Matematyka I

Javier de Lucas

˘ wiczenia

KMMF

TEORIA MNOGO□CI I LOGIKA

1. NarysowaæsumŒ i przeciŒcie zbiorów $A = \{x \in R;\ x > 2\}$ oraz $B = \{x \in R;\ x \leq 8\}$.

Mamy, ¿e A wygl„da nastŒpuj„co:

Mo¿emy te¿ wpisaæ $A = (2,+\infty)$.

Natomiast, B ma postaæ

Mo¿emy te¿ wpisaæ B = (-∞,8].

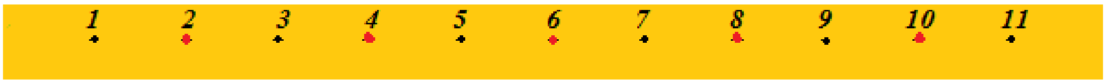
WiŒc, suma A ⋃ B tych zbiorów wygl„da

Inaczej, mo¿emy napisaæ A ⋃ B = R.
PrzeciŒcie zbiorów A i B, czyli A ⋂ B, jest:

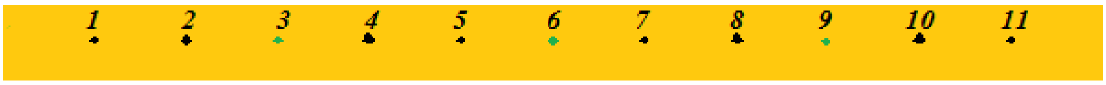
Inaczej, mo¿emy napisaæ A ⋂ B = (2,8].

2. Niech A bŒdzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 2, za□ B zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 3. Znale□æ i opisaæ sumŒ i przeciŒcie tych zbiorów.

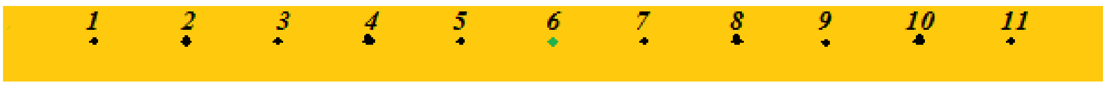
Zbiór A bŒdzie mia‡ postaæ



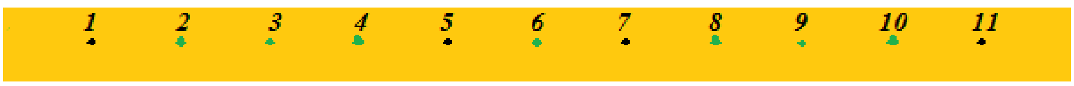
Czyli A to zbiór liczb parzystych.
Natomiast, zbiór B bŒdzie mia‡ postaæ



Czyli B to zbiór liczb podzielnych przez 3.
Wówczas, przeciŒcie C = A ⋂ B ma postaæ



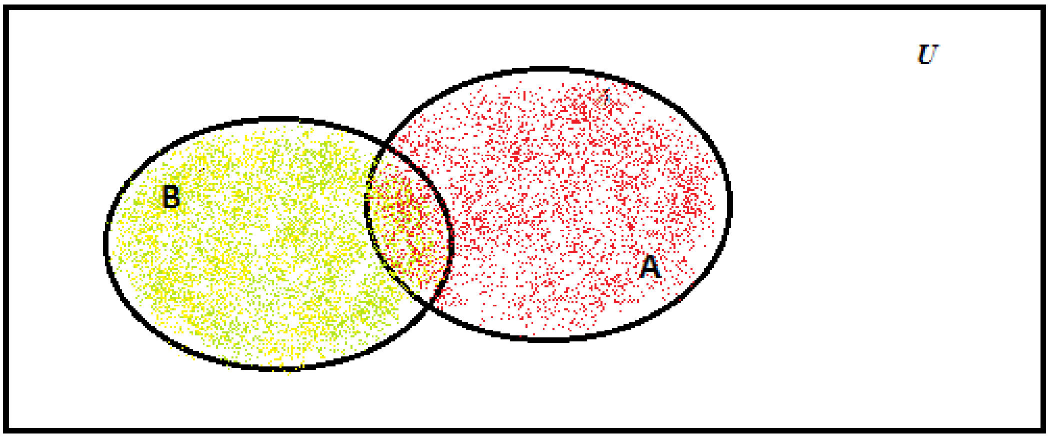
W‡a□nie, C to jest zbiór liczb podzielnych przez 6.
Suma A ⋃ B jest:



