



ANALIZA I
7 i 14 listopada 2014
Semestr zimowy
Lista IX



Ciągłość

Javier de Lucas

Zadanie 1. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$. Pokazać, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $]1, 2]$.

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Pokazać, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $] -1, 1[$.

Zadanie 3. Zapisać w języku Heinego i Cauchy'ego zdanie: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$

Zadanie 4. Wykazać z definicji, że $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Zadanie 5. (H212) Wykazać z definicji (Heine i Cauchy), że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Zadanie 6. (H216) Niech $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \text{ niewymiernych} \\ x^2, & \text{dla } x \text{ wymiernych} \end{cases}$. Wykazać z def. Cauchy'ego, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Zadanie 7. Wykaż, że nie istnieje granica $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$.

Zadanie 8. Sporządź wykres funkcji: $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h^2}{h+x^2}$.

Zadanie 9. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha^3 - \alpha^2}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 10. Ciągłość funkcji. Wykaż opierając się na def. Cauchy'ego, że $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w punkcie $x = 2$.

Zadanie 11. Zbadać ciągłość funkcji f określonej wzorem:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x}, & \text{dla } x \neq 0, \\ 1, & \text{dla } x = 0. \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \frac{\sin x}{x}, & \text{dla } x \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$