Szereg Taylora

Javier de Lucas

Zadanie 1. Wykaż, że $e^x > 1 + x$ dla każdego $x \neq 0$.

Rozwiązanie: Funkcja $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w $\mathbb{R}$. Z tego powodu, dla każdych $x, x_0 \in \mathbb{R}$ możemy zapisać funkcję $f(x)$ za pomocą wzoru Taylora wokół x_0 jak:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x, x_0),$$

gdzie $R_n(x, x_0)$ to jakaś funkcja, tzw *reszta*, taka, że $\lim_{x \to x_0} R_n(x, x_0)/(x - x_0)^n = 0$ i $f^{k)}(x_0)$ to pochodna stopnia k w punkcie x_0, tj. $f^{k)}(x_0) \equiv d^k f/dx^k(x_0)$ dla $k > 0$ i zdefiniujemy $f^{0)}(x_0) = f(x_0)$. Mówimy, że

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

to rozwinięcie/wielomian Taylora stopnia n funkcji f wokół x_0.

Resztę można zapisać na kilka sposobów. Tutaj korzystamy z reszty w postaci Lagrange'a:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

gdzie θ to jakaś liczba między x i x_0, tj. $x_0 < \theta < x$ lub $x < \theta < x_0$.

Aby rozwiązać zadanie, wystarczy korzystać z wzoru Taylora dla $n = 2$ wokół $x_0 = 0$. W takim przypadku, mamy ,że $f^{0)}(0) = f^{1)}(0) = 1$ i $f^{2)}(\theta) = e^\theta$. Więc,

$$f(x) = 1 + x + R_1(x, 0), \qquad R_1(x, 0) = \frac{e^\theta}{2!}x^2.$$

Skoro $e^\theta > 0$, to $R_1(x, 0) > 0$ dla $x \neq 0$. Zatem,

$$1 + x < 1 + x + R_1(x, 0) = e^x, \qquad \forall x \neq 0.$$

□

Zadanie 2. Wykaż, że $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ dla każdego $x \neq 0$.

Rozwiązanie: Już wiemy, że funkcja $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w $\mathbb{R}$. Wówczas, dla każdego $x, x_0 \in \mathbb{R}$ możemy zapisać funkcję $f(x)$ za pomocą wzoru Taylora wokół x_0 jak:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x, x_0),$$

gdzie resztę można zapisać jako:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

gdzie θ to jakaś liczba między x i x_0, tj. $x_0 < \theta < x$ lub $x < \theta < x_0$.

Aby rozwiązać zadanie, wystarczy korzystać z wzoru Taylora dla $n = 3$ wokół $x_0 = 0$. W takim przypadku, mamy ,że $f^{k)}(0) = 1$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ i $f^{4)}(\theta) = e^\theta$. Więc,

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + R_3(x, 0), \qquad R_3(x, 0) = \frac{e^\theta}{4!}x^2.$$

Skoro $e^\theta > 0$, to $R_3(x, 0) > 0$ dla $x \neq 0$. Zatem

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 < 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + R_3(x, 0) = e^x, \qquad \forall x \neq 0.$$

□

Zadanie 3. Rozwiń wielomian $f(x) = x^2 - 5x + 6$: a) wokół punktu $x = 1$, b) wokół punktu $x = -5$.

Rozwiązanie: Funkcja $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 5x + 6 \in \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w $\mathbb{R}$. Z tego powodu, dla każdego $x, x_0 \in \mathbb{R}$ możemy zapisać funkcję $f(x)$ za pomocą wzoru Taylora wokół x_0 jak:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x, x_0),$$

gdzie resztę, w postaci Lagrange'a, można zapisać jako:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^n,$$

gdzie θ to jakaś liczba między x i x_0. W szczególności dla $x_0 = 1$ i $n > 3$ mamy, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1},$$

gdzie θ to punkty między 1 i x (włącznie). Aby rozwiązać zadanie, wystarczy korzystać z wzoru Taylora dla $n > 2$ wokół $x_0 = 1$. W takim przypadku, mamy ,że

$$f^{0)}(1) = 2, \quad f^{1)}(1) = -3, \quad f^{2)}(1) = 2, \quad f^{k)}(\theta) = 0, \qquad k > 2, \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Więc, $R_n(x,1) = 0$ i

$$f(x) = 2 - 3(x-1) + (x-1)^2.$$

Właśnie, rozwinięcie Taylora stopnia $n > n'$ wielomianu $P(x)$ stopnia n' to właśnie wielomian $P(x)$. To się dzieje dlatego, że rozwinięcie Taylora to jest wielomian, który ma takie same pochodne jak funkcja f w pewnym punkcie x_0. Kiedy funkcja to wielomian, to tylko taki wielomian spełnia, że jego pochodne aż do stopnia n w x_0 są takie same. Więc, wielomian Taylora równa się wielomian $P(x)$.

