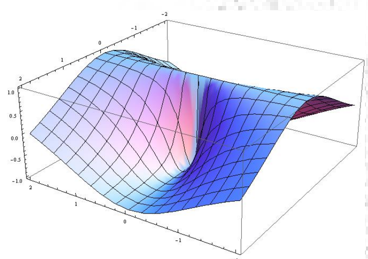
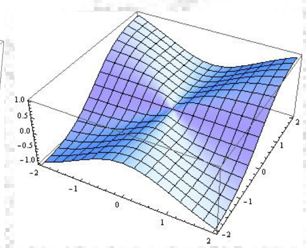
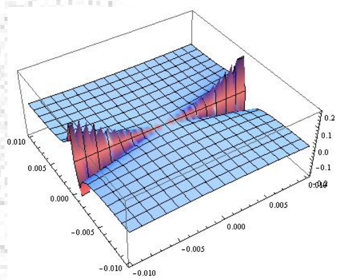
ANALIZA II
15 marca 2014
Semestr letni

Ciągłość i norma

Ćwiczenie 1. Czy daną funkcję da się dookreślić w punkcie $(0,0)$ tak, żeby otrzymana funkcja była ciągła?

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad f_3(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Rozwiązanie: Musimy zdefiniować funkcję f_1 w postaci

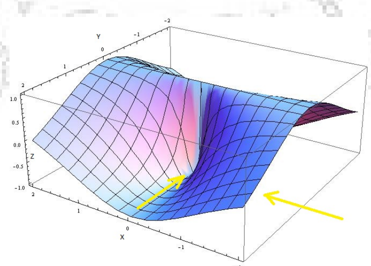
$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y), \\ k, & (0,0). \end{cases}$$

w taki sposób, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(0,0) = k$$

dla pewnej liczby k.

Krótko mówiąc, poprzednia definicja mówi nam, że wartość funkcji f_1 zdąża do k wzdłuż każdej możliwej drogi do zera. Natomiast, widać na pierwszym rysunku, że jeżeli dążymy do zera wzdłuż linii $x = 0$, wartość funkcji zdąża do -1 i jeżeli dążymy do zera wzdłuż linii $y = 0$, to wartość funkcji zdąża do 1:



Więc, ta funkcja nie wygląda na ciągłą, ale trzeba to udowodnić. Ponadto, nie zawsze mamy wykres funkcji. Więc, musimy podać metodę aby ustalić czy funkcja może być ciągła.

Kiedy myślimy, że funkcja nie będzie ciągła lub nie wiemy wcale co może się zdarzyć, najłatwiej będzie sprawdzić kilka warunków koniecznych dla ciągłości funkcji.

Najpierw, sprawdzamy granice iterowane. Jeżeli funkcja jest ciągła w punkcie $(0,0)$, to istnieją granice

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f_1(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f_1(x,y) = f_1(0,0).$$

Jeżeli granice funkcji f_1 nie istnieją lub nie są sobie równe, to funkcja nie może być ciągła. Geometrycznie, granica iterowana

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f_1(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

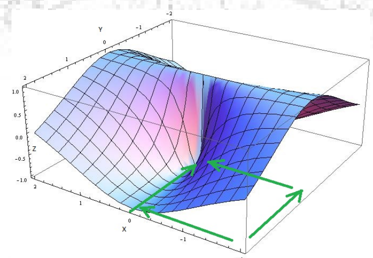
wskazuje do której wartości f_1 dąży gdy najpierw y dąży do zera i potem x dąży do zera.

Geometrycznie, granica iterowana

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f_1(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1$$

wskazuje do której wartości f_1 dąży gdy najpierw x dąży do zera i potem y dąży do zera.

Na wykresie widać, że granice iterowane nie są sobie równe, ponieważ wartość funkcji f_1 dąży do innych wartości kiedy dążymy do zera wzdłuż poprzednich dróg. Zatem, nie możemy zdefiniować f_1 w taki sposób, że funkcja f_1 będzie ciągła.



