Twierdzenie Stolza i metryki

Javier de Lucas

Zadanie 1. Zbadać zbieżność ciągu i znaleźć granicę:

$$a_n = \frac{1^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}} + \cdots + (2n+1)^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{5}{4}}}.$$

Rozwiązanie: Żeby obliczyć taką granicę korzystamy z twierdzenia Stolza, które mówi nam, że

$$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ rosnący}, \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty, \lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n} = b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{b_n} = b.$$

Aby obliczyć $\lim_{n\to+\infty} a_n$ zdefiniujemy

$$a_n := \frac{c_n}{b_n}, \qquad c_n := 1^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}} + \cdots + (2n+1)^{\frac{1}{4}}, \qquad b_n := n^{5/4}.$$

Ciąg $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący i $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Dodatkowo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+3)^{\frac{1}{4}}}{(n+1)^{\frac{5}{4}} - n^{\frac{5}{4}}} \stackrel{\text{niocz.}}{=} \frac{\infty}{\infty-\infty}.$$

To niocznasność typu $\infty/(\infty-\infty)$. Aby to rozwiązać, usuniemy $\infty-\infty$ korzystając z wzoru

$$A^4 - B^4 = (A-B)(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3).$$

W szczególności, dla $A = (n+1)^{\frac{5}{4}}$ i $B = n^{\frac{5}{4}}$ otrzymamy

$$\begin{aligned}(n+1)^{\frac{5}{4}} - n^{\frac{5}{4}} &= \frac{(n+1)^5 - n^5}{(n+1)^{\frac{15}{4}} + (n+1)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{5}{4}} + (n+1)^{\frac{5}{4}} n^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{15}{4}}} \\ &= \frac{5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1}{(n+1)^{\frac{15}{4}} + (n+1)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{5}{4}} + (n+1)^{\frac{5}{4}} n^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{15}{4}}},\end{aligned}$$

gdzie korzystaliśmy z faktu, że $(1+n)^5 = 1 + 5n + 10n^2 + 10n^3 + 5n^4 + n^5$. Wspóczynniki tego wielomianu można ustaliś za pomocą trojkąta Tartaglia albo za pomocą znaków Newtona. Z powyższego wzoru wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to+\infty}(2n+3)^{\frac{1}{4}}\frac{(n+1)^{\frac{15}{4}}+(n+1)^{\frac{5}{2}}n^{\frac{5}{4}}+(n+1)^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{2}}+n^{\frac{15}{4}}}{5n^4+10n^3+10n^2+5n+1}=\frac{4\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{5}.$$

Z twierdzenia Stolza

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{4\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{5}=\frac{2^{\frac{9}{4}}}{5}.$$

□

Zadanie 2. Sprawdzić, korzystając z Tw. Stolza, że:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\ldots+n^5}{n^6}=\frac{1}{6},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=2(\sqrt{2}-1).$$

Rozwiązanie: Dla pierwszej granicy mamy, że mianownik to ciąg $\{n^6\}_{n\in\mathbb{N}}$ rosnący, który dąży do $+\infty$. Więc, spróbujemy korzystać z Stolza dla $c_n=1^5+\ldots+n^5$ i $b_n=n^6$. Czyli spróbujemy obliczyć granicę $\lim_{n\to+\infty}\frac{c_n}{b_n}$ za pomocą $\lim_{n\to+\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n}$. Aby to zrobić, musimy jeszcze sprawdzić granicę:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{(n+1)^6-n^6}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{6n^5+15n^4+20n^3+15n^2+6n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^5}{6n^5/n^5+15n^4/n^5+20n^3/n^5+15n^2/n^5+6n/n^5+1/n^5}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Skoro istnieje, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\ldots+n^5}{n^6}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{1}{6}.$$

Dla drugiej granicy mamy, że mianownik to ciąg $\{\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ rosnący, który dąży do $+\infty$. Więc, możemy spróbować korzystać z Stolza dla $b_n = \sqrt{n}$ i