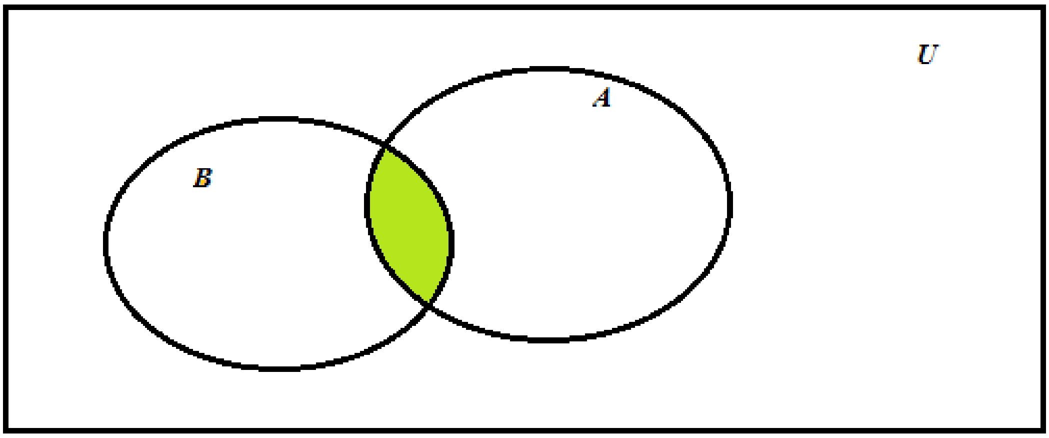
Czyli A ⋃ B to zbiór liczb, które albo s„ podzielne przez 3 albo s„ podzielne przez 2.

3. Niech A i B bŒ„ podzbiorami U. Niech C = A ⋂ B, D = A□⋃ B i E = A ⋃ B. Zaznacz na diagramach Venna zbiory C, D i E. Korzystaj„ c z praw de Morgana poka¿, ¿e A = D□⋃ C. Udowodnij, ¿e B = D ⋂ E.

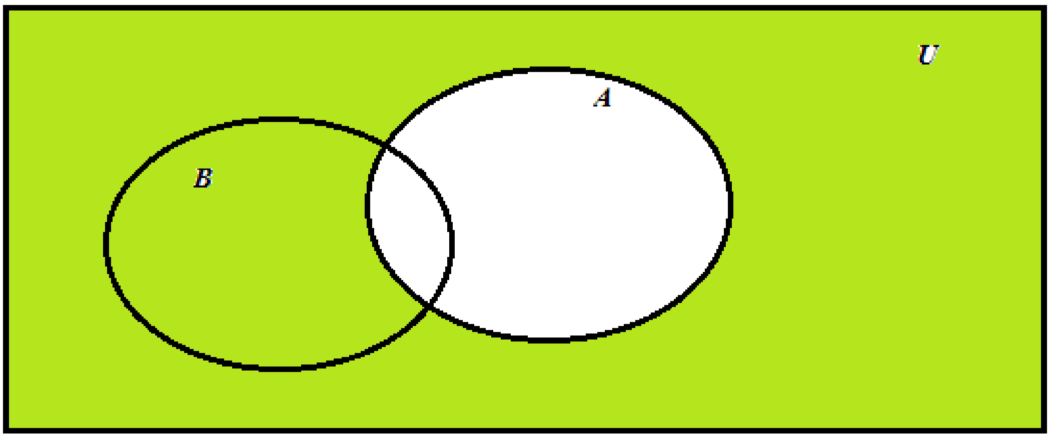
U to nadzbiór. Zbiory A, B i U bŒ„ :



