ANALIZA II
21 lutego 2014
Semestr letni

Podstawienie Eulera

Ćwiczenie 1. Podstawienie Eulera służą do znajdowania funkcji pierwotnych do funkcji postaci $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, gdzie R jest wymierną funkcją dwóch zmiennych. Chodzi o to, żeby funkcję zawierającą pierwiastek sprowadzić do funkcji wymiernej. Jeśli oznaczymy $y := \sqrt{ax^2+bx+c}$ sprowadza się to do sparametryzowania fragmentu krzywej

$$x \mapsto (x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \in \mathbb{R}^2$$

dla $y > 0$ parametrem t w taki sposób, aby $x(t)$ i $y(t)$ były wymierne.

1. Pierwsze podstawienie Eulera działa gdy $a > 0$, podstawiamy $y = \sqrt{a}x + t$. Wyznaczamy $x(t)$, $y(t)$ i $dx = x'(t)dt$;

2. Drugie podstawienie Eulera działa gdy $c > 0$, podstawiamy $y = tx + \sqrt{c}$;

3. Trzecie podstawienie Eulera działa gdy łatwo jest wybrać punkt (x_0, y_0) na krzywej, tzn $y_0 = \sqrt{ax_0^2+bx_0+c}$, podstawiamy $y - y_0 = t(x - x_0)$. Prowadząc rachunki warto zapisać y^2 w potęgach $x - x_0$ zamiast x.

Zadanie polega na obliczeniu trzema sposobami całki nieoznaczonej

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} \quad \text{oraz jej wersji oznaczonej} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Wykresy funkcji $(x+\sqrt{x^2-x+1})^{-1}$ na przydziałach $[-3, 3]$ i $[0, 1]$