**ANALIZA I**
**24 listopada 2014**
**Semestr zimowy**
**Kolokwium próbne**

**Uwagi organizacyjne:** każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Na wszelki wypadek prosimy też o podanie numeru grupy. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

**Zadanie 1.** Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność:

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}.$$

**Zadanie 2.** Zbadaj zbieżność ciągów i znajdź ich granice jeśli istnieją:

1. $a_n = \left(1 + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right)^n$
2. $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$
3. $a_n = \sqrt{n^4 - n^3} - n^2$
4. $a_n = \frac{\cos^3 n^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{2n}$
5. $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^n/n^2 + 3^n/n^3 + \ldots + k^n/n^k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$
6. $a_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

**Zadanie 3.** Zbadaj zbieżność ciągu zadanego rekurencyjnie wzorem

$$x_1 = a, \;\; x_{n+1} = \frac{3}{4x_n + 1}, \qquad a > 0.$$

**Zadanie 4.** Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z metryką

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\| & \operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_1 \\ \|x\| + \|y\| & \operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_1, \end{cases}$$

gdzie $\|x-y\| = d_e(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ jest metryką euklidesową. Opisać kule i odcinki w tej metryce.

**Zadanie 5.** Wykorzystując definicję Cauchy'ego granicy funkcji wykazać, że

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{8}{x-2} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\right) = -1.$$