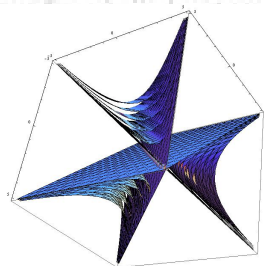


Różniczkowalność, pochodne, ekstremum funkcji

Ćwiczenie 1. Policzyc pochodną kierunkową funkcji:

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

w dowolnym punkcie $p = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ w kierunku wektora $h = [1, 1, \dots, 1]$.



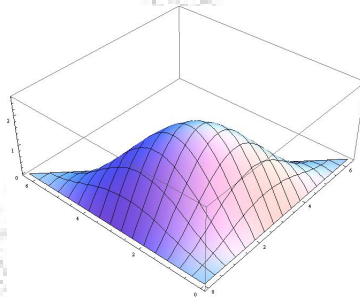
Ćwiczenie 2. W przestrzeni $V := C([0, 1], \mathbb{R})$ określmy normę wzorem $\|v\| := \sup_{t \in [0, 1]} |v(t)|$. Znaleć wzór na pochodną $\nabla_h F(v)$ i zbadać różniczkowalność odwzorowania $F : V \rightarrow V$ zdefiniowanego wzorem: $(F(v))(t) := \int_0^t v^2 := \int_0^t (v(s))^2 ds$

Ćwiczenie 3. Korzystając z definicji różniczkowalności odwzorowania zbadać różniczkowalność i ewentualnie obliczyć pochodną odwzorowa:

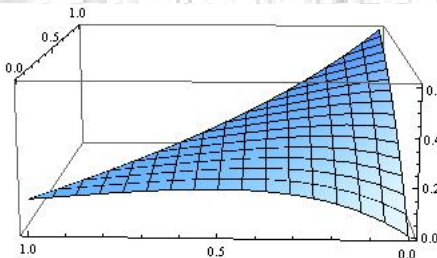
$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x^2, 1 + x + x^2) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \int_a^{x+y} g(t) dt \in \mathbb{R}.$$

W drugim przykładzie g jest funkcją ciągłą na \mathbb{R} .

Ćwiczenie 4. Znaleźć największą wartość funkcji $u(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ w trójkącie ograniczonym osią x , osią y i prostą $x + y = 2\pi$.



Ćwiczenie 5. Znaleźć ekstremalne wartości funkcji $f(x, y) = (x + y)e^{-\left(\frac{x}{2} + 2y\right)}$ na zbiorze $K := \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.



Ćwiczenie 6. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^4 + y^2 - 2x^2y^2 + 1.$$

Ćwiczenie 7. Zbadać punkty krytyczne funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z.$$

Ćwiczenie 8. Dla danych $a, b, c > 0$ znaleźć $x, y, z > 0$ spełniające warunek: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, dla których prostopadłościan o wierzchołkach $(\pm x, \pm y, \pm z)$ [wpisany w elipsoidę o półosiach a, b, c] ma największą możliwą objętość.

Ćwiczenie 9. Wśród trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć taki, dla którego bryła obrotowa powstała przez obrót dookoła jednego z boków ma największą objętość.