ANALIZA I
24 i 28 października 2014
Semestr zimowy
Lista VI

Granice ciągów

Javier de Lucas

Zadanie 1. Bezpośrednio z warunku Cauchy'ego wykazać, że ciąg $\{\frac{1}{n}\}$ jest zbieżny.

Zadanie 2. Bezpośrednio z warunku Cauchy'ego wykazać, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ jest zbieżny.

Zadanie 3. Znaleźć granicę ciągu danego wzorem rekurencyjnym:

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n^2}, \qquad a_1 > 0, \quad a_1 \neq 1.$$

Zadanie 4. Zbadać zbieżność ciągów:

$$(a)\ a_n = \cos\left(\frac{\pi n^3}{2n^2+n}\right), \qquad (b)\ b_n = \frac{n}{2n+1}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right).$$

Rozwiązanie: Widać, że

$$\frac{\pi n^3}{2n^2+n}$$

dązy do $+\infty$. Z tego powodu, możemy spodziewać się, że cosinus tego kąta będzie oscylujący i $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie oscylujący. Aby udowodnić, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ nie jest zbieżny wprowadzamy dowód niewprost. Zakładamy, że $\lim_{n\to+\infty} a_n$ isnieje i udowodnimy, że pojawia się jakas sprzeczność. Aby to zrobić, korzystamy z faktu, że jeżeli $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, to dla każdego podciągu $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mamy, że $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = a$.

Teraz, mamy zamiar zbudować dwa podciągi $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{a_{n'_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ takie, że

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} \neq \lim_{k\to+\infty} a_{n'_k}.$$

Czyli otrzymamy jakąs sprzeczność.

Zamin to robimy, możemy uproscić a_n:

$$a_n = \cos\left(\frac{\pi n^2}{2n+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi n^2}{2n+1} - \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi n}{2}\right) = \cos\left(\frac{-\pi n}{2(2n+1)} + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Dla podciągu $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, gdzie $n_k = 4k$, mamy

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} \cos\left(\frac{-\pi 4k}{2(8k+1)} + \frac{\pi 4k}{2}\right) = \lim_{k\to+\infty} \cos\left(\frac{-\pi 4k}{2(8k+1)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi 2k}{8k+1}\right).$$

Skoro

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\pi 2k}{8k+1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \exists k_0, \forall k > k_0, \qquad \frac{\pi}{4} - \epsilon < \frac{\pi 4k}{2(8k+1)} < \frac{\pi}{4} + \epsilon$$

Ponieważ $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \simeq 0.7$, można ustalić ϵ i k_0 aby zagwarantować, że

$$\forall k > k_0, \qquad \frac{1}{2} < \cos\left(\frac{\pi 4k}{2(8k+1)}\right) < 1.$$

Jednocześnie, dla podciągu $\{a_{n'_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, gdzie $n'_k = 4k+2$, mamy

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n'_k} = \lim_{k\to+\infty} \cos\left(\frac{-\pi(4k+2)}{2(8k+5)} + \frac{\pi 4k}{2} + \pi\right) = -\lim_{k\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{8k+5}\right).$$

Skoro

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\pi(2k+1)}{8k+5} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \exists k_0, \forall k > k_0, \qquad \frac{\pi}{4} - \epsilon < \frac{-\pi(4k+2)}{2(8k+5)} < \frac{\pi}{4} + \epsilon$$

Więc, można ustalić ϵ aby zagwarantować, że

$$\exists k_0, \forall k > k_0, \qquad -1 < -\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{8k+5}\right) < -\frac{1}{2}.$$

Więc, jeżeli istnieją takie granicy, to te podciągi mają granice mniejsze i większe od zera, więc te granicy są różne. To sprzeczność i nie istnieje granica ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Możemy udowodnić, że ciąg $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie ma granicy jak wcześniej. Wprowadzamy dowód niewprost. Zakładamy, że $\lim_{n\to+\infty} b_n$ isnieje, to

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{k\to+\infty} b_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} b_{n'_k}$$

dla podciągów $\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{b_{n'_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, gdzie $n_k = 3k$ i $n'_k = 3k+1$.

Natomiast,

$$\lim_{k\to+\infty} b_{n_k} = \frac{3k}{6k+1}\sin(2\pi k) = 0$$

i

$$\lim_{k\to+\infty} b_{n'_k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{3k+1}{6k+3}\sin\left(2\pi k+\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Zatem

$$\lim_{k\to+\infty} b_{n_k} \neq \lim_{k\to+\infty} b_{n'_k},$$

to sprzeczność i ciąg $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie ma granicy.

□

Zadanie 5. Zbadać zbieżność ciągu i znaleźć granicę:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}.$$

Rozwiązanie: Trudno obliczyć sumę ciągu. Więc, najłatwieszy to ograniczyć cią z góry i z dółi korzystać z twierdzenia trzech ciągów. Aby to zrobić, będzie korzystny usunąć i, ponieważ utrudnia obliczenie granicy.