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Widać, że

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Więc,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{n+1} + (1-\sqrt{2})\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}\sqrt{2n+1}}\right)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}\sqrt{2n} + \sqrt{n}(1-\sqrt{2})\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+2}\sqrt{2n+1}}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}2.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n} = \sqrt{2}\left(1+1-\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{b_n}.$$

□

Zadanie 3. Wykazać, że jeżeli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots a_n}{n + (n-1) + \ldots + 1} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Rozwiązanie: Widać, że mianownik ciągu

$$u_n := \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots a_n}{n + (n-1) + \ldots + 1},$$

czyli

$$b_n = n + (n-1) + \ldots + 1$$

to ciąg rosnączy i $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Zatem, stosujemy twierdzenie Stolza dla

$$c_n := na_1 + (n-1)a_2 + \ldots a_n, \qquad b_n := n + (n-1) + \ldots + 1.$$

Mamy

$$\frac{c_{n+1} - c_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)a_1 + na_2 + \ldots a_{n+1} - (na_1 + (n-1)a_2 + \ldots a_n)}{n+1+n+\ldots+1 - (n + (n-1) + \ldots + 1)} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}.$$

Więc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}. \tag{3.1}$$

Natomiast, jeszcze nie wiemy czy istnieje granica

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}.$$

Aby to sprwadzić, korzystamy znowu z twierdzenia Stolza.. Mamy że mianownik to ciąg $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rosnący, który dąży do $+\infty$. Zdefiniujac $e_n := a_1 + \ldots + a_{n+1}$, mamy, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1} - e_n}{d_{n+1} - d_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+2} - (a_1 + \ldots + a_{n+1})}{n+2-(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Skoro $\lim_{n\to+\infty} a_n$ z założenia wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

i z tego i (3.1) wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

□

Zadanie 4. Narysować kule i d-odcinki w metryce „rzymskiej” w $\mathbb{R}^2$ czyli

$$d(x,y) = \begin{cases} |x| + |y|, & x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0, \\ |x - y|, & x_1y_2 - x_2y_1 = 0, \end{cases}$$

gdzie $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Rozwiązanie: Najpierw, obliczymy postać d-odcinków. Wiemy, że d-odcinek $[a,b]$ to zbiór elementów $x \in \mathbb{R}^2$ takich, że

$$d(a,x) + d(x,b) = d(a,b).$$

Zbadamy te d-odcinków dla różnych typów punktów $a, b \in \mathbb{R}^2$. Aby to zrobić, warto zauważyć, że

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \Leftrightarrow [\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x_1,x_2) = \lambda(y_1,y_2) \vee (y_1,y_2) = \lambda(x_1,x_2)].$$

Czyli wektory a i b są proporcjonalne. Też się mówi, że a i b są liniowo zależne. Kiedy ten warunek nie spełnia się, mówi się, że te wektory są liniowo niezależne.

• Jeżeli $|a| = |b| = 0$, to

$$0 = d(a,b) = d(0,x) + d(x,0).$$

Z tego wynika, że $d(0,x) = 0$. Z własciwosci metryki wynika, że $x = 0$. Zatem $[a,b] = \{(0,0)\}$.

• Załóżmy teraz, że $|a| \neq 0$ lub $|b| \neq 0$. Dodatkowo, zakładamy najpierw, że a i b są liniowo niezależne. Więc, $d(a,b) = |a| + |b|$ i elementy d-odcinku to te elementy $\mathbb{R}^2$ spełniające, że

$$d(a,x) + d(x,b) = |a| + |b|.$$

Mamy, że x może być:

(a) x nie jest proporcjonalny ani do a ani do b. Wtedy,

$$d(a,x) + d(x,b) = d(a,b) \Longrightarrow |a| + |b| + 2|x| = |a| + |b|.$$

Więc, $|x| = 0$. Natomiast, nie ma elementu x, takiego, że $|x| = 0$ i nie jest proporcjonalny do a i b.

