ANALIZA I
24 listopada 2014
Semestr zimowy
Kolokwium próbne

Javier de Lucas

Zadanie 1. Dowieść, że jeśli $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem określonym rekurencyjnie: $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1+x_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to

$$x_{2n} = \frac{2+x_n^2}{2x_n}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Zadanie 2. Zbadać ograniczoność i ewentualnie wyznaczyc kresy zbiorów

$$X = \left\{\frac{m}{(n+m)n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{3n^2+2n+4}{3n^2+2n+3}\right].$$

Czy A jest otwarty lub domknięty?

Zadanie 3. Oblicz granice:

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{p_1 a_1^{n+1}+\ldots+p_r a_r^{n+1}}{p_1 a_1^n+\ldots+p_r a_r^n}, \qquad p_1, \ldots, p_r, a_1, \ldots, a_r > 0,$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1^5+2^5+\ldots+n^5}{n^6},$
- $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n^2\pi}{n+2}\right),$
- Udowodnij, że istnieje $\lim_{n\to+\infty}(1 + 1/2 + \ldots + 1/n - \log(n))$.

Zadanie 4. Sprawdź, czy

$$d(x, y) = \left|\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right|$$

jest metryką na $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Ustal d-odczynek $[1, 2]$ i kulę $K(2, 3)$.

Zadanie 5. Oblicz (jeżeli istnieje) za pomocą definicji Heiniego $\lim_{x\to0} |x|^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$.