Logika matematyczna i teoria mnogości (I)

J. de Lucas

Ćwiczenie 1. (Zad. L. Newelskiego) Niech p oznacza zdanie "Ala je", zaś q zdanie "As wyje". Zapisz jako formuły rachunku zdań następujące zdania:

1.1. Ala je, jeśli As wyje.	1.2. As nie wyje, zaś Ala nie je.
1.3. Ani Ala nie je, ani As nie wyje.	1.4. As wyje, jeśli Ala je.
1.5. As wyje dokładnie wtedy, gdy Ala je.	1.6. Ala je, a As wyje.
1.7. Albo Ala nie je, albo As wyje.	1.8. Bądź Ala je, bądź As wyje.

Rozwiązanie:

Zdania 1-6, 9 i 11 są dość oczywiste. Natomiast, trzeba wyjaśnić resztę.

Wyrażenia: "albo", "bądź... bądź..." czy "lub" mogą oznaczać inne reczy w zależności od kontekstu. Najczęściej "lub" odpowiada alternatywa: "p lub q" jest prawdziwe, gdy CO NAJMNIEJ JEDNO ze zdań p i q jest prawdziwe, "albo" odpowiada alternatywa rozłącznej, czyli "albo p albo q" (również "p albo q") jest prawdziwe, gdy DOKŁADNIE JEDNO ze zdań p i q jest prawdziwe, "bądź p bądź q" jest prawdziwe, gdy JEDNO lub ŻADNE ze zdań jest prawdziwe. Ten spójnik nazywa się dysjunkcją.

Z powyższych komentarzy wynika, że:

1.1. $q \Rightarrow p$,	1.2. $\neg p \wedge \neg q$,
1.3. $\neg p \wedge \neg q$,	1.4. $p \Rightarrow q$,
1.5. $p \Leftrightarrow q$,	1.6. $p \wedge q$,
1.7. $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$,	1.8. $\neg p \vee \neg q$,

Ciekawość 1. W informatyce (w teorii obwodów logicznych) używa się wielu innych spójników : "NAND", "NOR", "XOR". Można łatwo twierdzić, że istnieją 2^4 spójników dwuargumentowych.

□

Ćwiczenie 2. Wykaż, że następujące formy zdaniowe są tautologiami:

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, ("prawo transpozycji"),
- $p \vee \neg p$, ("prawo wyłączonego środka","prawo tertium non datur"),
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$, ("prawo zastępowania równoważności"),
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$, ("prawo zastępowania implikacji"),
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, ("prawo przeczenia koniunkcji"),
- $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$, ("prawo przeczenia implikacji"),

Rozwiązanie: Powyższe formy można twierdzić za pomocą następujących tabel:

1. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, ("prawo transpozycji"),

p	q	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

2. $p \vee \neg p$, ("prawo wyłączonego środka","prawo tertium non datur"),

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

3. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$, ("prawo zastępowania równoważności"),

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q(r)$	$q \Rightarrow p(s)$	$r \wedge s$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

4. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$, ("prawo zastępowania implikacji"),

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q,$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

5. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, ("prawo przeczenia koniunkcji"),

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1

6. $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$, ("prawo przeczenia implikacji"),

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q,$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

$\square$

Ćwiczenie 3. Sprawdź, czy następujące formy zdaniowe są tautologiami:

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$,
2. $p \wedge \neg p$.
3. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \wedge \sim r) \Rightarrow \neg q)]$,
4. $((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \vee \sim r) \Rightarrow \neg q]$.

Rozwiązanie:

1. Nie jest tautologią.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q(r)$	$\neg p \Rightarrow \neg q(s)$	$r \Rightarrow s$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1

2. Nie jest tautologią

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

3. Jest tautologią.

p	q	r	$\neg q$	$p \vee r$	$(p \vee r) \wedge \neg q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

4. Nie jest tautologią.

p	q	r	$p \vee q \Rightarrow r$	$p \vee \neg r$	$p \vee \neg r \Rightarrow \neg q$	$(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee \neg r \Rightarrow \neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0

$\square$

Ćwiczenie 4. Sprawdź, czy następujące reguły wnioskowania są poprawne:

1. $\frac{p, p \Rightarrow q}{q}$,(" modus ponens"),
2. $\frac{p \Rightarrow q, \neg q}{\neg p}$,("modus tollens"),
3. $\frac{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r}{(p \vee q) \Rightarrow r}$,
4. $\frac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$, ("sylogizm warunkowy")
5. $\frac{(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p}{p \Rightarrow q}$,("reguła sprowadzania do sprzeczności").

