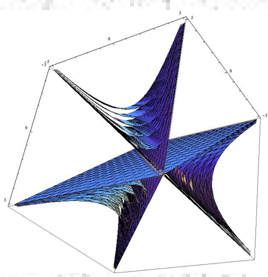
ANALIZA II
21 i 24 marca 2014
Semestr letni

Różniczkowalność, pochodne, ekstremum funkcji

Ćwiczenie 1. Policzyć pochodną kierunkową funkcji:

$$\varphi(x_1,\ldots,x_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

w dowolnym punkcie $p = [x_1, x_2, \ldots, x_k]^T$ w kierunku wektora $h = [1, 1, \ldots, 1]^T$.



Rozwiązanie: Z definicji pochodnej kierunkowej mamy, że pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie $u \in \mathbb{R}^k$ w kierunki $v \in \mathbb{R}^k$

$$(\nabla_v f)(u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t}.$$

W naszym przypadku, wiemy z algebry, że

$$\varphi(x_1,\ldots,x_k) = \prod_{i>j=1}^{n} (x_i - x_j).$$

Jeżeli $u = [x_1, \ldots, x_k]^T$ i $v = [1, 1, \ldots, 1, 1]^T$, to

$$(\nabla_v \varphi)(u) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x_1+t, \ldots, x_k+t) - \varphi(u)}{t}.$$

Natomiast,

$$\varphi(x_1+t, \ldots, x_k+t) = \prod_{i>j=1}^{n} (x_i + t - x_j - t) = \varphi(x_1, \ldots, x_k).$$

Więc,

$$\nabla_h \varphi(p) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x_1+t,\dots,x_k+t)-\varphi(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

$\square$

Ćwiczenie 2. W przestrzeni $V := C([0,1],\mathbb{R})$ określmy normę wzorem $||v|| := \sup_{t\in[0,1]} |v(t)|$. Znaleźć wzór na pochodną $\nabla_h F(v)$ i zbadać róniczkowalność odwzorowania $F : V \to V$ zdefiniowanego wzorem: $(F(v))(t) := \int_0^t v^2 := \int_0^t (v(s))^2\, ds$

Rozwiązanie: Z definicji pochonej kierunkowej

$$\nabla_h F(v) = \lim_{w\to 0} \frac{F(v+wh)-F(v)}{w}, \qquad w\in\mathbb{R},\ v,h\in V.$$

Aby to obliczyć, musimy ustalić $F(v+wh)\in V$. Z definicji F mamy, że

$$[F(v+wh)](t) = \int_0^t (v+wh)^2(s)ds = \int_0^t [v^2(s)+w^2h^2(s)+2wv(s)h(s)]ds =$$
$$[F(v)](t)+w^2[F(h)](t)+2w\int_0^t v(s)h(s)ds.$$

Zatem

$$\nabla_h F(v) = \lim_{w\to 0} \frac{w^2F(h)+2w\int_0^t v(s)h(s)ds}{w} = \lim_{w\to 0}\left[wF(h)+2\int_0^t v(s)h(s)ds\right]$$

i

$$\nabla_h F(v) = 2\int_0^t v(s)h(s)ds.$$

Widac, że $\nabla F(v) : h\in V \mapsto \nabla_h F(v)\in V$ jest odwzorowaniem liniowym. Ponadto, jest ciągłe. Przypominamy, że odwzorowanie liniowe $T : V\to V$ jest ciągłe gdy $\|T\| < \infty$. Gdy $\dim V < 0$ to zawsze zdarza sią. Natomiast, gdy $\dim V = +\infty$, nie zawsze $\|T\| = +\infty$. W naszym przypadku i skoro $0\le t\le 1$, to

$$\|\nabla F(v)\| = \sup_{\|v\|=1} 2\left|\left|\int_0^t v(s)h(s)ds\right|\right| \le \sup_{\|v\|=1} 2\left|\left|\int_0^t v(s)\|h\|ds\right|\right|$$
$$\le \sup_{\|v\|=1} 2\|h\|\|v\|t \le \sup_{\|v\|=1} 2\|h\|\|v\| = 2\|v\|.$$

Skoro $v \in V$ jest ciągła i osiągna w $[0,1]$ jej największą wartość. Więc, $\nabla F(v)$ jest ciągła. Więc, to może być L. W takim przypadku i pisąc $\bar{v} \equiv v + h$ mamy, że

$$\lim_{\bar{v}\to v} \frac{\|F(\bar{v}) - F(v) - \nabla_{\bar{v}-v}F(v)\|}{\|\bar{v}-v\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|F(v+h) - F(v) - \nabla_h F(v)\|}{\|h\|}.$$