Sprawdzamy teraz trzecią funkcję. Znowu, musimy ustalić czy możemy ustalić k w taki sposób, że

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y), \\ k, & (0,0). \end{cases}$$

Znowu, korzystamy z granic iterowanych:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f_3(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

i

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f_3(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Granice iterowane istnieją i są sobie równe. Widać, że jeżeli funkcja f_3 ma być ciągła, to ma być $f_3(0,0)=0$. Natomiast, to nie zagwarantuje, że f_3 jest ciągła. Aby to zagwarantować, musimy sprawdzić kolejny warunek konieczny: granice wzdłuż linii. Jeżeli funkcja f_3 jest ciągła w $(0,0)$, to

$$\lim_{y=\lambda x, x\to 0} f_3(x,y) = f_3(0,0) = 0, \qquad \lim_{x=\lambda y, y\to 0} f_3(x,y) = f_3(0,0) = 0, \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

Widać, że

$$\lim_{y=\lambda x, x\to 0} f_3(x,y) = \lim_{y=\lambda x, x\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{y=\lambda x, x\to 0} \frac{\lambda x^3}{(x^2+\lambda^2)x^2} = \lim_{y=\lambda x, x\to 0} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)}x = 0.$$

i

$$\lim_{x=\lambda y, y\to 0} f_3(x,y) = \lim_{x=\lambda y, y\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x=\lambda y, y\to 0} \frac{\lambda y^3}{(1+\lambda^4y^2)y^2} = \lim_{x=\lambda y, y\to 0} \frac{\lambda}{(1+\lambda^4y^2)}y = 0.$$

To jeszcze nie oznacza, że granica istnieje. Te warunki nie mogą udowodnić, że funkcja jest ciągła. Z teoretycznego punktu widzenia, to są warunki konieczne, aby funkcja f_3 była ciągła. Z praktycznego punktu widzenia, korzystamy z nich, aby udowodnić, że jakiś warunek nie spełnia się i funkcja nie jest ciągła. Mówiąc inaczej, to są warunki aby udowodnić, że funkcja nie jest ciągła.

Kolejnym warunkiem do sprawdzenia, jest sprawdzenie, czy wartość funkcji f_3 dąży do zera wzdłuż parabol, czyli

$$\lim_{y=\lambda x^2, x\to 0} f_3(x,y) = 0, \qquad \lim_{x=\lambda y^2, y\to 0} f_3(x,y) = 0.$$

Widać, że to nie spełnia się

$$\lim_{y=\lambda x^2, x\to 0} f_3(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^4}{x^4+\lambda^2x^4} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Więc, funkcja f_3 nie jest ciągła ponieważ granica zależy od λ.

Szczerze mówiąc, widać od samego początku, że tak miało być. Funkcja f_3 poza zerem jest taka, że jeżeli $y = \lambda x^2$ to licznik i mianownik są wielomianami gdzie każdy wyraz jest czwartego stopnia (mówi się że wielomiany są jednorodne). W takim przypadku, rzadko się zdarza, że funkcja jest ciągła.

Zbadamy teraz funkcję $f_2(x, y)$. Najpierw, sprawdzamy granice iterowane, wzdłuż linii i paraboli.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f_2(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f_2(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Z drugiej strony

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f_2(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f_2(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Widać, że w każdym przypadku, granice istnieją i są takie same. W takim przypadku, chyba czas aby ustalić, czy funkcja jest ciągła. Musimy udowodnić, że

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, ||(x,y) - (0,0)|| < \delta \Rightarrow |f_2(x,y) - f_2(0,0)| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Warto przypominać, że to często jest skomplikowane. Lepiej zajmować sią tym, tylko gdy myślimy, że funkcja ma być ciągła, np. po sprawdzeniu granic iterowanych, itd. Aby udowodnić, że (2.1) spełnia się, musimy szukać takiej δ, że

$$|f_2(x,y) - f_2(0,0)| < \epsilon$$

dla danego $\epsilon > 0$. Trzeba zauważyć, ż e ogólnie δ zależy od ϵ. Teraz mamy zagwarantować, że

$$|f_2(x,y)| < \epsilon,$$

ponieważ $f_2(0,0) = 0$. Aby to zrobić, postępujemy zawsze tak samo. Ograniczamy $|f_2(x,y)|$ za pomocą funkcji, która zależy tylko od $\sqrt{x^2+y^2}$. Zobaczmy jak.