Teraz rozwinięcie Taylora funkcji $f(x)$ dla $x_0 = -5$ i $n > 3$ jest

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-1)^{n},$$

gdzie θ to punkty między -5 i x. Aby rozwiązać zadanie, wystarczy korzystać z wzoru Taylora dla $n > 2$ wokół $x_0 = -5$. W takim przypadku, mamy ,że

$$f^{0)}(-5) = 56, \quad f^{1)}(-5) = 21, \quad f^{2)}(-5) = -10, \quad f^{k)}(\theta) = 0, \qquad k > 2, \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Więc, $R_n(x,1) = 0$ i

$$f(x) = 56 + 21(x+5) - 5(x+5)^2.$$

Skoro reszta równa się zeru dla $n > 2$, to rozwinięcie Taylora i wzór Taylora dla $n > 2$.
□

Zadanie 4. Rozwiń za pomocą wzoru Taylora w otoczeniu $x_0 = 0$ do n-tego stopnia włącznie następujące funkcje: e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $(1+x)^m$ i $m \in \mathbb{N}$, $(1+x)^{-1}$, $\sqrt{1+x}$, $(1+x)^{-1/2}$.

Rozwiązanie: Funkcja $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w $\mathbb{R}$. Z tego powodu, dla każdego $x, x_0 \in \mathbb{R}$ możemy zapisać funkcję $f(x)$ za pomocą wzoru Taylora wokół x_0 jak:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x, x_0),$$

gdzie resztę, w postaci Lagrange'a, można zapisać jako:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

gdzie θ to jakaś liczba między x i x_0. W szczególności, dla $x_0 = 0$ mamy tzw wzór McLaurina

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Dla funkcji $f(x) = e^x$ już wiemy, że $f^{n+1)}(\theta) = e^\theta$ i

$$\frac{d^k f}{dx^k}(0) = 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Zatem,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1},$$

gdzie θ to punkty między 0 i x, tj. $0 < \theta < x$. Rozwinięcie/wielomian Taylora stopnia n funkcji f wokół $x_0 = 0$ to

$$T_n f(x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ mamy, że

$$\frac{df}{dx}(x) = \cos(x) = \sin(x+\pi/2), \quad \frac{d^2f}{dx^2} = -\sin(x) = \sin(x+\pi) \;\Rightarrow\; \frac{d^kf}{dx^k}(x) = \sin(x+k\pi/2)$$

dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zatem, dla $x = 0$ otrzymamy

$$\frac{df}{dx}(0) = 1, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3f}{dx^2} = -1 \;\Rightarrow\; \frac{d^{2k+1}f}{dx^{2k+1}}(x) = (-1)^k, \quad \frac{d^{2k}f}{dx^{2k}}(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

i wzór McLaurina przyjmuje postać

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sin(\theta + (2n+2)\pi/2)}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

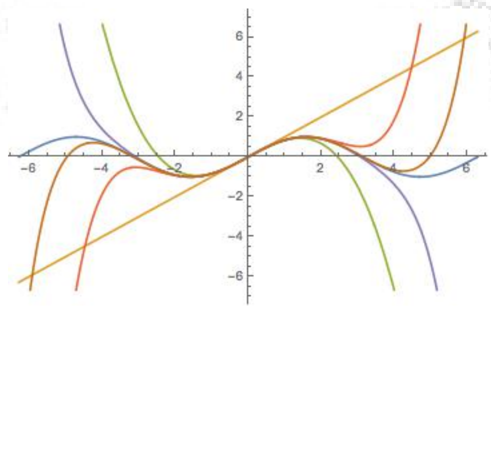
gdzie θ to punkty między 0 i x, tj. $0 < \theta < x$ lub $x < \theta < 0$. Rozwinięcie/wielomian Taylora stopnia n to

$$T_n f(x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Warto zawsze pamiętać takie rozwinięcie. Dla $n \to +\infty$ otrzymamy tzw szereg Taylora funkcji $\sin(x)$ wokół punktu $x_0 = 0$:

$$S(x, 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Kiedy prawa strona istnieje dla pewnego x, to $f(x) = S(x, 0)$. Jeżeli tak jest dla każdego punktu $x \in \mathbb{R}$, mówimy, że $f(x)$ jest *analityczna*. Następująco pokazujemy jak rozwinięcie Taylora zbliża się do $f(x) = \sin(x)$ dla stopnia $1, 3, 5, 7$ i 9.