Zatem

$$\lim_{\bar{v}\to v} \frac{\|F(\bar{v}) - F(v) - \nabla_{\bar{v}-v}F(v)\|}{\|\bar{v}-v\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|F(h)\|}{\|h\|}.$$

Ponadto,

$$F(h) = \int_0^t v^2(s)ds \leq \int_0^t \|v\|^2 ds = \|v\|^2 t \leq \|v\|^2.$$

Korzystając z tego

$$0 \leq \lim_{\bar{v}\to v} \frac{\|F(\bar{v}) - F(v) - \nabla_{\bar{v}-v}F(v)\|}{\|\bar{v}-v\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|F(h)\|}{\|h\|} \leq \lim_{h\to 0} \|h\| = 0.$$

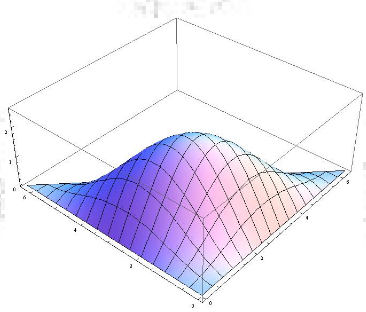
Wówczas, funkcja F jest różniczkowalna. $\square$

Ćwiczenie 3. Korzystając z definicji róniczkowalnoci odwzorowania zbadać roniczkowalnoć i ewentualnie obliczyć pochodną odwzorowa:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto (x^2, 1+x+x^2) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto \int_a^{x+y} g(t)\mathsf{d}t \in \mathbb{R}.$$

W drugim przykładzie g jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$.

Ćwiczenie 4. Znaleźć największą wartość funkcji $u(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ w trójącie ograniczonym osią x, osią y i prostą $x + y = 2\pi$.



Rozwiązanie: Aby obliczyć największą i najmiejszą wartość funkcji f, musimy zbadać funkcją na brzegu i wewnątrz obszaru

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi\}.$$

Wewnątrz musimy znaleźć punkty krytyczne, tj. punkty gdzie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Więc, w naszym przypadku mamy, że punkty krytyczne spełniają warunki

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x + y),$$

i

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x + y).$$

Widać, że

$$\cos(x) = \cos(y).$$

Więc, $x = y$ lub $x = 2\pi - y$. Skoro mamy wewnątrz, że $2\pi > x > 0, 2\pi \geq y \geq 0$ i $x + y < 2\pi$, to druga opcja jest niemożliwa i $x = y$. Dodatkowo,

$$\cos x = \cos(2x) \leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x \leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0.$$

Zdefiniując $z = \cos x$, to $2z^2 - 1 - z = 0$ i $z \in \{1, -1/2\}$. Z tego wynika, że

$$x \in \{\pi, 2\pi/3, 4\pi/3\}.$$

Skoro $y + x < 2\pi$ i $y = x$, to ostania i pierwsza wartość są niemożliwe i

$$x = 2\pi/3.$$

Więc, punkt krytyczne to

$$(2\pi/3, 2\pi/3).$$

imum, minimum lub cos innego. Aby to zrobić, musimy zbadać macierz Hessego

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x + \sin(x+y) & +\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & -\sin y + \sin(x+y) \end{bmatrix}$$

w punktach krytycznych, czyli

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{bmatrix}_{\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)} = \begin{bmatrix} -\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} & \sin\frac{4\pi}{3} \\ \sin\frac{4\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & -2\sin\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{bmatrix}_{\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Dana macierz Hessego w punkcie p postaci

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

mamy, że punkt p jest:

$$A > 0 \ i \ AC - B^2 > 0 \text{ minimum,} \qquad A < 0 \ i \ AC - B^2 > 0 \text{ maksimum,}$$

$$AC - B^2 < 0 \text{ punkt siodła.}$$

Więc, w naszym przypadku

$$A = -\sqrt{3}/2 < 0, \qquad AC - B^2 = 3 - \frac{3/4}{>}0$$

i mamy maksimum w punkcie

$$P = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \qquad f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zobaczymy na brzegu. Mamy trzy częsci

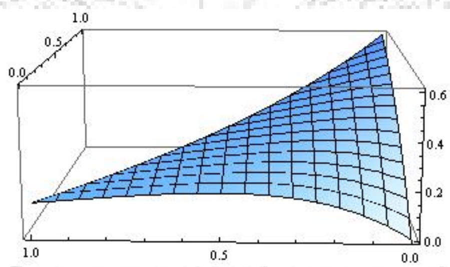
$$I_1 = \{(x,0) \mid 0 \le x \le 2\pi\}, \qquad I_2 = \{(0,y) \mid 0 \le y \le 2\pi\}, \qquad I_3 = \{(x, 2\pi - x) \mid 0 \le x \le 2\pi\}.$$

Na I_3, I_2 i na I_1 mamy, że f się zeruję.