$$|f_2(x,y)| = \frac{|x2y|}{x^2+y^2}.$$

Widać, że $|xy| \leq (x^2+y^2)/2$, faktycznie

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq |2xy|$$

ponieważ $x^2+y^2 \leq 0$. Korzystając z tego mamy, że

$$|f_2(x,y)| = \frac{2|xy^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}|y| \leq 2|y|.$$

Teraz, trzeba pamiętać, że

$$|y|,|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Więc,

$$|f_2(x,y)| = \frac{2|xy^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}|y| \leq 2|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Ograniczyliśmy f_2 za pomocą funkcji $2\sqrt{x^2+y^2}$ która tylko zależy od $\sqrt{x^2+y^2}$. Korzystając z tego, widać, że jeżeli $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ to

$$|f_2(x,y)| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta.$$

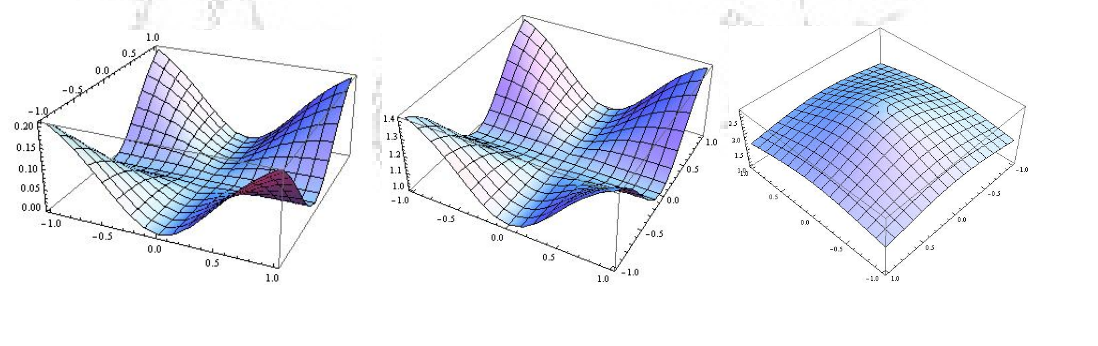
Skoro δ musimy ustalić dla pewnej $\epsilon > 0$, to możemy ustalić, że $\delta < \epsilon/2$ i wtedy

$$|f_2(x,y)| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta < \epsilon.$$

□

Ćwiczenie 2. Sprawdzić istnienie i ewentualnie obliczyć granice

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$



Rozwiązanie: Mamy, że

$$\frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2} = \frac{(1+x^2y^2)-1}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2y^2}+1)} = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2y^2}+1)}.$$

Zatem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2y^2}+1)}.$$

Jak w poprzednim zadaniu, musimy sprawdzić, czy

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < ||(x,y)-(0,0)|| < \delta \Rightarrow |f_2(x,y)-k| < \epsilon. \tag{2.1}$$

dla pewnej liczby k. Proszę zauważyć, że powyższa definicja jest niezależna od wartości w punkcie $(0,0)$ ponieważ tylko musimy zbadać gdy

$$0 < ||(x,y)-(0,0)|| < \delta.$$

Aby sprawdzić ciągłość w poprzednim zadaniu, mieliśmy

$$||(x,y)-(0,0)|| < \delta.$$

Jakkolwiek, sprawdzamy (2.1) jak wcześniej. Aby ustalić k możemy sprawdzić granice iterowane. Są łatwe do obliczenia i jeżeli granica istnieje, ich wartość ma być wartością granicy funkcji. W naszym przypadku mamy

