ANALIZA I
20 stycznia 2015
Semestr zimowy
Lista XIX

Kryterium zbieżności

Javier de Lucas

Zadanie 1. Zbadać zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-n\sin\frac{1}{n}\right]^{\alpha},\qquad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Rozwiązanie: Szereg zbieżny $\sum_n a_n$ spełnia warunek konieczny $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. W naszym przypadku, widać, że szereg (1.1) nie spełnia warunku koniecznego dla $\alpha = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1-n\sin\frac{1}{n}\right]^{0} = 1 \neq 0.$$

Natomiast, dla $\alpha \neq 0$ mamy, że skoro funkcja wykładnicza jest ciągła

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1-n\sin\frac{1}{n}\right]^{\alpha} = \left(\lim_{n\to+\infty}\left[1-n\sin\frac{1}{n}\right]\right)^{\alpha} = \left(1-\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha}.$$

Teraz możemy pamiętać definicję Heiniego granicy funkcji

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow (x_n \overset{n\to+\infty}{\to} x_0 \text{ i } x_n \neq x_0\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \overset{n\to+\infty}{\to} b).$$

Korzystając z tego, widać, że z

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

i $x_n = 1/n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Zatem

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1-n\sin\frac{1}{n}\right]^{\alpha} = (1-1)^{\alpha} = 0$$

dla $\alpha \neq 0$.

Teraz sprawdzamy czy szereg (1.1) jest rozbieżny za pomocą kryterium porównawczego. Przypominamy, że kryterium porównawcze w postaci granicznej mówi, że dane szeregi $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ o wyrazach nieujemnych, to jeżeli

$$0 < \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} < \infty$$

to $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ mają taki sam charakter, czyli albo są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.

W naszym przypadku, porównamy (1.1) z szeregiem $\sum_n 1/n^{2\alpha}$. Zatem, mamy obliczyć

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[1 - n\sin\frac{1}{n}\right]^\alpha}{\frac{1}{n^{2\alpha}}}.$$

Skoro funkcja wykładniczna jest ciągła, to

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[1 - n\sin\frac{1}{n}\right]^\alpha}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - n\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right]^\alpha.$$

Korzystając z definicji Heiniego granicy funkcji i skoro $1/n \to 0$, to możemy obliczyć poprzednią granicę obliczając następującą granicę (przez Taylor)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x - x^3/3!}{x}}{x^2} = \frac{1}{6}.$$

Skoro $x_n = 1/n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ i $x_n \neq 0$, z tego wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[1 - n\sin\frac{1}{n}\right]^\alpha}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \frac{1}{6}$$

i nasz szereg (1.1) i $\sum_n 1/n^{2\alpha}$ mają taki sam charakter. Zatem, skoro $\sum_n 1/n^{2\alpha}$ jest szeregiem harmonicznym rzędu 2α, to dla $2\alpha \leq 1$ jest rozbieżny i dla $2\alpha > 1$ zbieżny. Tak samo dla (1.1). $\square$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right], \quad a, b > 0. \tag{2.1}$$

Rozwiązanie: Widać, że

$$\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} - b^{1/n} = 1 - 1 = 0.$$

Zatem, ten szereg spełnia warunek konieczny zbieżności. Aby sprawdzić. czy ten szereg jest zbieżny, korzystamy z kryterium porównawczego. Mamy, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(a)a^x - \ln(b)b^x = \ln\frac{a}{b}.$$

Z definicji Heiniego i poprzedniej granicy łatwo wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{1/n} - b^{1/n}}{1/n} = \ln \frac{a}{b}.$$

Zatem, nasz szereg i $\sum_n 1/n$ mają taki sam charakter. Skoro $\sum_n 1/n$ jest rozbieżny, to (2.1) jest rozbieżny.
$\square$

Zadanie 3. Obliczyć promień zbieżności szeregu i zbadać jego zbieżność na krańcach przedziału zbieżności:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n,$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n 4^{n+1}} x^n, \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{10^n} x^n, \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) x^n.$$

Rozwiązanie: Definiuje się promień zbieżności szeregu $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ jako

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}}$$

albo równoważnie

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Ogólnie (nie zawsze), korzystamy z pierwszej definicji kiedy a_n ma potęgi do n'ej i z drugiej kiedy pojawiają się liczby n! Warto pamiętac, że jeżeli istnieje $\lim_{n\to+\infty} |a_n|$, to $\limsup_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} |a_n|$. Kiedy $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, to $R = +\infty$.

Promień zbieżności pozwala nam zagwarantować, że szereg jest zbieżny dla $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Dla $x = x_0 \pm R$, trzeba osobno ustalić czy szereg jest zbieżny czy rozbieżny.

Dla

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

mamy, że

$$\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} |1/\sqrt{n}|^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} 1/n^{1/2n}} = 1.$$

Zatem, skoro poprzednia granica istnieje, to granica górna też i są sobie równe. Wówczas,

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}|1/\sqrt{n}|^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} 1/n^{1/2n}} = 1.$$

Więc, szereg jest zbieżny dla $x \in (-1, 1)$. Dla $x = 1$ szereg ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

To szereg harmoniczny rzędu 1/2, więc rozbieżny. Dla $x = -1$ mamy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Na mocy kryterium Leibniza, taki szereg jest zbieżny (warunkowo).

Dla

$$b) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$$

mamy, że

$$\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} 1/(n5^n)^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} 1/(n^{1/n}5)} = 5.$$

Więc,

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} 1/(n5^n)^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} 1/(n^{1/n}5)} = 5.$$

Zatem, szereg jest zbieżny dla $x \in (-5, 5)$. Dla $x = 5$ szereg ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

To szereg harmoniczny, wieć rozbieżny. Dla $x = -5$ mamy, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$. Na mocy kryterium Leibniza, taki szereg jest zbieżny (warunkowo zbieżny).

