ANALIZA I
18 i 21 listopada 2014
Semestr zimowy
Lista X

Ciągłość jednostajna i różniczkowalność

Javier de Lucas

Zadanie 1. Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $[1, +\infty[$.

Rozwiązanie: Funkcja $f : x \in [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła kiedy

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Aby udowodnić, że funkcja jest jednostajnie ciągła, ograniczymy $|f(x_1) - f(x_2)|$ za pomocą jakiejś funkcji $F(|x_1 - x_2|)$. Na przykład, dla naszej funkcji mamy, że

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right|.$$

Skoro $x_1, x_2 \geq 1$ to

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| \leq |x_2 - x_1|.$$

Ostatnie wyrażenie tylko zależy od $|x_2 - x_2|$. Teraz, jeżeli $\delta < \epsilon$ i korzystając z poprzednich wyrażeń, to

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| < |x_2 - x_1| < \delta < \epsilon.$$

Z tego wynika, że funkcja f jest jednostajnie ciągła. $\square$

Zadanie 2. Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, 2[$.

Zadanie 3. Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.

Zadanie 4. Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.

Zadanie 5. Zbadać różniczkowalność funckcji:

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ x^n, & x \leq 0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Zadanie 6. Zbadać, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = |x|$ w punkcie $x = 0$.

Zadanie 7. Zbadać, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x$ w punkcie $x = 0$.

ANALIZA I
18 i 21 listopada 2014
Semestr zimowy
Lista X

Zadanie 8. Dane są funkcje:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x > 0 \\ 2, x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}.$$

Oblicz $f'(0^+)$.

Zadanie 9. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R}$. Zbadaj dla jakich $x \in \mathbb{R}$ istnieje pochodna $f(x)$.

Zadanie 10. Dla jakiego a funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & \text{dla } x > -1 \text{ i } x \neq 0, \\ a, & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.
jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$?