Rozwiązanie:

1. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ jest fałszywe gdy $q = 0$ i $p \wedge (p \Rightarrow q) = 1$. Ale z założenia $p \wedge (p \Rightarrow q) = 1$ wynika, że $p = 1$ i $q = 1$. To, kiedy $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ jest fałszywe, to $q = 1$ i $q = 0$. To jest niemożliwe, więc $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ nie może być fałszywe i jest tautologią.

2. $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$ jest fałszywe gdy $p = 0$ i $\neg q \wedge (p \Rightarrow q) = 1$. Ale z $\neg q \wedge (p \Rightarrow q) = 1$ wynika, że $p = 1$ i $q = 0$. Więc, $[\neg q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p$ nie może być fałszywe.

3. Tablica prawdy tej reguły

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

4. Tablica prawdy tej reguły

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

5. Reguła ta jest fałszywa, gdy $(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ jest prawdziwe i $p \Rightarrow q$ jest fałszywe. Natomiast, $p \Rightarrow q = 0$ wymaga, że $p = 1$ i $q = 0$. W takim przypadku, $(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ jest fałszywe. Więc, reguła jest zawsze prawdziwa, czyli jest tautologią.

Ciekawość 2. Reguła do sprowadzenia do sprzeczności pojawia się bardzo często w matematyce.

□

Ćwiczenie 5. Udowodnij następujące prawa rachunku zbiorów:

1. $(A \backslash B) \cap B = \emptyset, \quad (A \backslash B) \cup B = A \cup B,$
2. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C), \quad A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C),$
3. $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B.$
4. $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C,$ (przechodniość inkluzji),
5. $A \cap B \subset A \subset A \cup B, \; A \backslash B \subset A,$
6. $(A \subset B \wedge C \subset D) \Rightarrow (A \cap C \subset B \cap D) \wedge (A \cup C \subset B \cup D).$

Rozwiązanie:

1. $(A \backslash B) \cap B = \emptyset, \quad (A \backslash B) \cup B = A \cup B,$

   Wiemy, że $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy

$$\forall x, x \in (A \backslash B) \cap B \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Mamy, że

$$x \in (A \backslash B) \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B') \wedge (x \in B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin B.$$

Skoro $x \in B \wedge x \notin B$ i $x \in \emptyset$ są zawsze fałszywe (mówi się, że są sprzecznościami) mamy, że

$$(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Z tego,

$$x \in (A \backslash B) \cap B \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Można rozwiązać ten problem trochę inaczej.

$$(A \backslash B) \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge x \in B\} \qquad i \qquad \emptyset = \{x | r(x)\},$$

gdzie $r(x)$ to sprzeczność. Oczywiście, jeżeli zdania logiczne, które zdefiniują zbiory są sobie równe, to oba zbiory będą równe. Właśnie, niech $x \in A$ będzie p i $x \in B$ będzie q, wtedy

p	q	$p \wedge q \wedge \neg q$	r	$(p \wedge q \wedge \neg q) \Leftrightarrow r$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

Drugą relację można udowodnić podobnie.

2. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C), \quad A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C),$

   Mamy, że

$$x \in A \backslash (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C).$$

Z prawa Morgana wynika, że $\neg(x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow \sim (x \in B) \vee \neg(x \in C)$. Zatem

$$x \in A \backslash (B \cap C) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \sim (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge \sim (x \in C))$$

i

$$x \in A \backslash (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A \backslash B) \vee (x \in A \backslash C) \Leftrightarrow x \in A \backslash B \cup A \backslash C.$$

Więc,

$$A \backslash (B \cap C) = A \backslash B \cup A \backslash C.$$

Drugi sposób: Wiemy, że

$$A\backslash(B\cap C)=\{x|(x\in A)\wedge\sim(x\in B))\vee((x\in A)\wedge\sim(x\in C))\}$$

i

$$A\backslash B\cup A\backslash C=\{x|x\in A\backslash B\cup A\backslash C\}.$$

Jeżeli funkcje zdaniowe zdefiniują $A\backslash(B\cap C)$ i $A\backslash B\cup A\backslash C$ są równoważne, to oba zbiory są sobie równe. Właśnie, niech p, q i r będą $x\in A$, $x\in B$ i $x\in C$, to

p	q	r	$p\wedge\neg(q\wedge r)$	$(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Więc, takie funkcje są równoważne i $A\backslash B\cup A\backslash C=A\backslash B\cup A\backslash C$.