Dla funkcji $f(x) = \cos(x)$ mamy, że

$$\frac{df}{dx}(x) = -\sin(x) = \cos(x{+}\pi/2), \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = -\cos(x) = \cos(x{+}\pi) \;\Rightarrow \frac{d^k f}{dx^k}(x) = \cos(x{+}k\pi/2)$$

dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zatem, dla $x = 0$ otrzymamy,

$$\frac{df}{dx}(0) = 0,\; \frac{d^2 f}{dx^2} = -1,\; \frac{d^3 f}{dx^3} = 0,\; \frac{d^4 f}{dx^4} = 1 \;\Rightarrow \frac{d^{2k+1} f}{dx^{2k+1}}(x) = 0,\; \frac{d^{2k} f}{dx^{2k}}(x) = (-1)^k,$$

dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ i wzór McLaurina przyjmuje postać

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\cos(\theta + (2n+1)\pi/2)}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

gdzie θ to punkty między 0 i x, tj. $x < \theta < 0$ lub $0 < \theta < x$. Rozwinięcie/wielomian Taylora stopnia n funkcji f wokół $x = 0$ to

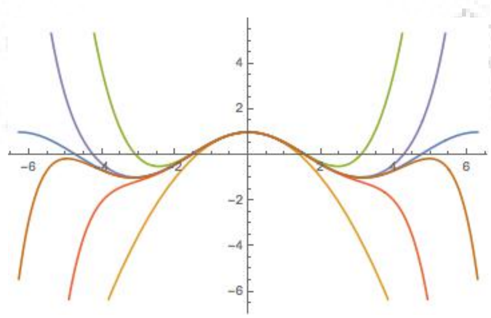
$$T_n f(x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Warto pamiętać taki wzór Dla $n \to +\infty$ otrzymamy tzw szereg Taylora funkcji $\sin(x)$ wokół punktu $x = 0$:

$$S(x, 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Kiedy prawa strona istnieje dla pewnego x, to $f(x) = S(x, 0)$. Jeżeli tak jest dla każdego punktu $x \in \mathbb{R}$, mówimy, że $f(x)$ jest *analityczna*.

Następująco pokazujemy jak rozwinięcie Taylora zbliża się do $f(x) = \cos(x)$ dla stopnia $2, 4, 6, 8$ i 10.



ANALIZA I
16 grudnia 2014
Semestr zimowy
Lista XV

Dla funkcji $f(x) = (1+x)^m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$, mamy, że

$$\frac{df}{dx}(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \Rightarrow \frac{d^k f}{dx^k}(x) = \frac{m!(1+x)^{m-k}}{(m-k)!}, \quad k \leq m,$$

dla $k > m$ mamy, że $d^k f/dx^k = 0$. Zatem, dla $x = 0$ otrzymamy,

$$\frac{df}{dx}(0) = m, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(0) = m(m-1) \Rightarrow \frac{d^k f}{dx^k}(0) = \frac{m!}{(m-k)!}, \qquad k \leq m.$$

i wzór McLaurina przyjmuje postać z resztą Lagrange'a:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{m!}{k!(m-k)!} x^k + \frac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!}(1+\theta)^{m-n-1} x^{n+1}, n \leq m$$

i

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + \binom{m}{n+1} (1+\theta)^{m-n-1} x^{n+1} \qquad n \leq m.$$

