ANALIZA I
24 listopada 2014
Semestr zimowy
Kolokwium próbne

Javier de Lucas

Zadanie 1. Udowodnij, że zbiór $A = \{2^k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$ jest przeliczalny.

Zadanie 2. Oblicz granicę ciągu rekurencyjnego

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2x_n}, \qquad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Zadanie 3. Oblicz granice:

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)} - \sqrt[3]{n(n+1)(n+3)}$,
- $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$,
- $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$,
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

Zadanie 4. Sprawdź, czy następujące zbiory są domknięty czy otwarty:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2n+1}{n+1}, \frac{n^2+4n+1}{n^2+1} \right[\qquad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{2n+1}{n+1}, \frac{n^2+4n+1}{n^2+1} \right[.$$

Zadanie 5. Udowodnij za pomocą definicji Cauchyego, że

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+1}{2x+1} = \frac{7}{5}.$$