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x^2} = 0.$$

Trzeba ograniczyć

$$\left| \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2y^2}+1)} \right|.$$

Jak wcześniej, $|xy| \leq (x^2+y^2)/2$. Zatem

$$\left| \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2y^2}+1)} \right| \leq \left| \frac{(x^2+y^2)^2}{4(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2y^2}+1)} \right| = \left| \frac{(x^2+y^2)}{4(\sqrt{1+x^2y^2}+1)} \right|.$$

Widać, że $\sqrt{1+x^2y^2}+1 \geq 2$, zatem

$$\left|\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2y^2}+1)}\right| \le \frac{(x^2+y^2)}{8}.$$

Jeżeli $||(x,y)|| < \delta$, to

$$\left|\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2y^2}+1)}\right| \le \frac{(x^2+y^2)}{8} < \frac{\delta}{8}.$$

Jeżeli ustalamy $\delta < 8\epsilon$, więc,

$$\left|\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2y^2}+1)}\right| \le \frac{(x^2+y^2)}{8} < \epsilon.$$

Poprzednia metoda jest często bardzo wolna. Jeżeli to możliwe, lepiej korzystać z innych metod. Na przykład, za pomocą twierdzenia trzech ciągów. Skoro $|xy| \le (x^2+y^2)/2$ i $(1+x^2y^2) \ge 1$ mamy, że

$$1 \le (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \le (1+(x^2+y^2)^2/4)^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

Z twierdzenia trzech ciągów

$$1 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+(x^2+y^2)^2/4)^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

Widać, że funkcja

$$(1+(x^2+y^2)^2/4)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

zależy tylko od $h = x^2+y^2$. Więc, można obliczyć

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+(x^2+y^2)^2/4)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{h\to 0}(1+h^2/4)^{1/h}.$$

To zwykła granica jednej zminnej typu liczby e:

$$\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h^2}{4}\right)^{1/h} = \lim_{h\to 0}\left[\left(1+\frac{h^2}{4}\right)^{\frac{4}{h^2}}\right]^{\frac{h^2}{4}\frac{1}{h}} = e^{\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{4h}} = 1.$$

Z tego wynika, że

$$1 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+(x^2+y^2)^2/4)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = 1.$$

i

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = 1.$$

W ostatnim przypadku, widać, że granica

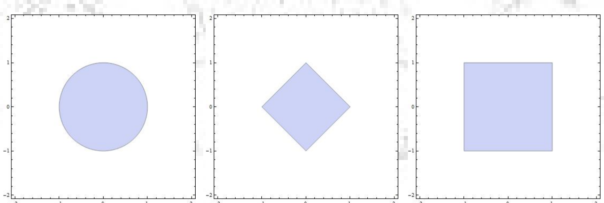
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}.}$$

To granica jednej zmiennej:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}.} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

□

Ćwiczenie 3. Niech $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy $[t^i_j]$ w bazach kanonicznych. Wyznaczyć $\|T\|$ jeśli (a) w $\mathbb{R}^n$ $\|x\| = |x^1| + \cdots + |x^n|$ zaś w $\mathbb{R}^m$ $\|x\| = \max_{i=1\ldots m} |x^i|$, (b) w obu przestrzeniach $\|x\| = \max_i |x^i|$.



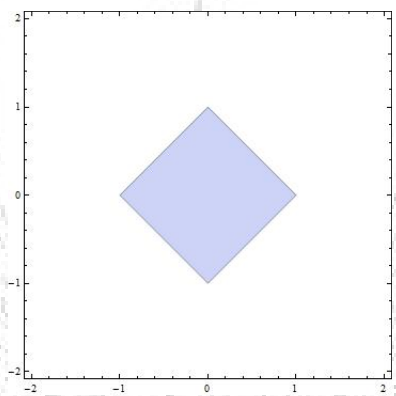
Rozwiązanie: Jèzeli $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_n)$ i $(\mathbb{R}^m, ||\cdot||_m)$ są przestrzeniami unormowymi, norma operatora liniowego $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ się zdefiniuje jako