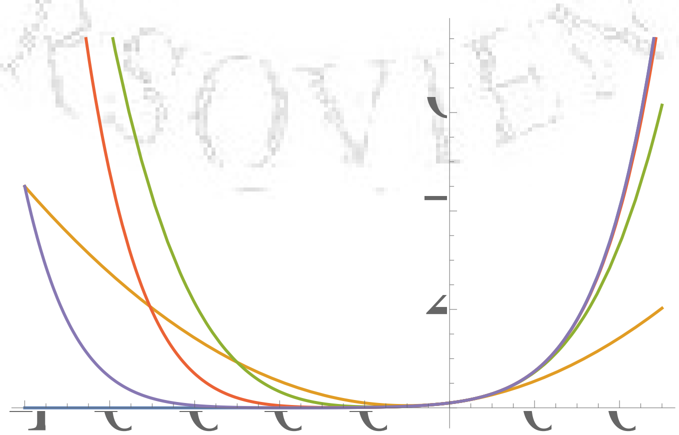
Dla $n \geq m$ to

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k, \qquad n \geq m.$$

ponieważ reszta się zeruje. Rozwinięcie/wielomian Taylora stopnia n wokół $x_0 = 0$ to

$$T_n f(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}, \qquad m \geq n, \qquad T_n f(x,0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}, \qquad m < n.$$

Następująco pokazujemy jak rozwinięcie Taylora zbliża się do $f(x) = (1+x)^{11}$ dla stopnia $2, 4, 6, 8$ i 10. Funkcja jest na niebiesko.



ANALIZA I
16 grudnia 2014
Semestr zimowy
Lista XV

Dla funkcji $f(x) = (1+x)^{-1}$ mamy, że

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \frac{d^2f}{dx^2}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad \frac{d^3f}{dx^3}(x) = -\frac{3\cdot 2\cdot 1}{(1+x)^4}$$

i

$$\frac{d^kf}{dx^k}(x) = (-1)^k k!(1+x)^{-k-1} \Rightarrow \frac{d^kf}{dx^k}(0) = (-1)^k k!.$$

Wzór McLaurina przyjmuje dla $f(x)$ postać:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^n}{(1+\theta)^{n+1}} x^{n+1}$$

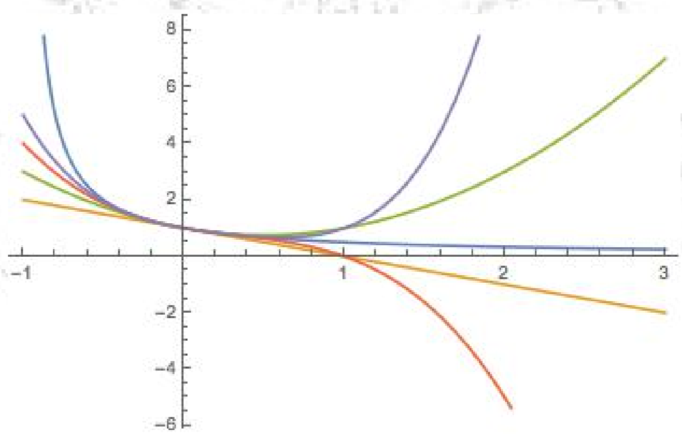
dla θ między 0 i x. Wówczas, rozwinięcie Taylora funkcji $f(x)$ wokół $x_0 = 0$ stopnia n ma postać:

$$T_n f(x,0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

To rozwinięcie można obliczyć inaczej:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.$$

Możemy pokazać jak rozwinięcie Taylora zbliżają do funkcji $1/(1+x)$:



Dla funkcji $f(x) = \sqrt{1+x}$ mamy, że

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}, \quad \frac{d^3 f}{dx^3}(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}(1+x)^{-5/2}$$

i dla $k > 0$:

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x) = (-1)^{k+1}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{(2k-3)}{2}(1+x)^{-(2k-1)/2} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!}(1+x)^{-(2k-1)/2}.$$

Zatem, dla $x = 0$ otrzymamy,

$$f(0) = 1, \qquad \frac{d^k f}{dx^k}(0) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!}, \qquad k > 0.$$

Wzór McLaurina przyjmuje dla $f(x)$ postać:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}}\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^k + R_n(x,0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{(2k-1)(k!)^2}x^k + R_n(x,0),$$

i

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)4^k}\binom{2k}{k}x^k + R_n(x,0).$$

Rozwinięcie McLaurina funkcji f stopnia n to

$$T_n f(x,0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)4^k}\binom{2k}{k}x^k.$$

$\square$

Zadanie 5. Rozwiń za pomocą wzoru Taylora w otoczeniu $x_0 = 0$ do n-tego stopnia włącznie następujące funkcje: $\ln(x)$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $e^{\frac{1}{x}}$.