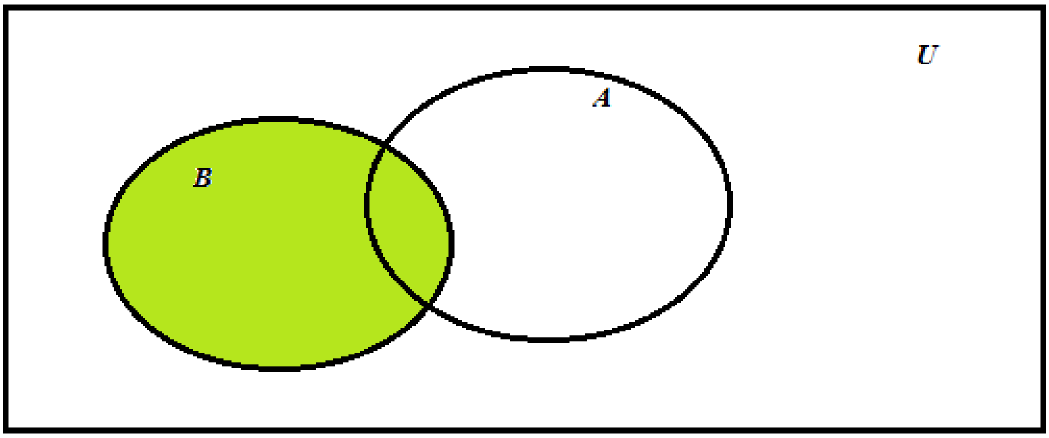
Zbiór C = A ⋂ B jest:



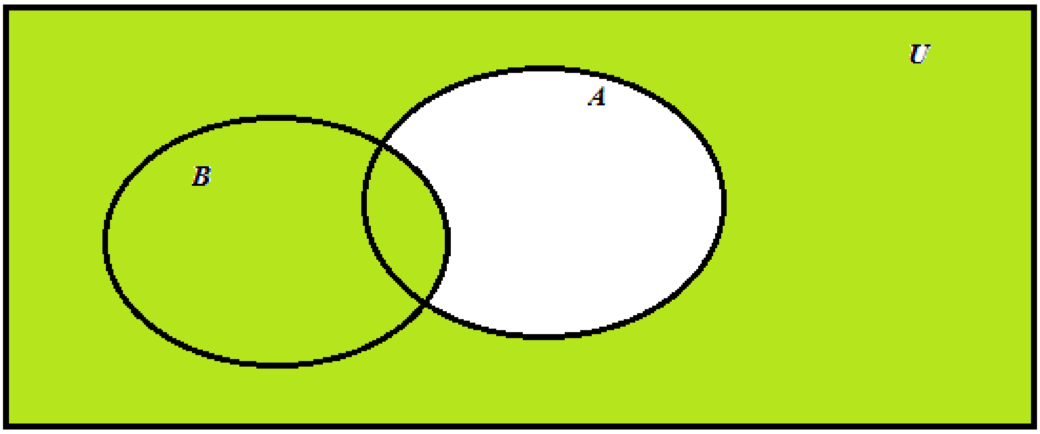
Zbiór A□



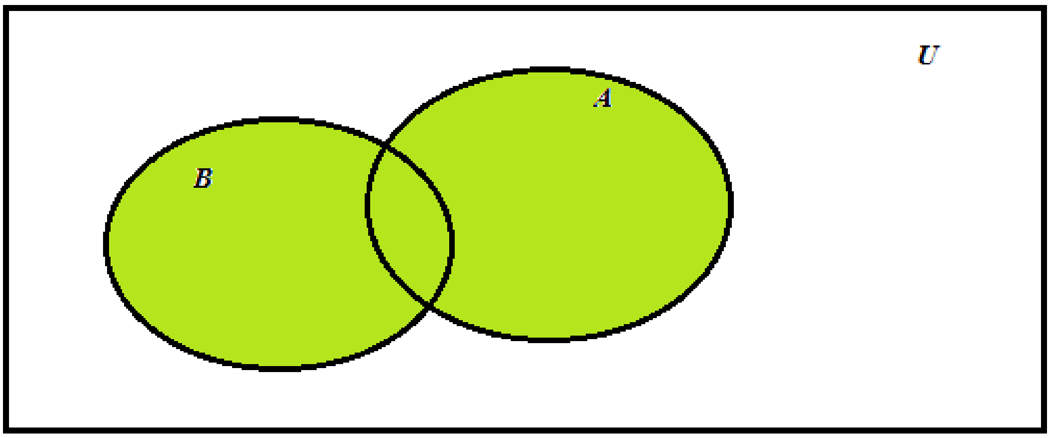
Zbiór B



Zbiór A□⋃ B



Zbiór A ⋃ B



Korzystaj„ c z praw de Morgana poka¿, ¿e A = D□⋃ C.

