ANALIZA I
12 grudnia 2014
Semestr zimowy
Lista XIV

Funkcje pierwotne i Reguła de L'Hôspitala

Javier de Lucas

Zadanie 1. Korzystając ze znajomości pochodnych, znaleźć funkcję pierwotną dla następujących funkcji (nie mamy jeszcze symbolu $\int$) x^a, $\sqrt{x}$,$\frac{1}{\sqrt{x}}$, x^2, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$, $\cos x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\sinh x$, $\frac{1}{\cosh(x)}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Zadanie 2. Korzystając z własności pochodnych, znaleźć funkcję pierwotną dla następujących funkcji: $f(x) = 5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}$, $f(x) = \frac{(x^2-1)^3}{x}$, $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$,
$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}$.

Zadanie 3. Korzystając ze wzoru na pochodną funkcji złożonej policzyć funkcję pierwotną dla następujących funkcji: $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $f(x) = \sqrt{a+bx}$, $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$,
$f(x) = \frac{x}{3-5x^2}$, $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[5]{x^3+1}}$, $f(x) = xe^{-x^2}$, $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$,
$f(x) = \cos x e^{\sin x}$, $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $f(x) = \frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)}$.

Zadanie 4. Obliczyć granice $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos x}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^{\ln x}}{x^c}$,
$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x-1}{\sin x-\cos x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x-1}$, $\lim_{x\to\alpha} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)\left(e^{\sin\alpha}-e^{\sin x}\right)$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\ln x}{x}$,
$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$, $\lim_{x\to +\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$, $\lim_{x\to 0^-}(1-x)\ln(1-x)$

Zadanie 5. Obliczyć granice: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin x}\right)$,
$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Zadanie 6. Obliczyć granicę: $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$

Zadanie 7. Obliczyć granice: $\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$, $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\quad a>0, a\neq 1.$

Zadanie 8. Czy mozna zastosować regułe de l'Hospitala do obliczenia następujących granic? $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$, $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+\sin(2x)+1}{(2x+\sin(2x))(\sin x+3)^2}$, $\lim_{x\to 0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$.

Zadanie 9. Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność (Jensen dla $f(x)=\frac{1}{x}$):
$\frac{n^2}{x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}, \quad x_1,\ldots,x_n > 0$