Rozwiązanie: Funkcje $\ln(x)$ i $e^{\frac{1}{x}}$ nie są dobrze zdefiniowane w punkcie $x_0 = 0$, więc, nie można podać wzoru Taylora dla tych funkcji wokół tego punktu. (Temat zaawanzowany) Natomiast, można podać wzór Taylora dla funkcji $f : x \in]-\infty, 0] \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ postaci $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ dla $x < 0$ i $f(0) = 0$. Właśnie, jeżeli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna stopnia $n+1$ na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ i posiada pochodne rzędów do $n+1$ (włącznie) w (a,b) po prawej stronie w $x = a$ i po lewej w $x = b$, to możemy napisać wzór Taylora dla f dla punktów $x \in [a,b]$. W naszym przypadku,

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0, \qquad f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = 0.$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}, \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{2}{x^3}e^{1/x} + \frac{1}{x^4}e^{1/x} \Rightarrow \frac{d^kf}{dx^k} = \left(\sum_{\alpha=0}^{2k} \frac{c_\alpha}{x^\alpha}\right) e^{1/x}, \qquad x < 0.$$

Zatem, przez indukcję

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f^{k)}(x) - f^{k)}(0)}{x} = 0 = \lim_{x\to 0^-} \frac{d^kf}{dx^k}.$$

Wtedy, funkcję mają ciągłe pochodne wszystkich rzędów. Wówczas, mamy, że

$$f(x) = R_n(x,0).$$

Czyli rozwinięcie Taylora dla każdego stopnia n jest zero!!! Ta dziwna funkcja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna, ale rozwinięcie Taylora nie zbliża się do $f(x)$. W takim przypadku, mówi się, że taka funkcja nie jest analityczna. Natomiast $f(x)$ jest gładka.

Dla funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ mamy, że

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \frac{d^2f}{dx^2}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \frac{d^3f}{dx^3}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad x > -1.$$

Zatem,

$$\frac{d^kf}{dx^k}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k} \Rightarrow \frac{d^kf}{dx^k}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)! \qquad x > -1, k > 0$$

i, skoro $f(0)=0$, to wzór Taylora dla tej funkcji ma postać

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}x^k+R_n(x,0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k+R_n(x,0).$$

Wówczas rozwinięcie Taylora wokołł zera funkcji $\ln(1+x)$ stopnia n jest

$$T_n(x,0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k=x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

Warto pamiętać taką rozwinięcie. Można obliczyć to rozwinięcie inaczej.

$\square$

Zadanie 6. Napisać rozwinięcie funkcji $e^{\sin x}$ do wyrazów z x^3.

Rozwiązanie: Wiemy, że szereg McLaurina dla e^y i $\sin x$ to

$$e^y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!},\qquad \sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Zatem

$$e^{\sin x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{x^{2k'+1}}{(2k'+1)!}\right)^k.$$

Rozwinięcie Taylora $e^{\sin x}$ trzeciego rzedu, to część trzeciego rzędu szeregu Taylora. Skoro

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)^3\ldots$$

to rozwinięcie Taylora funkcji $f(x)=e^{\sin x}$ trzeciego rzędu wokół $x_0=0$ to

$$T_3f(x,0)=1+x+\frac{1}{2}x^2.$$

$\square$

Zadanie 7. Napisać rozwinięcie funkcji $\ln(\cos x)$ do wyrazów z x^6.

Rozwiązanie: Wiemy, że szereg McLaurina dla $\ln(1+y)$ (dla $y>0$) i $\cos x$ to

$$\ln(1+y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} y^k, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Zatem

$$\ln(\cos x) = \ln(1+\cos x - 1) = \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)^2$$
$$+ \cdot \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)^4 + \ldots$$

Rozwinięcie Taylora $\ln(\cos x)$ szóstego rzedu, to część szóstego rzędu szeregu Taylora. Skoro

$$T_6(x,0) = -\frac{1}{2!}x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2\cdot 4}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2!4!} - \frac{1}{3\cdot 8}\right)x^6 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6.$$

□

Zadanie 8. Oblicz za pomocą wzoru Taylora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Rozwiązanie: Aby obliczyć granice za pomocą rozwinięć Taylora, trzeba obliczyć rozwinięcie licznika i mianownika aż do takiego rzędu, aby nie otrzymać nieoznaczoności. Na przykład, do pierwszego rzędu:

$$\sin x = x + O(x), \;\; \ln(1+x) = x + O(x), \;\; \Rightarrow \;\; \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

i

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

□

Zadanie 9. Oblicz za pomocą wzoru Taylora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{3}{x^4} - \frac{\cos x + 2}{x^3 \sin x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\ln x}.$$