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_n=1} \|Tx\|_m.$$

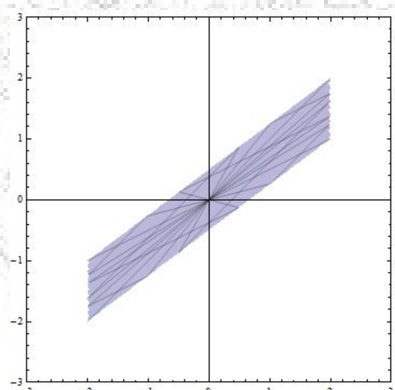
Aby tłumaczyć geometryczne znaczenie tej definicji, podamy następujący przykład. Niech $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bedzie operatorem liniowym w bazach kanoniczych postaci

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Wektory jednostkowe w $\mathbb{R}^2$ ze względu na $\|(x,y)\| = |x| + |y|$ są na brzegu następującego obszaru

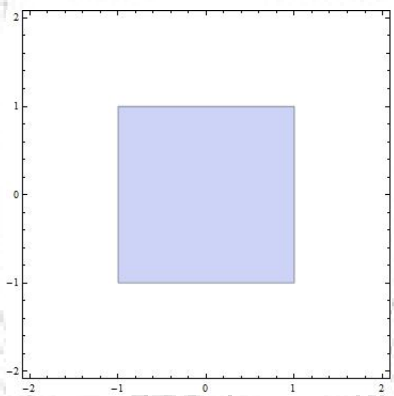


Obrazy tych wektorów są na brzegu obszaru

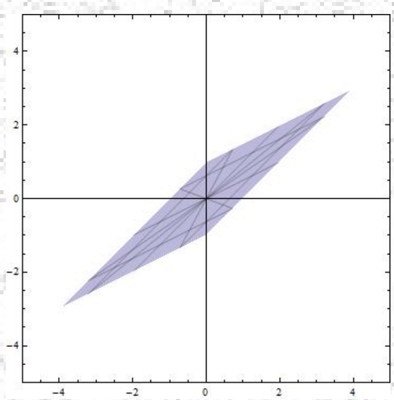


W tej przestrzeni zdefiniujemy normę $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$, czyli norma wektora (x,y) to największa wartość wszględna wsród współórzędnych wektora (x,y). Widać, że dla naszego operatora, największa norma wektora Tx, dla $\|x\|_2 = 1$, to 2. Więc, $\|T\| = 2$.

Możemy obliczyc normę T z inną normą w jego dziedzinej $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$ w $\mathbb{R}^2$. W tym przypadku, wektory które mają normę 1 w $\mathbb{R}^2$ ze względu na $\|(x,y)\| = |x| + |y|$ są na brzegu następującego obszaru



Obrazy tych wektorów są na brzegu obszaru



Widać, że największa norma tych wektorów to 4. Zatem, $\|T\| = 4$.

Teraz obliczymy normę ogólnego operatora $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Zaczynamy zbadając operator T dla $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_n = \sum_{i=1}^n |x_i|$ i $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_m = \max_{i=1,\ldots,m} |x_i|$. Aby ustalić $\|T\|$ najpierw udowodnimy, że $\|T\|$ można ograniczyć przez pewną stałą k i pożniej, że $\|Tx\|_m = k$ dla pewnego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ z $\|x\|_n = 1$. W tym sposob, otrzymamy, że $\|T\| = k$.

