac{\partial z}{\partial \eta} + 2\xi(-3\eta^2+\xi^2)\frac{\partial z}{\partial \xi} + 4\eta\xi(\xi^2-\eta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Natomiast

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2\eta\xi\frac{\partial}{\partial \xi} + (\eta^2 - \xi^2)\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(2\eta\xi\frac{\partial z}{\partial \xi} + (\eta^2 - \xi^2)\frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

i

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\eta^2-\xi^2)^2\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + 4\eta^2\xi^2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\eta(\eta^2-3\xi^2)\frac{\partial z}{\partial \eta} - 2\xi(-3\eta^2+\xi^2)\frac{\partial z}{\partial \xi} - 4\eta\xi(\xi^2-\eta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Wówczas,

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\eta^2 + \xi^2)^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right)$$

i

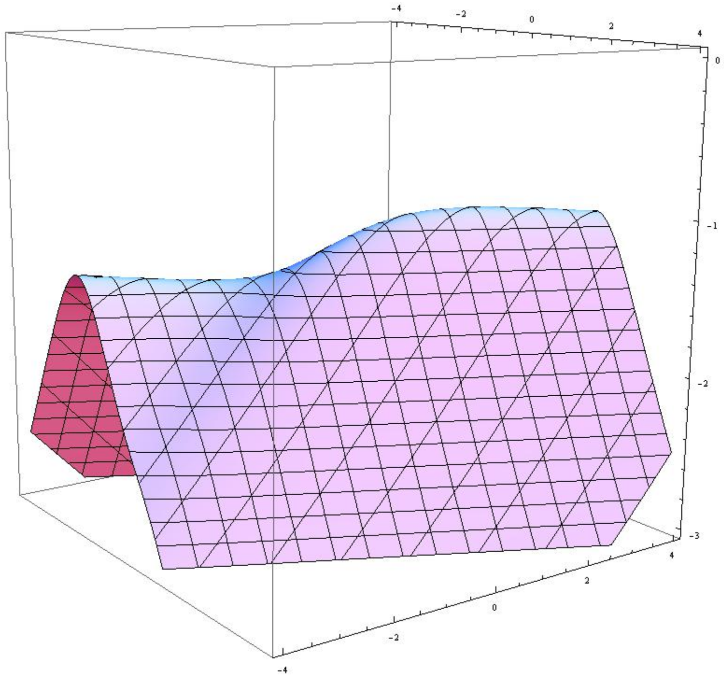
$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $z(x, y)$ niejawnie zadanej równaniem: $z^3 + z + \dfrac{2xz}{x^2+1} + (2x - y)^2 + 3 = 0$.

Rozwiązanie: Aby znaleźć punkty krytyczne musimy rozwiązać układu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad F(x,y,z) = z^3 + z + \frac{2xz}{x^2+1} + (2x-y)^2 + 3 = 0.$$

w punktach gdzie $\partial F/\partial z \neq 0$, czyli kiedy z można przedstawić jako $z = z(x,y)$ za pomocą funkcji F.



Aby obliczyć $\partial z/\partial x$ i $\partial z/\partial y$ korzystamy z wzorów:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

To prostsze niż obliczyć $z(x,y)$ za pomocą $F(x,y,z) = 0$ i obliczyć jej pochodnę (wyrażenia $z = z(x,y)$ może być bardzo skomplikowane). Z powyższych wzorów widać, że punkty krytyczne funkcji $z = z(x,y)$ są punktami (x_0,y_0) takimi, że punkt (x_0,y_0,z_0), dla pewnego z_0, jest rozwiązaniem równań:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8x - 4y - \frac{2(x^2-1)z}{(1+x^2)^2} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -4x + 2y, \qquad F(x,y,z) = 0$$