Rozwiązanie: Mamy, że dla $f(x) = x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ wynika, że $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$,

$$f''(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \Rightarrow f''(0) = 0, \qquad f'''(x) = \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}} \Rightarrow f'''(0) = 1/6.$$

Zatem rozwinięcie Taylora dla $f(x)$ jest $x^3/6$. Korzystając z tego

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/6}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Dla drugiej granicy:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{3}{x^4} - \frac{\cos x + 2}{x^3 \sin x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{x^4 \sin x} \right)$$

Rozwinięcie piątego stopnia liczniku to

$$3(x - x^3/3! + x^5/5!) - x(1 - x^2/2 + x^4/4!) - 2x = 3x - 3x - x^3/2 + x^3/2 + 3x^5/5! - x^5/4! = -2/(5\cdot 4!)x^5$$

Rozwinięcie piątego stopnia mianowniku to x^5 Zatem

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{x^3 \sin x} \right) = \lim_{\to 0} \frac{-2/(5\cdot 4!)x^5}{x^5} = -\frac{1}{60}.$$

□

Zadanie 10. Korzystając ze wzoru Taylora oblicz granice:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cosh x + x^2}{x^3 \sin^3 x}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}(x))^{\mathrm{tg}(2x)}.$$

Rozwiązanie: Przypominając, że $\sin(x) = x - x^3/3! + O(x^3)$ wynika, że mianownik ma rozwinięcie Taylora różne od zera dla stopnia $n \geq 6$. Jednocześnie, dla licznika $l(x) = \cos x - \cosh + x^2$ mamy, że

$$l(0) = 0, \ \frac{dl}{dx}(0) = (-\sin x - \sinh x + 2x)(0) = 0, \ \frac{d^2 l}{dx^2}(0) = (-\cos x - \cosh x + 2)(0) = 0,$$

$$\frac{d^3 l}{dx^3}(0) = (\sin x - \sinh x)(0) = 0, \ \frac{d^4 l}{dx^4}(0) = (\cos x - \cosh x)(0) = 0,$$

$$\frac{d^5 l}{dx^5}(0) = (-\sin x - \sinh x)(0) = 0, \ \frac{d^6 l}{dx^6}(0) = (-\cos x - \cosh x)(0) = -2,$$

Z tego wynika, że
$$l(x) = -2x^6/6! + O(x^2).$$

Natomiast
$$m(x) = x^6 + O(x^6).$$

Łatwo to udowodnić patrząc, że $\sin(x) = x + O(x^3)$ i $x^3 \sin^3(x) = x^3(x + O(x^3))^3 = x^6 + O(x^6)$. Zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cosh x + x^2}{x^3 \sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^6/6!}{x^6} = -\frac{2}{6!},$$

Taka granica można rozwiązać leko inaczej. Wiemy, że

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

i

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots.$$

Z tego wynika, że licznik ma rozwinięcie wokół zera szóstego rzędu:

$$x^3 \sin^3 x = x^3 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)^3 = x^6 + O(x^6)$$

i mianownik
$$\cos x - \cosh x + x^2 = -2x^6/6! + O(x^6).$$

Zatem
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cosh x + x^2}{x^3 \sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^6/6!}{x^6} = -\frac{2}{6!}.$$

Dla drugiej granicy mamy, że

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}(x))^{\mathrm{tg}(2x)} = 1^0 \ \boxed{\text{nieoznaczoność}}.$$

Aby uprościć obliczenie granicy piszemy, że

$$\ln \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}(x))^{\mathrm{tg}(2x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \ln (\mathrm{tg}(x))^{\mathrm{tg}(2x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(2x) \ln (\mathrm{tg}(x)) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln (\mathrm{tg}(x))}{\mathrm{ctg}(2x)}.$$

Teraz

$$\mathrm{ctg}(2x) = -2x+O(x), \qquad \ln(\mathrm{tg}(x)) = x+O(x) \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\mathrm{tg}(x)\right)}{\mathrm{ctg}(2x)} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2(x-\pi/4)}{2(x-\pi/4)} = -1.$$

Zatem

$$\ln \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\mathrm{tg}(x)\right)^{\mathrm{tg}(2x)} = -1 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\mathrm{tg}(x)\right)^{\mathrm{tg}(2x)} = e^{-1}.$$

□