

Różniczkowalność i pochodne

Ćwiczenie 1. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

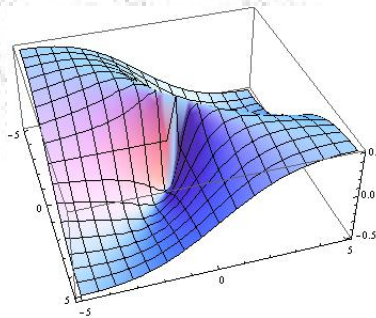
Ćwiczenie 2. Niech $z = f(x^2 - y^2)$. Udowodnić, że spełniona jest zależność :

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

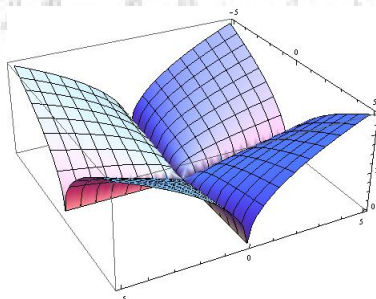
Ćwiczenie 3. Sprawdzić, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ma w punkcie $(0, 0)$ obie pochodne cząstkowe, lecz nie jest w tym punkcie ciągła oraz nie istnieje pochodna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

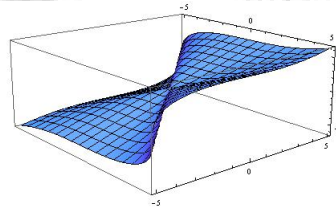
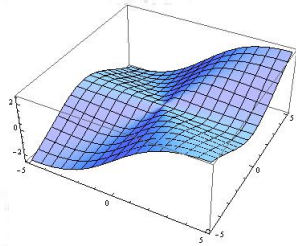


Ćwiczenie 4. Sprawdzić, że funkcja $(x, y) \mapsto \sqrt{|xy|}$ ma w punkcie $(0, 0)$ obie pochodne cząstkowe, lecz nie jest w tym punkcie różniczkowalna.



Ćwiczenie 5. Zbadać różniczkowalność funkcji

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad f_2(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$



Ćwiczenie 6. Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{dla } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{dla } (x, y) = 0. \end{cases}$$