Analizujemy

$$c) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n.$$

Skoro a_n ma postać z liczbami do n'ej, korzystamy z definicji

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}}$$

Teraz

$$\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} 3/(n+1)^{1/n}} = \frac{1}{3}.$$

Gdzie zauważyliśmy, .ze $1 = \lim_{n\to+\infty}(n)^{1/n} \leq \lim_{n\to+\infty}(n+1)^{1/n} \leq \lim_{n\to+\infty}(2n)^{1/n} = 1$.

Zatem

$$\frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} 3/(n+1)^{1/n}} = \frac{1}{3}.$$

Więc, szereg jest zbieżny dla $x \in (-1/3, 1/3)$. Dla $x = 1/3$ szereg ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

To uogólniony szereg harmoniczny, czyli ma postać $\sum_n 1/(an+b)$ dla $a \neq 0$, więc rozbieżny. Dodatkowo, korzystając z kryterium porównawczego, to

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1.$$

Zatem, skoro $\sum_n 1/n$ jest rozbieżny, to $\sum_n 1/(n+1)$ jest rozbieżny.

Dla $x = -1/3$ mamy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Na mocy kryterium Leibniza, taki szereg jest zbieżny (warunkowo).

Teraz analizujemy

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n 4^{n+1}} x^n$$

Skoro a_n ma postać z liczbami do n'ej, korzystamy z definicji

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}}$$

Zatem,

$$\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} n^{2/n}/(3^n 4^{n+1})^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} n^{2/n}/(3\cdot 4^{1+1/n})} = 12.$$

i

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}} = 12.$$

Więc, szereg jest zbieżny dla $x \in (-12, 12)$. Dla $x = 12$ szereg ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4}.$$

To szereg harmoniczny rzędu -2, więc rozbieżny.

Dla $x = -12$ otrzymamy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{4}.$$

Na mocy kryterium Leibniza, taki szereg jest zbieżny (warunkowo).

Rozwiązujemy teraz

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{10^n} x^n.$$

Ponieważ a_n ma postać z liczbami do n'ej, korzystamy z definicji

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}}.$$

Zatem, korzystając z wzoru Stirlinga $n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ mamy, że

$$\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}{10^n}\right]^{1/n}} = \frac{10}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt{ne^{-1}\sqrt[2n]{2\pi n}}} = 0.$$

Więc,

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}} = 0$$

i szereg jest rozbieżny dla dowolnego $x \neq 0$. Szereg tylko można sumować dla $x = 0$. $\square$

Zadanie 4. Obliczyć promień zbieżności szeregów:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}(3x-4)^{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+2)^{3n}}{1+n^2}.$$

Rozwiązanie: Dla pierwszego szeregu i korzystając z wzoru Stirlinga, $n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, otrzymamy, że

$$(\lim_{n\to+\infty} |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)})^{-1} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{n^n}{n!}}\right)^{-1} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}\right)^{-1}$$
$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/2}}{\sqrt[4n+2]{2\pi n}}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

i

$$R = (\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n})^{-1} = (\lim_{n\to+\infty} |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Teraz mamy obliczyć promień zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}(3x-4)^{2n+1}.$$

W tym przypadku, trzeba wprowadzić takie wyrażenie do postaci $\sum_n a_n(x-x_0)^n$, czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}(3x-4)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\cdot 6^{2n}(x-4/3)^{2n+1}.$$

Rozwiązywając mamy, że

$$(\lim_{n\to+\infty} |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)})^{-1} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{3\cdot 6^{2n}}\right)^{-1} = \frac{1}{6}$$

i

$$R = (\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n})^{-1} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{3\cdot 6^{2n}}\right)^{-1} = \frac{1}{6}.$$

Teraz mamy obliczyć promień zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+2)^{3n}}{1+n^2}.$$

W tym przypadku, trzeba wprowadzić takie wyrażenie do postaci $\sum_n a_n(x-x_0)^n$, czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}(x+1)^{3n}}{1+n^2}.$$

Rowiązując, to mamy, że

$$(\lim_{n\to+\infty} |a_{3n}|^{1/(3n)})^{-1} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3n]{2^{3n}/(1+n^2)}\right)^{-1} = \frac{1}{2}$$

i

$$R = (\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n})^{-1} = (\lim_{n\to+\infty} |a_{3n}|^{1/(3n)})^{-1} = \frac{1}{2}.$$

□

Zadanie 5. Korzystając z rozwinięcia $f(x) = \operatorname{arctg} x$ w szereg Taylora znaleźć sumę szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Rozwiązanie: Wiemy, że

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dla $x < 1$ i $y \equiv -x^2$, wiemy, że

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Zatem, prawa strona to szereg Taylora funkcji $g(x) = (1+x^2)^{-1}$. Całka prawej strony będzie szeregiem Taylora dla $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C,$$

gdzie C trzeba ustalić przypominając, że $f(0) = C = 0$. Wówczas,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Wreszcie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

□

Zadanie 6. Korzystając z rozwinięcia funkcji $\sin x$ oraz $\cos x$ w szereg Taylora znaleźć sumę szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}.$$

Rozwiązanie: Mamy, że szereg Taylora sinusa i cosinusa mają postać

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Widać, że

$$-\sin x + x\cos x = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}\left(-\frac{1}{2n+1} + 1\right).$$

Z tego wynika, że

$$\frac{1}{2}(-\sin x + x\cos x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1).$$

□