Kilka dodatkowych rozwiązań

J. de Lucas

Dana rozmaitość N, czyli zbiór punktów, który lokalnie wyglada jak $\mathbb{R}^n$, możemy zdefiniować dla każdego punktu $p \in N$ przestrzeń styczną T_pN. Przestrzeń styczna to przestrzeń liniowa wszystkich pochodnych kierunkowych w punkcie p. Możemy zainterpretować każda pochodna kierunkowa jako wektor. Wiązką styczną do N jest zbiór wszystkich przestrzeń stycznych do N.

Wiązka styczna pozwala nam powiedzieć, że jakas pochodna, np.

$$D = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

to odwzorowanie $D : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{T}\mathbb{R}^2$. Właśnie, dla każdego punktu $p \in \mathbb{R}^2$, np. dla $p = (1, 1)$, mamy jedną pochodną kierunkową, np.

$$D = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ponadto, dla każdego punktu rozmaitości N mamy przestrzeń dualną do T_pN, tzn T_p^*N. Mówimy, że ta przestrzeń to przestrzeń kostyczna do p. Przestrzeń wszystkich przestrzeni kostycznych, to wiązek kostyczny T^*N do N. Kazda różniczka to odwzorowanie $df : p \in N \mapsto df_p \in T^*N$, czyli dla każdego punktu, df_p to funkcja liniowa.

Ćwiczenie 1. Oblicz różniczki funkcji

$$f(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2, \qquad f(x, y, z) = x^2y^z - zy - \sin z, \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2.$$

i oblicz jej wartośći, $(df)_p \in T_p^*\mathbb{R}^3$ w punkcie $p = (1, 2, 4)$. Dany pochodne kierunkowe

$$D_p = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z} \in T_p\mathbb{R}^3,$$

oblicz $(df)_p(D_p)$ dla $i = 1, 2, 3$. Pamiętając, że $dx^i(\partial/\partial x^j) = \delta^i_j$, sprawdź, że

$$(D_pf)(p) = (df)_p(D_p).$$

Krótko mówiąc, rózniczka pozwala nam obliczyć pochodne kierunkowe funkcji różniczkowalnej.

Ćwiczenie 2. Oblicz różniczka funkcji $f : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 3. Oblicz różniczki funkcji

$$f(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2, \qquad f(x,y,z) = x^2y^z - zy - \sin z, \qquad f(x,y) = x^2 + y^2.$$

i oblicz jej wartośći w punktach $(2,3,4)$, $(1,2,1)$ i $(2,3,4)$.

Ćwiczenie 4. Oblicz różniczkę zewnętrzną formy

$$\omega_1 = (x^2y + x)dx + xyzdy + z^2ydz \qquad \omega_2 = (x^2y^z - zy)dz - \sin zdx, \qquad \omega_3 = (x^2 + y^2)$$

$$\omega_4 = \sin(x^2z)dx \wedge dy + 2xydx \wedge dy - dz \wedge dz, \qquad \omega_5 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xzdx + yzdy - (x^2+y^2)dz)$$

$$\omega_6 = (x^2y + x)dx \wedge dy + xyzdy \wedge dz + z^2ydz \wedge dx \qquad \omega_7 = (x^2y^z - zy - \sin z)dx \wedge dy.$$

Rozwiązanie: Mamy, że

$$d\omega_1 = d(x^2y + x) \wedge dx + d(xyz) \wedge dy + d(z^2y) \wedge dz.$$

Skoro

$$d(x^2y+x) = 2xydx + x^2dy + dx, \quad d(xyz) = yzdx + yxdz + xzdy, \quad d(z^2y) = 2zydz + z^2dy,$$

to

$$d\omega_1 = (2xydx + x^2dy + dx) \wedge dx + (yzdx + yxdz + xzdy) \wedge dy + (2zydz + z^2dy) \wedge dz.$$

Przypominamy, że $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$. Więc,

$$d\omega_1 = x^2dy \wedge dx + (yzdx + yxdz) \wedge dy + z^2dy \wedge dz.$$

Też musimy zauważyć że $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, $dx \wedge dz = -dz \wedge dy$, $dy \wedge dz = -dy \wedge dz$. Z tego wynika, że

$$d\omega_1 = (z^2 - yx)dy \wedge dz + (zy - x^2)dx \wedge dy.$$

Warto pamiętać, że $dd\omega_1 = 0$, więc, jeżeli nie widać tego z poprzednego wyniku, to cos jest nie tak...

Warto zauważyć, że jeżeli mamy pole wektorowe

$$F = (x^2y + x)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + z^2y\mathbf{k},$$

który ma takie wspólczynniki jak ω_1, w szczególności $i \leftrightarrow dx$, $j \leftrightarrow dy$, $k \leftrightarrow dz$, to jego rotacja jest

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (z^2 - yx)\mathbf{i} + (zy - x^2)\mathbf{k}$$

i wspólczynniki rotacji są współczynnikami formy $d\omega_1$ dla $\mathbf{i} \leftrightarrow dy \wedge dz$, $\mathbf{j} \leftrightarrow dz \wedge dx$ i $\mathbf{k} \leftrightarrow dy \wedge dz$. Jeżeli

$$\omega_6 = (x^2y + x)dx \wedge dy + xyzdy \wedge dz + z^2ydz \wedge dx.$$

Mamy, że

$$d\omega_6 = d(x^2y + x) \wedge dx \wedge dy + d(xyz) \wedge dy \wedge dz + d(z^2y) \wedge dz \wedge dx.$$

Skoro

$$d(x^2y+x) = 2xydx+x^2dy+dx, \quad d(xyz) = yzdx+yxdz+xzdy, \quad d(z^2y) = 2zydz+z^2dy,$$

i $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz$, to

$$d\omega_6 = yzdx \wedge dy \wedge dz + z^2dy \wedge dz \wedge dx = (yz + z^2)dx \wedge dy \wedge dz.$$

Jest ważny załaważyć, że jeżeli pole wektorowe ma postać

$$F = xyz\mathbf{i} + z^2y\mathbf{j} + (x^2y + x)\mathbf{k}$$

jego dywergencja, czyli

$$\nabla F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = yz + z^2$$

jest współczynnikiem dwuformy $d\omega_6$, gdzie ω_6 jest dwu-formą z wspólczynnikami . $\square$

Ćwiczenie 5. Dana funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, udowodnij, że $d^2f = 0$.

Ćwiczenie 6. Mówi się, że forma rózniczkowa jest zamknięta, gdy $d\omega = 0$. Natomiast, k-forma ω jest dokładna, gdy istnieje $k-1$-forma θ taka, że $d\theta = \omega$. Udowdonij, że następujące funkcje są zamknięte

$$\omega = 2xdx + 2ydy + 2zdz \qquad \omega = \frac{2x}{1+x^2+y^2}dx + \frac{2y}{1+x^2+y^2}dy$$

Które są dokładne?

Ćwiczenie 7. Dana funkcja $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ i forma dz on $\mathbb{R}$. Oblicz f^*dz.

Ćwiczenie 8. Dana funkcja $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y, x) \in \mathbb{R}^2$ i forma $dx \wedge dy$ on $\mathbb{R}^2$, oblicz $f^*(dx \wedge dy)$.

Ćwiczenie 9. Oblicz przestrzeń styczną do powierzchni

$$x^2 + z^2 + y^2$$

w punkcie $(1, 1, 1)$.