D□⋃ C = (A□U B)□U C= (A ⋂ B□) U (A ⋂ B)=A ⋂ (B□U B) = A ⋂ U= A.

Udowodnij, ¿e B = D ⋂ E.

D ⋂ E = (A U B) ⋂ (A U B) = B U (A ⋂ A) = B.

4. Niech p oznacza zdanie ,,idŒ do szko³y za q odpowiada zdaniu ,,s³oñce wieci. Napisz korzystaj„ c z symboli logicznych: a) Je¿eli s³oñce wieci to idŒ do szko³y, b) Je¿eli nie idŒ do szko³y to s³oñce nie wieci. Podaj (s³owami) zdanie przeciwne do ,,Je¿eli s³oñce wieci to idŒ do szko³y. Sporz„ dŸ tabelkŒ logiczn„ dla zdañ p ∧ q, p ∨ q, ‹ p, (p ∨ q) ∧ ‹ p, (p ∨ q) ∧ ‹ p ⇒ q. Jak okre limy zdanie: (p ∨ q) ∧ ‹ p ⇒ q ?

Mamy, ¿e

p ⟺ idŒ do szko³y
q ⟺ s³oñce wieci

Z tego wynika, ¿e

Je¿eli s³oñce wieci to idŒ do szko³y q ⇒ p

Je¿eli nie idŒ do szko³y to s³oñce nie wieci ‹ p⇒‹ q

Twierdzenie przeciwstawne do Je¿eli s³oñce wieci to idŒ do szko³y

‹ p ⇒ ‹ q

Je¿eli s³oñce nie wieci to nie idŒ do szko³y

Tabelka logiczna zdañ p ∧ q, p ∨ q, ‹ p, (p ∨ q) ∧ ‹ p, (p ∨ q) ∧ ‹ p ⇒ q:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$
0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

(p ∨ q) ∧ ‹ p ⇒ q jest zawsze prawd„ . Mówimy, ¿e to tautologia.

5. Niech S = {x : 1 ≤ x ≤ 17, x ∊ N} a P , Q i R to podzbiory S:

P := {liczby podzielne przez cztery},

Q := {dzielniki 36},

R := {liczby bŒd„ ce kwadratem innej liczby}.

Wypisz elementy zbiorów S, P ⋂ Q ⋂ R, opisz s‡owami zbiór P ⋃ Q, narysuj diagram Venna pokazuj„cy zale¿no□æmiŒdzy zbiorami P, Q, R, zaznacz na diagramie zbiór S.
Niech p, q, r bŒd„ zdaniami:

p : x jest wielokrotno□ci„ cztery,
q : x jest podzielnikiem 36,
r : x jest kwadratem innej liczby.

Napisz s‡owami nastŒpuj„ce zdanie: (p ∨ r)∧ ‹ q. Poka¿ na diagramie Venna obszar reprezentuj„cy (p ∨ r) ∧ ‹ q. Wypisz tabelkŒ logiczn„ dla zdania (p ∨ r) ∧ ‹ q, podaj warto□æx, dla której to zdanie jest prawdziwe.

a) Wypisz elementy zbiorów S, P ⋂ Q ⋂ R

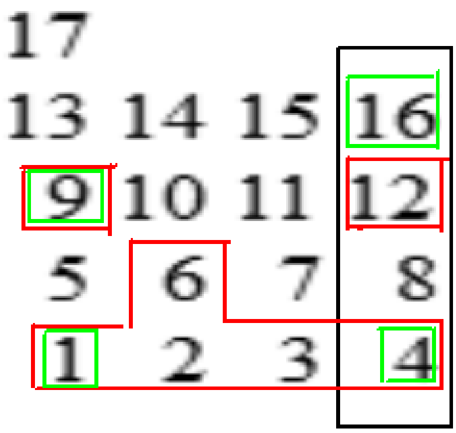
S={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17}

P ⋂ Q ⋂ R={4}

b) opisz s‡owami zbiór P ⋃ Q

P ⋃ Q to s„ elementy, które s„ podzielne przez 4 lub s„ dzielnikami 36.

c) narysuj diagram Venna pokazuj„cy zale¿no□æmiŒdzy zbiorami P, Q, R, zaznacz na diagramie S.