Drugą relację można udowodnić podobnie.

3. $A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$. Podobnie do poprzedniego przykładu.

4. $A\subset B\wedge B\subset C\Rightarrow A\subset C$, (przechodniość inkluzji),

   Przechodniość inkluzji jest równoważna do

$$[(\forall x,x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge(\forall x,x\in B\Rightarrow x\in C)]\Rightarrow(\forall x,x\in A\Rightarrow x\in C).$$

Możemy sprawdzić, że wniosek

$$(x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Rightarrow x\in C)]\Rightarrow(x\in A\Rightarrow x\in C)$$

jest tautologią. Niech p będzie $x\in A$, q będzie $x\in B$ i r będzie $x\in C$, można przedstawić poprzedni wniosek jako

$$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r).$$

Korzystając z tabeli prawdy tego wniosku,

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

można twierdzić, że jest tautologią. Więc, $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

5. $A \cap B \subset A \subset A \cup B, \;\; A \backslash B \subset A$,

   Najpierw, udowodnimy, że $A \cap B \subset A$. To znaczy, że

$$\forall x, x \in A \cap B \Rightarrow x \in A.$$

   Ale,

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

   Możemy twierdzić, że $x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$ jest tautologią:

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow q$
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

   Więc,

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

   i $A \cap B \subset A$. Resztę relacji można twierdzić podobnie.

6. $(A \subset B \wedge C \subset D) \Rightarrow (A \cap C \subset B \cap D) \wedge (A \cup C \subset B \cup D)$. Twierdzenie jest podobne do poprzednich przykładów.

$\square$

Ćwiczenie 6. Udowodnij, że dla zbiorów A i B następujące warunki są równoważne:

- $A \subset B$,
- $A \cap B = A$,
- $A \cup B = B$.

Rozwiązanie: Jeżeli $A \subset B$, wtedy

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Wartość logiczna zdania $x \in A \Rightarrow x \in B$ jest równa wartości zdania $x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A$. Właśnie, niech p i q będą $x \in A$ i $x \in B$, to

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge q \Leftrightarrow p$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Więc,

$$(\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A).$$

Czyli $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Jeżeli $A \cap B = A$, wtedy

$$\forall x, (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A.$$

Wartość logiczna zdania $x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A$ jest równa wartości zdania $x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$. Właśnie, niech p i q będą $x \in A$ i $x \in B$, to

p	q	$p \wedge q \Leftrightarrow p$	$p \vee q$	$p \vee q \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Więc,

$$(\forall x, x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B).$$

Czyli $A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$. Podsumowując,

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

$\square$

Ćwiczenie 7. Udowodnij następujące wzory rachunku podzbiorów zbioru X:

1. $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = X$,
2. $A \backslash B = A \cap B'$,
3. $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$, (prawa de Morgana),
4. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B' = \emptyset$,
5. $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$.

Rozwiązanie:

1. Mamy, że
$$A \cap A' = \{x | x \in A \wedge x \in A'\} \qquad i \qquad \emptyset = \{x | q(x)\},$$
gdzie $q(x)$ jest formą zdaniową, która jest zawsze fałszywa, tj. $q(x) = 0$ dla każdego elementu x. Więc, $A \cap A'$ i $\emptyset$ są równe, gdy ich formy zadaniowe są równe. Mowiąc inaczej
$$A \cap A' = \emptyset \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \wedge x \in A' \Leftrightarrow 0).$$
Niech p będzie $x \in A$ musimy sprawdzić, że $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$. To twierdziliśmy w ćwiczeniu 3.II. Zatem $A \cap A' = \emptyset$.

2. Mamy, że
$$(A \cap B)' = \{x | \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \qquad i \qquad A' \cup B' = \{x | x \in A' \vee x \in B'\}.$$
Niech p będzie $x \in A$ i q będzie $x \in B$. Więc, jeżeli
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
to $(A \cap B)' = A' \cup B'$. Sprawdzamy, że to tautologia

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1

□