(b) Jeżeli x jest proporcionalny do a i b, to $x = \lambda a$ i $x = \mu b$ dla pewnych libcz $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Widać, że jeżeli jeden z tych liczb jest nierówny zeru, np. λ, to $a = \mu/\lambda b$ i b i a są proporcjonalne. To jest przeciwko neszemu założeniu i $\lambda = \mu = 0$. Więc, $|x| = 0$ i $x = (0,0) \in [a,b]$.

(c) Jeżeli x jest proporcjonalny do a i nie jest proporcjonalny do b, to $x = \lambda a$ dla pewnej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$|(1-\lambda)a| + |\lambda a| + |b| = |a| + |b| \Leftrightarrow |1-\lambda||a| + |\lambda||a| = |a| \Leftrightarrow |1-\lambda| + |\lambda| = 1.$$

Więc, $|\lambda| \leq 1$, czyli $-1 \leq \lambda \leq 1$, i $|1-\lambda| \leq 1$, czyli $0 \leq \lambda \leq 2$. Widać, że powyższy równość spełnia się wtedy dla $0 \leq \lambda \leq 1$ i $\lambda a \in [a, b]$ dla $\lambda \in [0, 1]$.

Jeżeli mamy, że x jest proporcjonalny do b i nie do a, to mamy podobny wynik. Zatem, d-odcinki ma postać

$$[a, b] = \{\lambda a : \lambda \in [0, 1]\} \cup \{\lambda b : \lambda \in [0, 1]\}.$$

• Ustalmy teraz $[a, b]$ jeżeli a i b są liniowo zależne. W takim przypadku możemy napisać $a = \lambda b$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$ (lub $b = \lambda a$). Zakładamy, że $a = \lambda b$ i $b \neq 0$. Więc,

$$x \in [a, b] \Leftrightarrow d(a, x) + d(x, b) = |(1-\lambda)b|.$$

Teraz sprawdzamy rozwiązania ostatniej równości.

(a) Jeżeli b i x nie są proporcjonalne, to x nie jest proporcjonalny do a i

$$|b| + |x| + |\lambda||b| + |x| = |1-\lambda||b| \Leftrightarrow 2|x| = (|1-\lambda| - |1+|\lambda||)|b|.$$

Zatem $\lambda \leq 0$. Z tego wynika, że $|1-\lambda| = |1+|\lambda||$ i $|x| = 0$, ale nie ma takiego x ponieważ, byłby proporcjonalny do b.

Jeżeli x i b są proporcjonalne, to $x = \mu b$ dla pewnego $\mu \in \mathbb{R}$ i

$$|\lambda b - \mu b| + |b - \mu b| = |(1-\lambda)b| \Leftrightarrow (|\lambda - \mu| + |1-\mu|)|b| = |1-\lambda||b|$$

Z tego można udowodnić, że jeżeli $\lambda > 1$ to $1 \leq \mu \leq \lambda$. Natomiast, dla $\lambda \leq 1$ to $\lambda \leq \mu \leq 1$.

Więc, $[a, b]$ to wszystkie punkty między a i b.

Teraz obliczymy kulę o środek a i promień r, tj. $K(a, r)$:

Jeżeli punkt $x \in K(a, r)$ jest proporcjonalny do a, to $|x - a| < r$. To zbiór punktów λa dla $-r/|a| < \lambda < r/|a|$

Jeżeli punkty a, x nie są proporcjonalne, to

$$d(a, x) = |a| + |x| < r$$

Jeżeli $|x| \geq r$ nie ma punktów. Jeżeli $|x| < r$ to koło o promień $r - |x|$ i środek w $(0, 0)$ minus linia od 0 do a.

□

Zadanie 5. Niech $X := K(0,1)$ (czyli $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$) zaś:

$$d(x,y) := \min(|x-y|, 2-|x|-|y|). \tag{5.1}$$

Sprawdzić, że $d(x,y)$ jest metryką.