Na czerwono jest Q, na zielono jest R i na czarno jest P.

c) Napisz s‡owami nastŒpuj„ce zdanie: (p ∨ r)∧ ‹ q.

x nie jest podzielnikiem 36 i x jest wielokrotno□ci„ 4 lub x jest kwadratem innej liczby.

d) Wypisz tabelkŒ logiczn„ dla zdania (p ∨ r) ∧ ‹ q

p	q	r	$\neg q$	$p \vee r$	$(p \vee r) \wedge \neg q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

e) podaj warto□æx, dla której to zdanie jest prawdziwe.

Mamy trzy mo¿liwosci:

Dla p(x)=0,q(x)=0 i r(x)=1 wynika, ¿e [p(x) ∨ r(x)] ∧ ‹ q(x) = 1. Natomiast, nie ma x dla ktorej p(x)=0,q(x)=0 i r(x)=1
Dla p(x)=1,q(x)=0 i r(x)=0 wynika, ¿e [p(x) ∨ r(x)] ∧ ‹ q(x) = 1. Mamy, ¿e tylko x=8 spe‡nia takie warunki.
Dla p(x)=1,q(x)=0 i r(x)=1 wynika, ¿e [p(x) ∨ r(x)] ∧ ‹ q(x) = 1. Mamy, ¿e tylko x=16 spe‡nia takie warunki.

7. Sprawdziæ, czy zdanie p ⇒(‹ p⇒q) jest tautologi„ . Czy jest prawdziwe zdanie: Je¿eli liczba naturalna a jest liczb„ pierwsz„ , to o ile a jest liczb„ z‡o¿on„ , to a równa siŒcztery. (Widaæ tu jak logika matematyczna ma siŒdo tzw. codzienno□ci)

Piszemy tabelkŒlogiczn„

p	q	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Z tego wynika, ¿e p ⇒ (‹ p ⇒ q) jest zawsze prawd„ . Mówimy, ¿e to tautologia.

Je¿eli liczba naturalna a jest liczb„ pierwsz„ , to o ile a jest liczb„ z‡o¿on„ , to a równa siŒcztery

p ⟺ liczba naturalna a jest liczb„ pierwsz„
q ⟺ a równa siŒcztery

Je¿eli p, to ‹ p, to q, czyli

p ⟹ (‹ p ⇒ q).

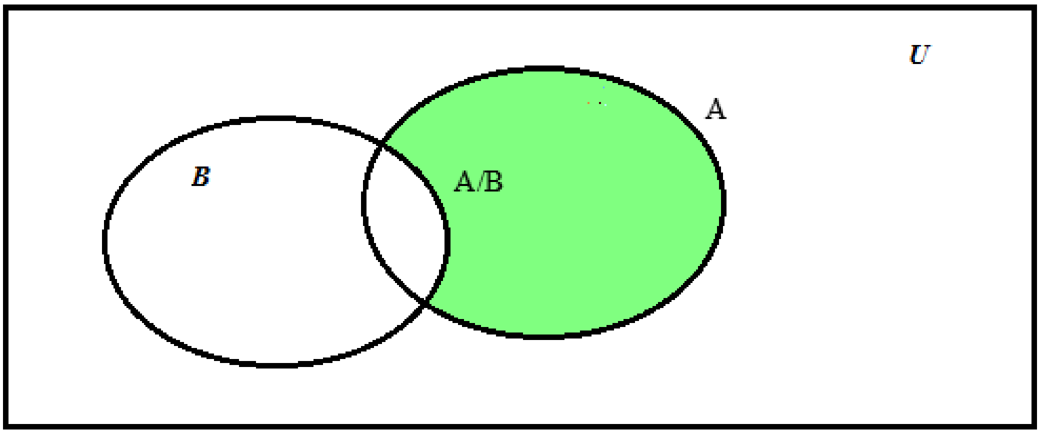
Z tego wynika, ¿e nasze zdanie jest zawsze prawd„ i mówimy, ¿e to tautologia.

