ANALIZA I
8 stycznia 2015
Semestr zimowy
Kolokwium II (rozwiazania)

Javier de Lucas

Zadanie 1. Obliczyć następujące granice

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-\cos x e^{\sin^2 x}}-\cos x}{1-\sqrt{1+2x^2}}, \qquad c)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^{10}}{x^{10}\sin x^{10}}.$$

Rozwiązanie: Rozwiązujemy pierwszą granicę. Pamiętając, że $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$, właśnie

$$\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}1/x\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=0,$$

widać, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=\frac{e-e}{0}=\frac{0}{0}\qquad \text{(nieoznaczoność).}$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}(1+x)^{1+x}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]=e\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{1+x}$$
$$\overset{\text{L'H}}{=}e\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{x}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}\right]=e\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2(1+x)^2}=-\frac{e}{2}.$$

Drugą granicę

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-\cos x e^{\sin^2 x}}-\cos x}{1-\sqrt{1+2x^2}}$$

rozwiązujemy za pomocą rozwinięcia Taylora drugiego rzędu dwoma metodami.

Metoda 1:

Rozwinięcie Taylora mianownika drugiego rzędu z resztą Peano:

$$1-\sqrt{1+2x^2}=-x^2+O(x^2).$$

Taki wyrażenie można otrzymać bezpośrednio wiedzą, że $\sqrt{1+y}=1+y/2+O(y)$. Zatem, $1-\sqrt{1+2x^2}=1-1-x^2+O(x^2)=-x^2+O(x^2)$. Rozwinięcie Taylora licznika $l(x)$ jest długie jeżeli nie liczy się odpowiednio. Mamy, że $l(0)=0$. Teraz,

$$\frac{dl}{dx}=\sin(x)P(x),\ P(x)\equiv\left[1+\frac{e^{\sin^2(x)}}{2\sqrt{2-\cos(x)}}+2e^{\sin^2(x)}\sqrt{2-\cos(x)}\cos(x)\right]\Rightarrow\frac{dl}{dx}(0)=0.$$

$$\frac{d^2l}{dx^2}=\cos(x)P(x)+\sin(x)\frac{dP}{dx}\ \ \text{(Nie trzeba obliczyć } dP/dx\text{!!!)}\Rightarrow\frac{d^2l}{dx^2}(0)=P(0)=7/2.$$

Zatem
$$l(x) = \frac{7}{4}x^2 + O(x^2).$$
Więc,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-\cos x}e^{\sin^2 x} - \cos x}{1-\sqrt{1+2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{4}x^2}{-x^2} = -\frac{7}{4}.$$
Metoda 2:

Mamy, że do drugiego rzędu wolół zera:
$$e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 + O(x^2), \qquad \sqrt{1+2x^2} = 1 + x^2 + O(x^2),$$
$$\sqrt{2-\cos x} = \sqrt{2 - 1 + x^2/2 - x^4/4! - \ldots} = 1 + x^2/4 + O(x^2).$$
Zatem do drugiego rzędu
$$\sqrt{2-\cos x}e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 + x^2/4 + O(x^2) = 1 + 5/4x^2 + O(x^2)$$
i
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-\cos x}e^{\sin^2 x} - \cos x}{1-\sqrt{1+2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 5x^2/4 - 1 + x^2/2}{-x^2} = -\frac{7}{4}.$$
Obliczmy trzecią granicę:
$$c) \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^{10}}{x^{10}\sin x^{10}}.$$
Mamy, że $\cos(x^{10}) = 1 - x^{20}/2 + O(x^{20})$ i $\sin x^{10} = x^{10} + O(x^{20})$. Zatem
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^{10}}{x^{10}\sin x^{10}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + x^{20}/2}{x^{20}} = \frac{1}{2}.$$
□

Zadanie 2. Wykazać, że funkcja: $f(x) = x + \sin x$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$ (*Wsk.* $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$).

Rozwiązanie: Funkcja f jest jednostajnie ciągła kiedy
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$
W naszym przypadku
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2 + \sin(x_1) - \sin(x_2)| \le |x_1 - x_2| + |\sin(x_1) - \sin(x_2)|$$
$$= |x_1 - x_2| + 2\left|\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right| \le |x_1 - x_2| + 2\left|\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\right|.$$

Funkcja $\sin(x/2)$ jest ciągła w $x = 0$, to dla $\epsilon/4 > 0$ istnieje $\delta_1 > 0$ taki, że

$$|x| < \delta_1 \Rightarrow |\sin(x/2)| < \epsilon/4.$$

Niech $\delta < \min\{\delta_1, \epsilon/2\}$. Zatem jeżeli $|x_1 - x_2| < \delta$, to

$$|x_1 - x_2| + 2|\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Z tego wynika, że funkcja $f(x)$ jest jednostajnie ciągła.

Można też zauważyć, że $|\sin(x)| < |x|$ kiedy x pisze się w radianach. To widać na okręgu jednostkowym, gdzie możemy zdefiniować funkcje trygonometryczne. W takim przypadku, nie trzeba korzystać z ciągłości $\sin(x)$ i zadanie jest prostsze.

