ANALIZA I
14 i 17 października 2014
Semestr zimowy
Lista IV

Przeliczalność, kresy, bijekcje

Javier de Lucas

Zadanie 1. Wyliczyć:

- $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right]$.
- $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]\frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10}\right[$
- $\bigcup_{t\in[2,3]} A_t$ oraz $\bigcap_{t\in[2,3]} A_t$, gdzie: $A_t = [t, 2t] \times [-t, t]$.

Zadanie 2. Pokazać, że funkcja $f : X \to Y$, gdzie $X =]0, 1[\,, Y = [-2, 2] \setminus \{-1, 1\}$

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 1, x \in]0, \frac{1}{3}], \\ 3x, x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 6x - 5, x \in]\frac{2}{3}, 1[\end{cases}$$

jest bijekcją. Znaleźć $f^{-1}(x)$.

Zadanie 3. Udowodnić, że zbiór $\{x \in \mathbb{N} : 10|x\}$ jest przeliczalny.

Zadanie 4. Korzystając z funkcji $f(x) = \begin{cases} 2x, x \in \mathbb{N}, \\ -2x - 1, x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$
pokazać przeliczalność zbioru $\mathbb{Z}$.

Zadanie 5. Dowieść, że każdy zbiór rozłącznych, położonych na prostej odcinków jest przeliczalny.

Zadanie 6. Omówić po raz $n$ty dowód przekątniowy Cantora nieprzeliczalności odcinka $]0, 1[$.

Zadanie 7. Pokazać, że zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$ jest nieograniczony.

Zadanie 8. Pokazać, że zbiór liczb postaci $m\sqrt{5} - n$, $m, n \in \mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry.

Zadanie 9. Pokazać, że funkcja $f(x) = x \sin x, x \in]0, +\infty[$ nie jest ograniczona z góry ani z dołu.

Zadanie 10. Wykaż, że kres górny zbioru liczb postaci $\frac{x}{1+x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ jest równy 1.

Zadanie 11. Wykaż, że liczba 2 nie jest kresem górnym zbioru liczb postaci $\frac{3n+1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$.