Zdefiniowaæ koniunkcjŒ za pomoc„ alternatywy i negacji.

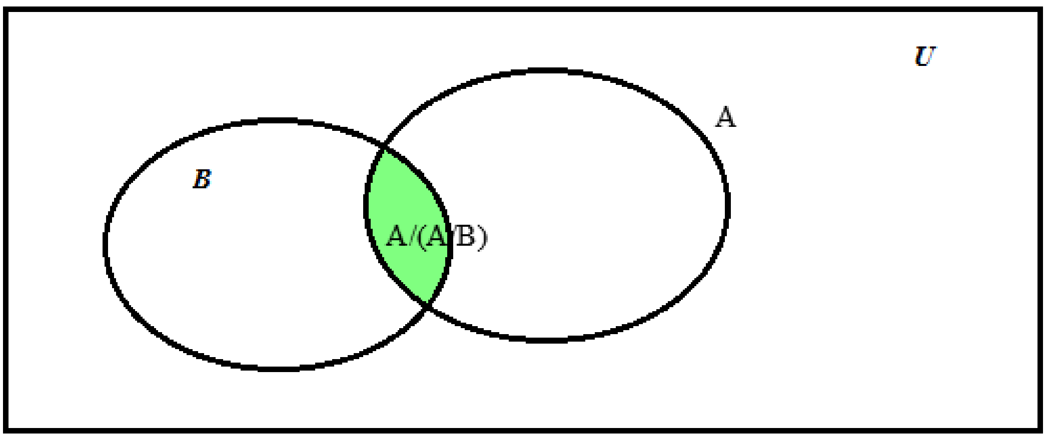
[p ∧ q] ⟺ ‹ ‹ (p ∧ q) ⟺ ‹ (‹ p ∨ ‹ q)

Niech A, B, C □ dowolne zbiory. Zilustrowaæ poni¿sze równo□ci b„ d□ zawierania na diagramach Venne□a.
(a) Pokazaæ, ¿e A⋂B = A\(A\B).
(b) Pokazaæ, ¿e A\(B ⋃ C) = (A\B) ⋂ (A\C).
(c) Pokazaæ, ¿e A\C ⊂ (A\B) ⋃ (B\C).

a) Mamy, ¿e A\B to



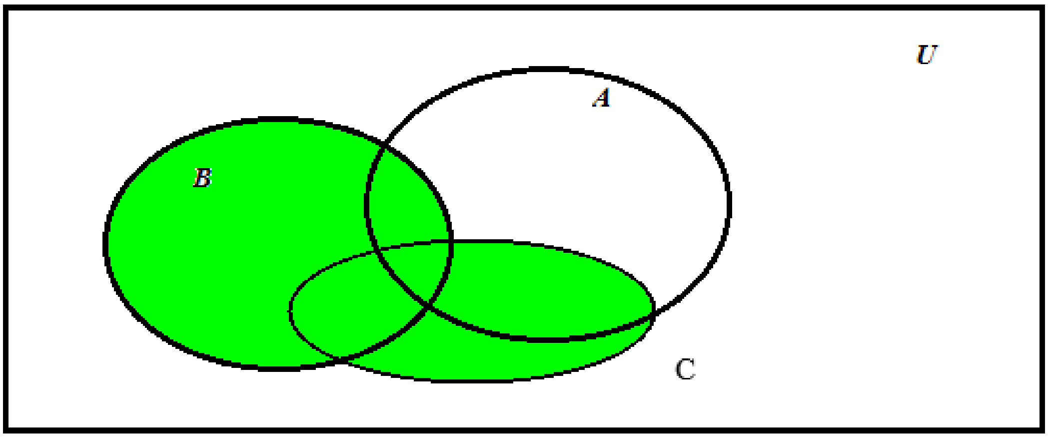
Natomiast, A/(A/B) wygl„da nastŒpuj„co:

