## Sumy szeregów

**Ćwiczenie 1.** Zamieniając na szereg potęgowy obliczyć sumy szregów

$(a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; $(b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}$; $(c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{-n}}{n(n+1)}$;

$(d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$; $(e)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}}{2n+1}$; $(f)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^{-n}}{2n+1}$;

$(g)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)}{n(n+1)2^n}$; $(h)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2-5n-1}{2^n}$; $(i)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{15n^2-4n+1}{2^n}$;

$(j)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$; $(k)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}$; $(l)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(3n+2)}$;

$(m)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(3n+2)}$.

*Rozwiązanie*:

$(a)$ $\frac{1}{2}$, $(b)$ $1-\log 2$, $(c)$ $1-3\log\frac{3}{2}$,

$(d)$ $2(1-\log 2)$, $(e)$ $\sqrt{2}\operatorname{arc\,sh}1$, $(f)$ $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$,

$(g)$ $1$, $(h)$ $0$, $(i)$ $84$,

$(j)$ $\frac{2}{3}\log 2$, $(k)$ $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$, $(l)$ $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+2\log 2-\frac{3}{2}\log 3$,

$(m)$ $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi+\log 2$.

Bardziej szczegółowo, obliczmy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}.$$

Aby to zrobić, zdefiniujemy

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Widać, że

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)}.$$

Mamy, że

$$g(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Zdefiniujemy

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \Rightarrow h''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Całkując,

$$h'(x) = h'(0) + \int_0^x \frac{1}{1-x} = -\log(1-x)'$$

i

$$h(x) = h(0) + \int_0^x [-\log(1-x)]dx = x + (1-x)\log(1-x).$$

Z tego wynika, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2h\,(1/2) = 1 + \log(1/2) = 1 - \log 2.$$

Jednoczesnie, widać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{-n}}{n(n+1)} = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -2h(-1/2) = -2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\log\frac{3}{2}\right) = 1 - 3\log\frac{3}{2}.$$

Obliczmy teraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{2n+1}.$$

Aby to zrobić, obliczmy

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

Widać, że

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{2n+1}.$$

Mamy, że

$$g(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \to g(x) = \frac{1}{x} h(x), \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Mamy, że

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow h(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Więc,

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(3+2\sqrt{2}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \log(1+\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}\operatorname{arc\,sh}(1).$$

Proszę pamiętać, że

$$\operatorname{arc\,sh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1}).$$

□