i $\partial F/\partial z \neq 0$. Z drugiego równania $2x = y$. Z tego i pierwszego wynika, że $x \in \{1,-1\}$ albo $z = 0$. Korzystając z $F(x,y,z) = 0$, zauważamy, że $F(x, y = 2x, 0) = 3 \neq 0$. Więc, nie istnieją rozwiązania tego układu z $z = 0$. Natomiast, dla $x = 1$ mamy $y = 2$ i $z^3 + 2z + 3 = 0$, czyli $z = -1$. Jednoczesnie, dla $x = -1$, mamy, że $y = -2$ i $z = -\sqrt[3]{3}$. Ponadto,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \frac{2x}{1+x^2} + 3z^2 \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{P_1} = 5, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{P_2} = -3\sqrt[3]{3}.$$

Podsumując, funkcja $z(x,y)$ ma punkty krytyczne

$$P_1 = (1,2) \qquad (z(1,2) = -1), \qquad P_2 = (-1,-2) \qquad (z(-1,-2) = -\sqrt[3]{3}).$$

Przyanalizużemy, czy takie punkty są maksimum, minimum, czy punktem siodła. Muszimy obliczyć macierz Hessiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Przypominamy, że

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Skoro

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8 + \frac{4x(x^2-3)z}{(1+x^2)^3}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4,$$

to macierze Hessiana są

$$(P_1) \ -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (P_2) \ -\frac{1}{-3\sqrt[3]{3}}\begin{pmatrix} 8-3\sqrt[3]{3} & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Widać, że dla pierwszego punktu, czyli $(1,2)$, to $D_1 < 0$ i $D_2 > 0$. Więc, to localne maksimum $z = -1$. Dla drugiego punktu, $(-1,-2)$, mamy, że $D_1 > 0$ i $D_2 < 0$. To punkt siodła.

Zadanie 3. Obliczyć objętość części na które „podwójny” stożek $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ rozcina elipsoidę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Rozwiązanie: Korzystamy z współrzędnych eliptycznych (r, θ, ϕ):

$$x = a\,r\cos\phi\sin\theta, \qquad y = b\,r\sin\phi\sin\theta, \qquad z = c\,r\cos\theta,$$

gdzie $r > 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$ i $\theta \in [0, \pi)$. W tych współrzędnach, mamy, że

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow r^2\sin^2\theta = r^2\cos^2\theta \Rightarrow \theta = \pi/4$$

i

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow r = 1.$$

Punkty przecięcie między takymi bryłyami spełniają, że

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \Rightarrow r \leqslant 1.$$

i

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow r^2\sin^2\theta \leqslant r^2\cos^2\theta \Rightarrow \theta \leqslant \pi/4$$

Widać, że górna częsc przecięcia, A, jest takie, że $r \in (0,1]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ i $\theta \in [0, \pi/4)$. Wówczas, objętość przecięcia jest

$$\int_A dxdydz = \int_A |J^{x,y,z}_{r,\phi,\theta}|drd\phi d\theta = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} |J^{x,y,z}_{r,\phi,\theta}|drd\phi d\theta.$$

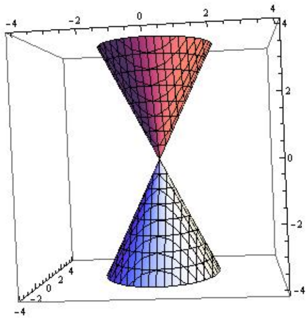
Łatwo obliczyć, że

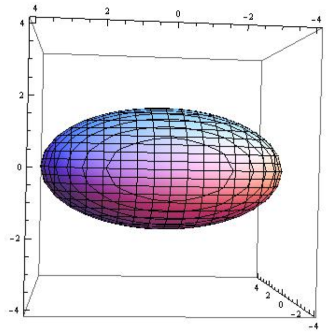
$$J^{x,y,z}_{r,\phi,\theta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\phi\sin\theta & -ar\sin\phi\sin\theta & ar\cos\phi\cos\theta \\ b\sin\phi\sin\theta & br\cos\phi\sin\theta & br\sin\phi\cos\theta \\ c\cos\theta & 0 & -cr\sin\theta \end{vmatrix} = -a\,b\,c\,r^2\sin\theta.$$

Więc, objętość górnej częsci przecięcia to

$$\int_A dxdydz = abc\int_0^1 r^2dr\int_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{2\pi}{3}abc[1-\cos\pi/4].$$

Objęctość całego przecięcia to dwa razy tyle.