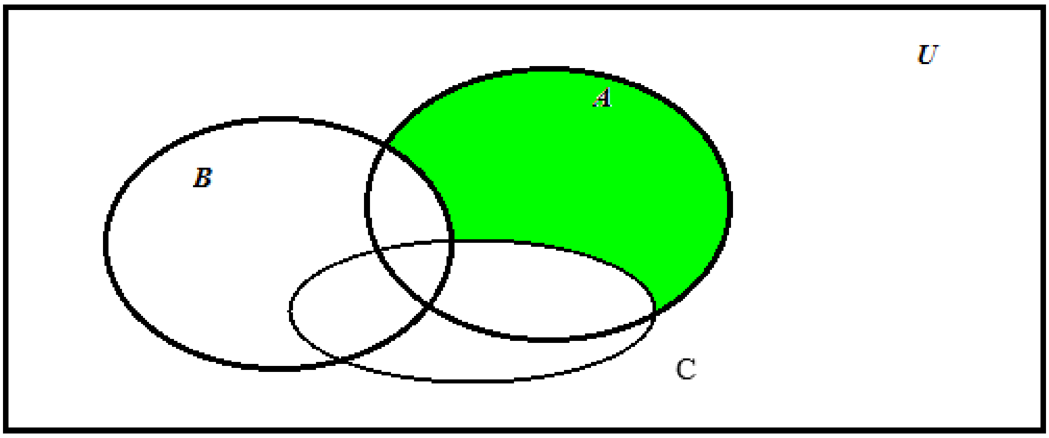


Oczywi□cie, to jest to samo co A ⋂ B.

b) Pokazaæ, ¿e A\(B ⋃ C) = (A\B) ⋂ (A\C).

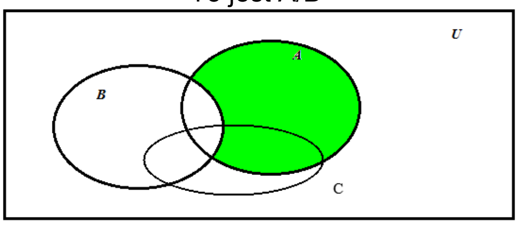
Najpierw, mamy B ⋃ C i z tego A\(B ⋃ C)