Rozwiązanie: Metryka w X to odwzorowanie $d : X \times X \to [0,+\infty[$ takie, że

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \qquad x,y \in X$
- $d(x,y) = d(y,x)$, dla każdych $x,y \in X$,
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$. dla wszystkich $x,y,z \in X$

Więc, aby udowodnić, że (5.1) to metryka, musimy sprawdzić czy spełnia powyższe własciwości. Skoro $|x|,|y| < 1$, to $2-|x|-|y| > 0$. Ponadto $|x-y| \geq 0$ i $d(x,y) \geq 0$. Więc, d jest funkcją nieujemną.

Sprawdzamy czy $d(x,y) \leftrightarrow x = y$. Jeżeli $x = y$ to $|x-y| = 0$. Skoro $|x| < 1$, $2|x| < 2$ i $2-|x|-|x| > 0$. Więc,

$$d(x,x) = \min(|x-x|, 2-|x|-|x|) = |x-x| = 0.$$

Z tego wynika, że

$$x = y \Rightarrow d(x,y) = 0.$$

Teraz odwrotnie. Jeżeli $d(x,y) = 0$ to $d(x,y) = \min(|x-y|, 2-|x|-|y|)$ i mamy dwie możliwości:

- Opcja 1: $0 = |x-y| \leq 2-|x|-|y|$, cyzli $x = y$.
- Opcja 2: $0 = 2-|x|-|y| \leq |x-y|$. Natomiast, skoro $|x|,|y| < 1$, $|x|+|y| < 2$ i $2-|x|-|y| > 0$. Więc, taka opcja jest niemożliwa.

Więc,

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Zatem,

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Sprawdzamy symetryczność d, czyli $d(x,y) = d(y,x)$ dla dowolnych $x,y \in X$. Skoro

$$d(x,y) := \min(|x-y|, 2-|x|-|y|) = \min(|y-x|, 2-|y|-|x|) = d(y,x).$$

Zatem, d jest symetryczna.

Teraz, sprawdzamy nierówność trojkątową.

$$d(x,y) + d(y,z) = \min(|x-y|, 2-|x|-|y|) + \min(|y-z|, 2-|y|-|z|).$$

Wartość tego wzoru zależy od wartości $|x-y|, 2-|x|-|y|, |y-z|, 2-|y|-|z|$. Mamy kilka możliwości

a) Załóżmy, że $\min(|x-y|, 2-|x|-|y|) = |x-y|$ i $\min(|y-z|, 2-|y|-|z|) = |y-z|$. Skoro $|x-y| + |y-z| \geq |x-z|$ to

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= \min(|x-y|, 2-|x|-|y|) + \min(|y-z|, 2-|z|-|y|) = \\ &= |x-y| + |y-z| \geq |x-z| \geq \min(|x-z|, 2-|x|-|z|) = d(x,z). \end{aligned}$$

b) Załóżmy, że $\min(|x-y|, 2-|x|-|y|) = 2-|x|-|y|$ i $\min(|y-z|, 2-|y|-|z|) = |y-z|$. Wiemy, że $|z-y| \geq |y|-|z|$. Zatem,

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= 2-|x|-|y| + |y-z| \\ &\geq 2-|x|-|z| \geq \min(|x-z|, 2-|x|-|z|) = d(x,z). \end{aligned}$$

c) Załóżmy, że $\min(|y-z|, 2-|z|-|y|) = 2-|z|-|y|$ i $\min(|x-y|, 2-|y|-|x|) = |x-y|$. Wiemy, że $|x-y| \geq |y|-|x|$. Zatem,

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= 2-|y|-|z| + |x-y| \\ &\geq 2-|x|-|z| \geq \min(|x-z|, 2-|x|-|z|) = d(x,z). \end{aligned}$$

d) Załóżmy, że $\min(|x-y|, 2-|x|-|y|) = 2-|x|-|y|$ i $\min(|y-z|, 2-|y|-|z|) = 2-|z|-|y|$.
Wiemy, że $2-2|y| > 0$. Zatem,

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= 2-|x|-|y| + 2-|y|-|z| \\ &\geq 2-|x|-|z| \geq \min(|x-z|, 2-|x|-|z|) = d(x,z). \end{aligned}$$

W każdym możliwym sposób, mamy, że nierówno sć trójkątową spełnia się. $\square$