Zadanie 4 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego:

$$\sin x\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x\sin y.$$

Podać rozwiązanie szczególne, spełniające warunek początkowy $y(0) = \pi$.

Rozwiązanie: Pisąc równanie w postaci

$$\frac{\cos y\,\mathrm{d}y}{\sin y} = \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x}$$

widać, że to równanie w rozdzielnych zmiennych. Sprawdzamy kiedy mianownik po prawiej stronie się zeruje. To może prowadić do rozwiązań szczegółowych. Mianownik, się zeruje, gdy $\sin y = 0$, czyli kiedy $y = k\pi$ i $k \in \mathbb{Z}$. Widać, że to są rozwiązania szczegółowe równania. W szczególności, $y = \pi$ to rozwiązanie szczegółowe, które spełnia, że $y(0) = \pi$. Więc, to rozwiązanie szczegółowe spełniające wymagany warunek zadania.

Gdy $\sin y \neq 0$, mamy, że

$$\int^y \frac{\cos y\,\mathrm{d}y}{\sin y} = \int^x \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x} + C.$$

Wówczas,

$$\log|\sin y| = \log|\sin x| + C \Rightarrow |\sin y| = e^C|\sin x| \Rightarrow \sin y = \lambda\sin x, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

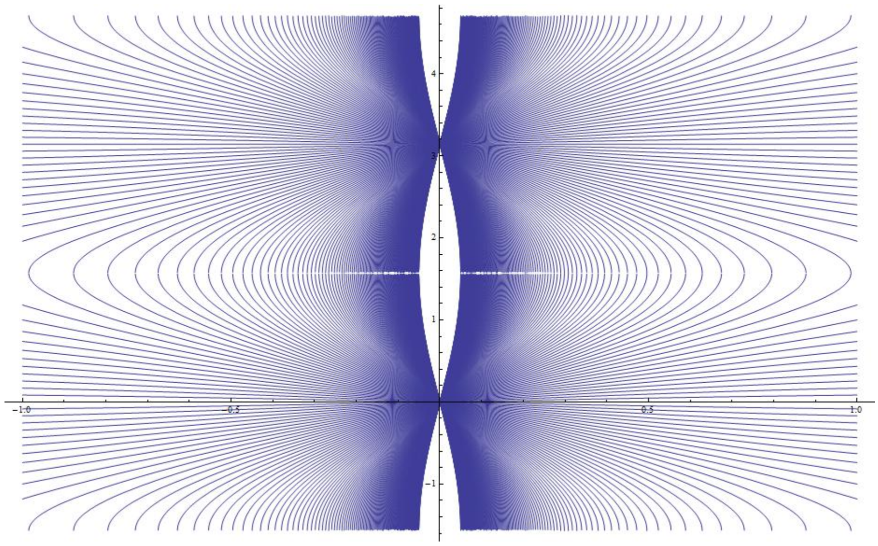
Jeżeli dla $z \in [-1,1]$ zdefiniujemy $\arcsin(z)$ jako kąt φ w $[-\pi,\pi]$ taki, że $\sin(\varphi) = z$, to

$$y = \arcsin(\lambda\sin x) + 2k\pi \qquad \text{albo} \qquad \pi - y = \arcsin(\lambda\sin x) + 2k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Więc,

$$y = \arcsin(\lambda\sin x) + k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Rozwiązania równania wyglądają następująco



Widać, że nie istnieją szczegółowe rozwiązania takie, że $y(0) \neq k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Kiedy $y(0) = k\pi$, rozwiązanie nie jest jedynem.