ANALIZA II
10 marca 2014
Semestr letni

Sumy szeregów

Ćwiczenie 1. Zamieniając na szereg potęgowy obliczyć sumy szregów

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)}$; $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{-n}}{n(n+1)}$;

$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$; $(e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{2n+1}$; $(f)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{-n}}{2n+1}$;

$(g)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{n(n+1)2^n}$; $(h)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2-5n-1}{2^n}$; $(i)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{15n^2-4n+1}{2^n}$;

$(j)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$; $(k)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}$; $(l)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(3n+2)}$;

$(m)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(3n+2)}$.

Ćwiczenie 2. Wiadomo, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Dokonując stosownych podstawień i rozwijając funkcję podcałkową w szereg wykazać, że

(a) $\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathsf{d}x}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}$, (b) $\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathsf{d}x}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}$, (c) $\int_0^{\infty} \log(1-e^{-x})\,\mathsf{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.