Najmiejszych i największych wartości funkcji f trzeba szukać między ekstrema wewnątrz S i na brzegu S. Z tego wynika, że ektremum P jest maksimum globalne i na brzegu mamy minimum globalne 0.

□

Ćwiczenie 5. Znaleźć ekstremalne wartości funkcji $f(x,y) = (x+y)e^{-(\frac{x}{2}+2y)}$ na zbiorze $K := \{(x,y) : x, y \ge 0, \quad x + y \le 1\}$.



Rozwiązanie: Musimy zbadać funkcję na brzegu K, czyli ∂K i wewnątrz K, czyli $\mathring{K}$.

Wewnątrz musimy znaleźć punkty krytyczne, tj. punkty gdzie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Więc, punkty krytyczne spełniają warunki

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\frac{x}{2}-2y} - \frac{1}{2}(x+y)e^{-\frac{x}{2}-2y} = \frac{1}{2}(2-x-y)e^{-\frac{x}{2}-2y},$$

i

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-\frac{x}{2}-2y} - 2(x+y)e^{-\frac{x}{2}-2y} = (1-2(x+y))e^{-\frac{x}{2}-2y}.$$

Widać, że

$$2 = x + y, \qquad -\frac{1}{2} = x + y.$$

Więc, układ jest sprzeczny i nie ma ekstrema wewnątrz.

Zobaczymy na brzegu. Mamy trzy częsci

$$I_1 = \{(x,0) \mid 0 \le x \le 1\}, \qquad I_2 = \{(0,y) \mid 0 \le y \le 1\}, \qquad I_3 = \{(x, 1-x) \mid 0 \le x \le 1\}.$$

Na I_3 mamy, że $g_3(x) = f(x, 1-x) = e^{\frac{3x}{2}-2}$. To funkcja jednej zmiennej. Więc,

$$\frac{dg_3}{dx} = \frac{3}{2}e^{-3+\frac{3}{2}x} = 0.$$

Więc, ta funkcja nie ma ekstrema dla $0 \leq x \leq 1$.

Na I_2 mamy, że $g_2(y) = f(0, y) = ye^{-2y}$. To funkcja jednej zmiennej. Więc,

$$\frac{dg_2}{dy} = (1-2y)\,e^{-2y} = 0.$$

Więc, $y = 1/2$ i ta funkcja ma jedno ekstremum. Ponieważ $dg_2/dy > 0$ dla $y < 1/2$ i $dg_2/dy < 0$ dla $y > 1/2$, to jest maksimum.

Na I_1 mamy, że $g_1(x) = f(x, 0) = xe^{-\frac{x}{2}}$. To funkcja jednej zmiennej. Więc,

$$\frac{dg_1}{dx} = \left(1 - \frac{1}{2}x\right) e^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Więc, $x = 2$ i ta funkcja nie ma ekstrema, ponieważ $0 \leq x \leq 1$.

Aby ustalić największą i najmiejszą wartość funkcji f, trzeba sprawdzić punkty krytyczne w $\mathring{K}$ i funkcją na ∂K. Wewnatrz nie mamy puntów krytycznych. Ponadto, w ∂K tylko mamy jeden punkt krytyczne. Dodatkowo, trzeba sprawdzić co się dzieję w ∂I_1, ∂I_2 i ∂I_3, czyli

$$f(0,0) = 0, \qquad f(0,1) = e^{-2}, \qquad f(1,0) = \frac{1}{\sqrt{e}}, \qquad f(0, 1/2) = 1/(2e).$$

Widać, że

$$0 < \frac{1}{e^2} < 1\frac{1}{2e} < \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Więc, największa wartość, $1/\sqrt{e}$, znajduje się w $(1, 0)$, i najmiejsza, 0, w $(0, 0)$. □

Ćwiczenie 6. Znaleźć wszsytkie ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^4 + y^2 - 2x^2y^2 + 1.$$

Ćwiczenie 7. Dla danych $a, b, c > 0$ znaleźć $x, y, z > 0$ spełniające warunek: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, dla których prostopadłościan o wierzchołkach $(\pm x, \pm y, \pm z)$ [wpisany w elipsoidę o półosiach a, b, c] ma największą moliwą objętość.

Ćwiczenie 8. Wsród trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć taki, dla którego bryła obrotowa powstała przez obrót dookoła jednego z boków ma największą objetość.