Korzystając z nierówności trójkątowej mamy, że

$$\|Tx\|_m = \left\| \sum_{j=1}^n t^i{}_j x^j \right\|_m = \max_{i=1,\ldots,m} \left| \sum_{j=1}^n t^i{}_j x^j \right| \leq \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^n |t^i{}_j x^j|.$$

Mamy, że

$$|t^i{}_j| \leq \max_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} |t^i{}_j|.$$

Z tego wynika, że dla $\|x\|_n = 1$ to

$$\|Tx\|_m \leq \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} |t^i{}_j| \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |x^j| = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} |t^i{}_j| \sum_{j=1}^{n} \|x^j\| = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} |t^i{}_j| \|x\|_n = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} |t^i{}_j|.$$

Ponadto, jeżeli i_0 i j_0 są takie, że

$$|t^{i_0}{}_{j_0}| = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} |t^i_j|,$$

to możemy zdefiniować wektor postaci

$$x_0 = [0, \dots, \overset{j_0}{1}, \dots, 0]^T.$$

Wtedy $\|x_0\| = 1$ i

$$\|Tx_0\|_m = \max_{i=1,\dots,n} \left| \sum_{j=1}^{n} t^i{}_j x_0^j \right| = \max_{i=1,\dots,n} |t^i{}_{j_0}| = |t^{i_0}{}_{j_0}|.$$

Skoro $\|Tx\|_m \leq \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} |t^i{}_j|$ dla każdego x spełniającego, że $\|x\|_n = 1$ i $\|Tx_0\|_m = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} |t^i{}_j|$ to

$$\|T\| = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} |t^i{}_j|.$$

Widać w naszym pierwszym przykładzie, że norma macierzy (3.1) to 2, czyli największa wartość współczynników T w naszej bazie.

Obliczmy teraz $\|T\|$ kiedy mamy taką samą normę $\|x\| = \max_i |x^i|$ w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. Jak wcześniej, aby ustalić wartość $\|T\|$ najpierw udowodnimy, że $\|T\|$ jest ograniczona przez pewną stałą k i pożniej, że $\|Tx\|_m = k$ dla pewnego wektora $x \in \mathbb{R}^n$. W tym sposób, otrzymamy, że $\|T\| = k$.

Mamy, że

$$\|Tx\|_m = \left\| \sum_{j=1}^{n} t^i{}_j x^j \right\|_m = \max_{i=1,\dots,m} \left| \sum_{j=1}^{n} t^i{}_j x^j \right| \leq \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |t^i{}_j x^j|$$

Mamy, że

$$|x^i| \leq \max_{i=1,\dots,n} |x^i|.$$

Z tego wynika, że dla $\|x\|_n = 1$ to

$$\|Tx\|_m \leq \max_{i=1,\dots,n} |x^i| \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1,\dots,n} |t^i{}_j| = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1,\dots,n} |t^i{}_j|.$$

Ponadto, jeżeli i_0 jest taki, że

$$\sum_{j=1,\dots,n} |t^{i_0}{}_j| = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1,\dots,n} |t^i{}_j| \Rightarrow \|T\| \leq \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1,\dots,n} |t^i{}_j| = \sum_{j=1,\dots,n} |t^{i_0}{}_j|.$$

Teraz możemy zdefiniować wektor postaci

$$x_0 = [\mathrm{sign}[t^{i_0}{}_1], \mathrm{sign}[t^{i_0}{}_2], \dots, \dots, \mathrm{sign}[t^{i_0}{}_n]]^T.$$

Wtedy $\|x_0\|_n = 1$ i

$$\|Tx_0\|_m = \max_{i=1,\dots,m} |\sum_{j=1}^n t^i{}_j x_0^j| \geq |\sum_{j=1}^n t^{i_0}{}_j x_0^j| = \sum_{j=1}^n |t^{i_0}{}_j| \Rightarrow \|Tx_0\|_m = \sum_{j=1}^n |t^{i_0}{}_j|.$$

Ponieważ

$$\|Tx\|_m \leq \sum_{j=1}^n |t^{i_0}{}_j|, \qquad i \qquad \|Tx_0\|_m = \sum_{j=1}^n |t^{i_0}{}_j|.$$

to

$$\|T\| = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1,\dots,n} |t^i{}_j|.$$

Dla macierzy (3.1) zauważaliśmy, że $\|T\| = 4$, to własnie $\max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1,\dots,n} |t^i{}_j|$. $\square$