

Matematyka I – lista zadań nr 6.

1. Obliczyć granice funkcji:

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1})$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[7]{x}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2+x} - 2}{x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\cos x - \sin x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$

(m) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

(n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+5} \sin(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2})$

(o) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

(p) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

(q) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$

2. Obliczyć granice jednostronne następujących funkcji w podanych punktach.

(a) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ w punkcie $x = 0$;

(b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ w punkcie $x = 1$;

(c) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$ w punkcie $x = 1$;

(d) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ w punkcie $x = 2$;

(e) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ w punkcie $x = 1$;

(f) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x|x|}$ w punkcie $x = 0$.

3. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 2 \\ 8 - x^2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{dla } |x| \leq 1 \\ |x - 1| & \text{dla } |x| > 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

(d) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$, gdzie $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

4. Zbadać ciągłość funkcji f na \mathbb{R} , określonej jako:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 + x^{2n}}.$$

5. Zbadać ciągłość funkcji f na \mathbb{R} , określonej jako:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}} & \text{dla } |x| \leq 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{-2n}} & \text{dla } |x| > 1 \end{cases}$$

6. Dobrać liczbę a tak, aby funkcja $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 1 \\ (x - a)^2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

była ciągła na \mathbb{R} .

7. Dobrać liczby a, b tak, aby funkcja $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } |x| \leq 1 \\ -x^2 + a & \text{dla } x > 1 \\ \sin x - b & \text{dla } x < -1 \end{cases}$$

była ciągła na \mathbb{R} .