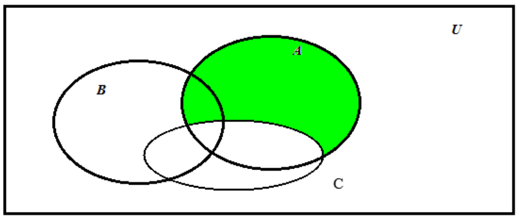


Jednocze□nie,

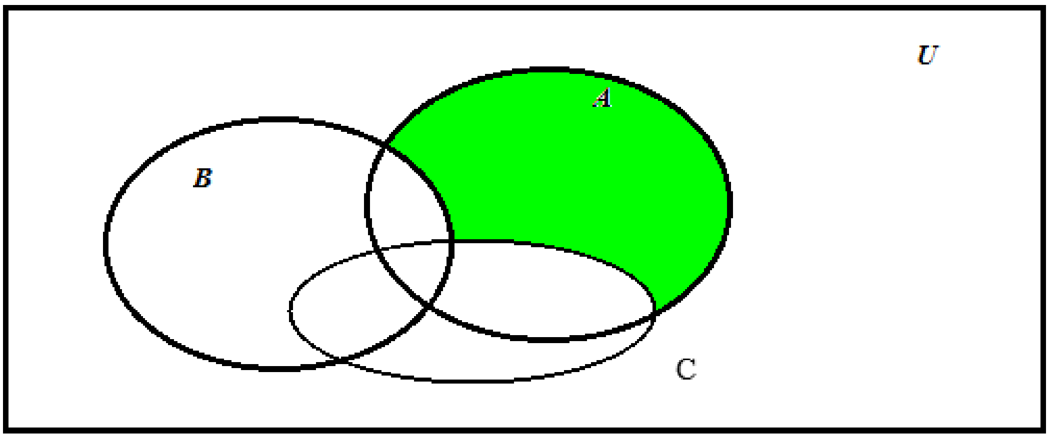
To jest A/B



To jest A/C



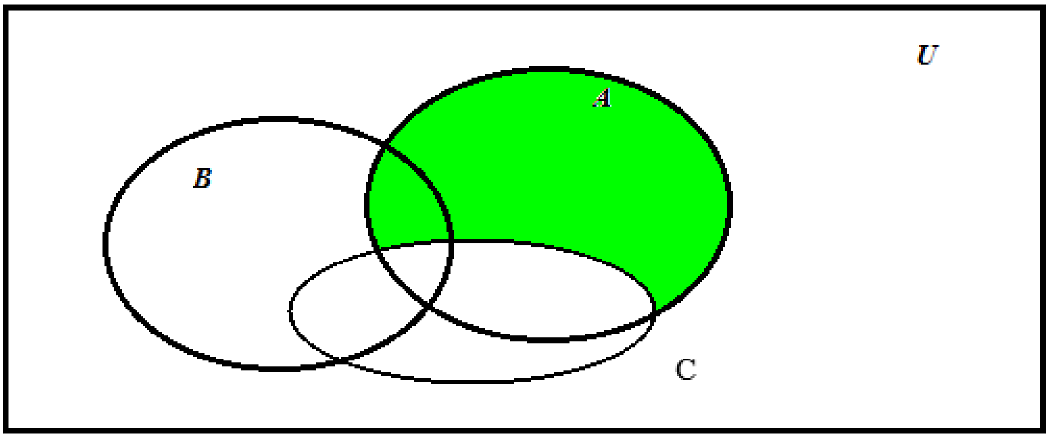
WiŒc, oto A/B ∩ A/C



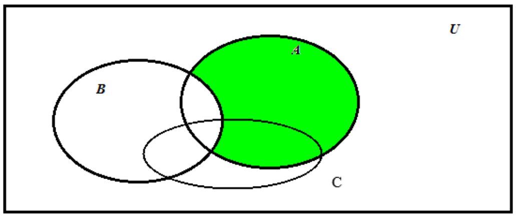
c) Pokazaæ ¿e A\C ⊂ (A\B) ⋃ (B\C).

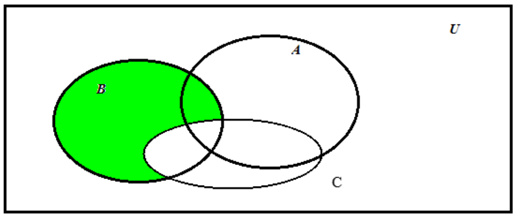
Najpierw, rysujemy

A\C

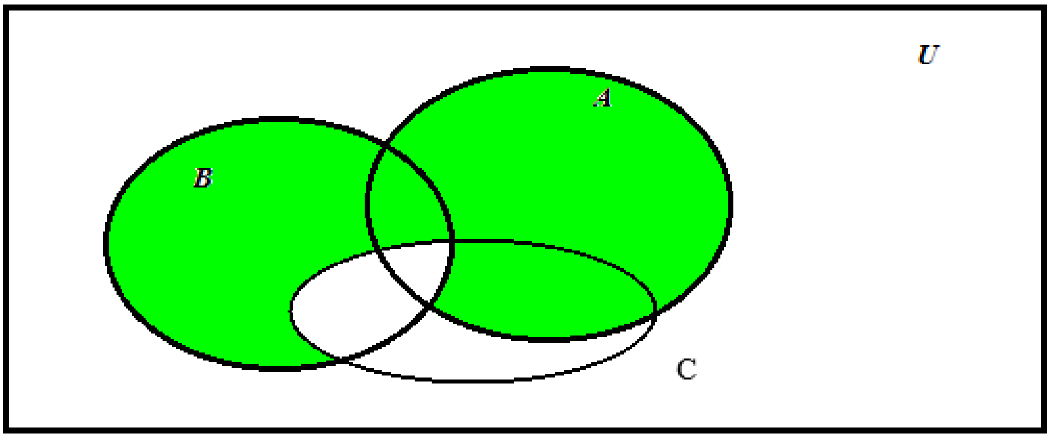


Teraz, rysujemy A\B i B\C





Wiec A\B U B\C



Widaæ ¿e A\C ⊂ A\B U B\C.