Skoro $i \leq n$, widać, że

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

Mamy, że

$$1 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2}} > \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Więc,

$$1 \geq \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \geq \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

Z tego wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}} = 1.$$

□

Zadanie 6. Zbadać zbieżność ciągu i znaleźć granicę:

$$a_n = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n},$$

gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, a $\lambda_i > 0$.

Rozwiązanie: Aby wiedzieć, jak rozwiązać ten problem można pamiętać prosty przykład:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n}.$$

Pamiętamy, że można to rozwiązać za pomocą twierdzenia trzech ciągów i powiedzieć, że

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n + 3^n}$$

Zatem

$$3 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + 3^n + 3^n} = \lim_{n\to+\infty} 3\sqrt[n]{3} = 3.$$

Podobnie,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^n + 5^n + 8^n}.$$

Pamiętamy, że można to rozwiązać za pomocą twierdzenia trzech ciągów i powiedzieć, że

$$\sqrt[n]{8^n} \leq \sqrt[n]{1^n + 5^n + 8^n} \leq \sqrt[n]{8^n + 8^n + 8^n}$$

Zatem

$$8 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{8^n} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^n + 5^n + 8^n} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{8^n + 8^n + 8^n} = \lim_{n\to+\infty} 8\sqrt[n]{3} = 8.$$

Widać, że nasz problem to proste uogólnienia poprzednich granic. Więc, znowu możemy korzystać z twierdzenia trzech ciągów. Widać, że dla $\lambda = \max(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ mamy, że

$$\lambda = \sqrt[n]{\lambda^n} \leq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n} \leq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} \lambda^n} = \lambda\sqrt[n]{k}.$$

Zatem

$$\lambda \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n} \leq \lim_{n\to+\infty} \lambda \sqrt[n]{k} = \lambda$$

i

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n} = \lambda.$$

□

Zadanie 7. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym: $u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, $u_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$, $u_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n$, $u_n = \left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n+3}$, $u_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$, $u_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

Rozwiązanie: Prawie wszystkie granice można rozwiązać korzystając z wzoru

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{1/a_n} = e.$$

Na przykład

- $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2}\right]^2 = e^2.$$
- $$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{1/n} = 1.$$
- $$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{4}{n}\right)^{3-n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n/4}\right]^{4(n-3)/n} = e^4.$$
- $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+5}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n/5}\right]^5 = e^5.$$
- $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{6}{n^2}\right)^{n^2/6}\right]^6 = e^6.$$

- $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\right]^{n^2}=0.$$

$\square$

Zadanie 8. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym $u_n=\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$, $u_n=\sqrt{n(n-\sqrt{n^2-1})}$, $u_n=n(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1})$, $u_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, $u_n=2^{-n}a\cos n\pi$, $u_n=\frac{n\sin n!}{n^2+1}$, $u_n=n(\ln(n+1)-\ln n)$, $u_n=\frac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$, $u_n=\frac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$, $u_n=\frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$, $u_n=\frac{n!}{n^n}$, $u_n=\frac{2^n3^n}{n!}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+\sqrt{n}})^2-(\sqrt{n-\sqrt{n}})^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{n}/\sqrt{n}}{\sqrt{n/n+1/\sqrt{n}}+\sqrt{n/n-1/\sqrt{n}}}=1.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n(n-\sqrt{n^2-1})}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})}{n+\sqrt{n^2-1}}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n(n^2-(n^2-1))}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}/\sqrt{n}}{\sqrt{n/n+\sqrt{n^2/n^2-1/n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}n(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1})=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(2n^2+1-(2n^2-1))}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n/n}{\sqrt{2n^2/n^2+1/n^2}+\sqrt{2n^2/n^2-1/n^2}}=1/\sqrt{2}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}$$

Korzystamy z twierdzenia trzech ciągów

$$-\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n \sin n!}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

$$0 = \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{n^2+1} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n \sin n!}{n^2+1} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

Zatem

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \sin n!}{n^2+1} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n(\log(1+n) - \log(n)) = \lim_{n\to+\infty} n \log\left(\frac{1+n}{n}\right).$$

Mamy, że

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x.$$

Więc,

$$n\frac{1/n}{1+1/n} \leq n\log\left(\frac{1+n}{n}\right) \leq n\frac{1}{n} = 1$$

Z twierdzenia trzech ciągów

$$\lim_{n\to+\infty} n\frac{1/n}{1+1/n} \leq \lim_{n\to+\infty} n\log\left(\frac{1+n}{n}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} n\frac{1}{n} = 1$$

i

$$1 \leq \lim_{n\to+\infty} n\log\left(\frac{1+n}{n}\right) \leq 1$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n(\log(1+n) - \log(n) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Korzystając z Stirling

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

mamy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sqrt{2\pi n} = 0.$$

□