□

Zadanie 3. Udowodnij, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność:

$$\ln(1 + x) > \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1 + x}.$$

Rozwiązanie: Skoro $x > 0$ mamy, że

$$\ln(1 + x) > \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1 + x} \Leftrightarrow f(x) \equiv (1 + x)\ln(1 + x) - \operatorname{arc\,tg} x > 0.$$

Aby udowodnić taką nierówność korzystamy z wzoru Taylora pierwszego rzędu wokół punktu $x_0 = 0$ z resztą Lagrange'a. Widać, że $f(0) = 0$ i

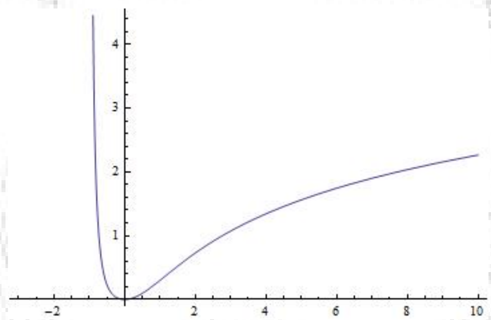
$$\frac{df}{dx} = \ln(1 + x) + 1 - \frac{1}{1 + x^2} = \ln(1 + x) + \frac{x^2}{1 + x^2} \Rightarrow \frac{df}{dx}(0) = 0.$$

Dodatkowo

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{1 + x} + \frac{2x(1 + x^2) - x^2 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 + x^2)^2 + 2x(1 + x)}{(1 + x)(1 + x^2)^2}.$$

Z tego wyniku i korzystając z wzoru Taylora pierwszego rzędu dla f wokół $x_0 = 0$ dla $x > 0$ wychodzi:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(\theta) > 0 \qquad \theta \in]0, x[\qquad \Rightarrow f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(\theta(x))\frac{x^2}{2!} > 0, \qquad \theta(x) \in]0, x[.$$



$\square$

Zadanie 4. Zbadać w zależności od parametru a ciągłość i różniczkowalność funcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x < 0, \\ a, & x \geq 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Rozwiązanie: Widać, że ta funkcja jest ciągła i różniczkowalna dla $x \neq 0$. Sprawdzamy co się dzieże w punkcie $x = 0$. Funkcja jest ciągła w $x = 0$ kiedy

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

Aby być ciągłą, to powinno być $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = a$, co zawsze spełnia się z definicji f, i

$$\begin{aligned} a = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\ &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{(e^x - 1) + xe^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zatem, kiedy $a \neq 1/2$, to funkcja $f(x)$ jest ciągła w $\mathbb{R} - \{0\}$ i kiedy $a = 1/2$, to funkcja f jest ciągła w $\mathbb{R}$.

Funkcja f jest różniczkowalna poza zerem. Sprawdzamy czy funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$. Dla $a \neq 1/2$ funkcja nie jest ciągła w punkcie $x = 0$. Skoro to warunek konieczny, aby być rózniczkowalna, to funkcja f nie jest różniczkowalna dla $a \neq 1/2$.

Zobaczymy, czy funkcja f jest różniczkowalna w $x = 0$ dla $a = 1/2$. Przypominamy, że funkcja f jest różniczkowalna w $x = 0$, kiedy $f'_+(0) = f'_-(0)$ i są skończone, czyli pochodne prawostronna i lewostronna równają się i są skończone. Sprawdzamy czy takie waruneki spełnia się:

ANALIZA I
8 stycznia 2015
Semestr zimowy
Kolokwium II (rozwiazania)

$$f'_-(0) \equiv \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1/x - 1/(e^x-1) - 1/2}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2e^x - 2 - 2x - x(e^x-1)}{2x^2(e^x-1)}.$$

Za pomocą wzoru Taylora i $e^x = 1 + x^2/2 + x^3/3! + O(x^3)$ mamy, że wzór Taylora do trzeciego rzędu licznika i mianownika wokół zera to

$$2x^2(e^x-1) = 2x^2(1+x-1) + o(x^3) = 2x^3 + O(x^3),$$

$$\begin{aligned}(2-x)(e^x-1) - 2x &= (2-x)(1+x+x^2/2+x^3/3!+\ldots-1) - 2x \\ &= 2x^3/3! - x^3/2 + o(x^3) = -x^3/3! + O(x^3).\end{aligned}$$

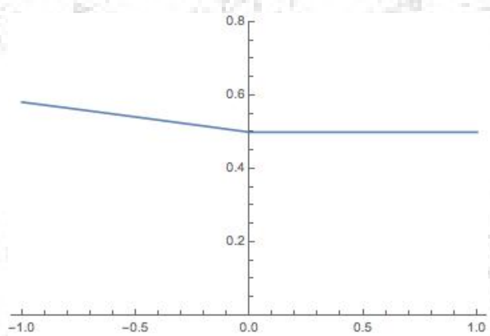
Wówczas,

$$f_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2e^x - 2 - 2x - x(e^x-1)}{2x^2(e^x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^3/3!}{2x^3} = -\frac{1}{2\cdot 3!}.$$

Natomiast,

$$f'_+(0) \equiv \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a-a}{x} = 0.$$

Zatem, $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ i ta funkcja nie jest różniczkowalna dla żadnej wartości a.



□