(A)

Rozwiązać równania

a) $z^2 = i$

Skoro $z^2 \notin \mathbb{R}^-\cup\{0\}$ to $w = z^2$ i $z = \sqrt{w}$ i możemy korzystać z wzoru

$$\sqrt{w} = \pm\sqrt{|w|}\,\frac{w+|w|}{|w+|w||} \qquad (1)$$

Więc

$$z = \sqrt{i} = \pm\sqrt{1}\,\frac{i+1}{|i+1|} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

b) $z^2 = 3-4i$

Skoro $w = 3-4i \notin \mathbb{R}^-\cup\{0\}$ to $\sqrt{w}$ można obliczyć za pomocą (1).

Więc

$$|w| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$$

$$z = \sqrt{w} = \pm\sqrt{5}\,\frac{3-4i+5}{|3-4i+5|} = \pm\sqrt{5}\,\frac{8-4i}{|8-4i|} = \pm\sqrt{5}\,\frac{2-i}{|2-i|} = \pm(2-i)$$

c) $z^2 = 5-12i$

Skoro $w = 5-12i \notin \mathbb{R}^-\cup\{0\}$ to $\sqrt{w}$ można obliczyć za pomocą (1).

Wówczas

$$z = \sqrt{w} = \pm\sqrt{|w|}\,\frac{w+|w|}{|w+|w||} = \pm\sqrt{13}\,\frac{5-12i+13}{|5-12i+13|} = \pm\sqrt{13}\,\frac{18-12i}{|18-12i|}$$

$$|w| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\Rightarrow z = \pm\sqrt{13}\,\frac{3-2i}{|3-2i|} = \pm(3-2i).$$

(B)

d) $z^2-(1+i)z+6+3i=0$

To równanie kwadratowe. Wówczas, rozwiązanie ma postać

$az^2+bz+c=0$
$z,a,b,c\in\mathbb{C}$

$$z_\pm=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow z_\pm=\frac{1+i\pm\sqrt{(1+i)^2-4(6+3i)}}{2}$$

$$z_\pm=\frac{1+i\pm\sqrt{2i-24-12i}}{2}=\frac{1+i\pm\sqrt{-10i-24}}{2}$$

Teraz musimy obliczyć $\sqrt{-10i-24}$. Wiemy, że

$$\sqrt{-10i-24}=\pm\sqrt[4]{10^2+24^2}\,\frac{-10i-24+|10i+24|}{|-10i-24+|10i+24||}=\pm\sqrt{26}\,\frac{-10i-24+26}{|-10i-24+26|}$$

$$|10i+24|=\sqrt[2]{10^2+24^2}=\sqrt{100+576}=\sqrt{676}=26$$

$$\Rightarrow \sqrt{-10i-24}=\pm\sqrt{26}\,\frac{2-10i}{|2-10i|}=\pm\sqrt{26}\,\frac{1-5i}{|1-5i|}=\pm(1-5i)$$

$$|1-5i|=\sqrt{26}$$

Z tego

$$z_\pm=\frac{1+i\pm(1-5i)}{2}$$

$$z_+=\frac{1+i+1-5i}{2}=1-2i$$

$$z_-=\frac{1+i-1+5i}{2}=3i$$

e) $z^2-5z+4+10i=0$.

To równanie kwadratowe ma rozwiązanie

$$z_\pm=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4(4+10i)}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16-40i}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9-40i}}{2}$$

Teraz $\sqrt{9-40i}=\pm\sqrt{41}\,\frac{9-40i+41}{|9-40i+41|}=\pm\sqrt{41}\,\frac{50-40i}{|50-40i|}=\pm(5-4i)$.

$$|9-40i|=\sqrt{81+1600}=\sqrt{1681}=41$$

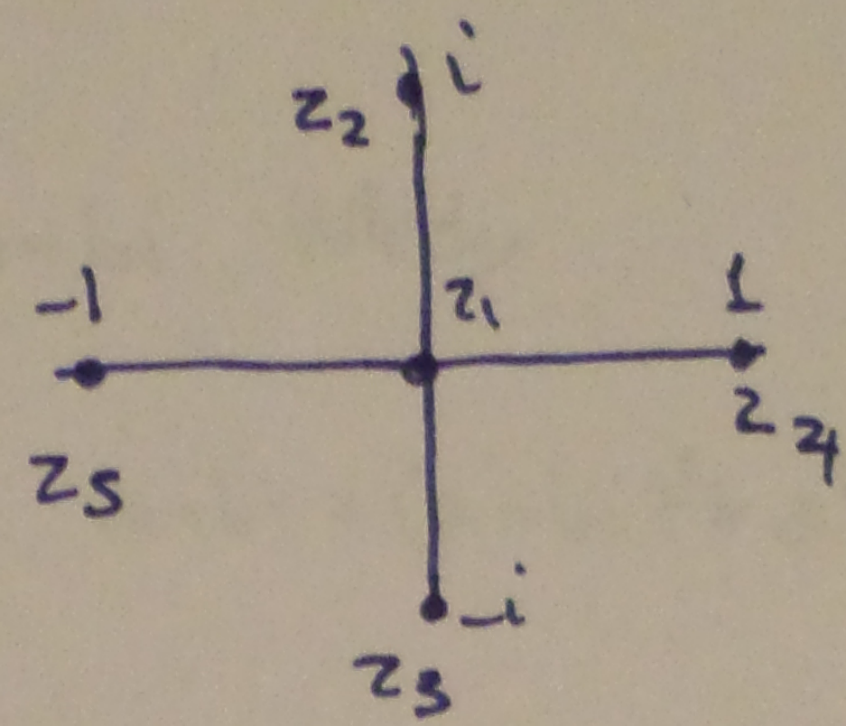
$(40+1)(40+1)$

$-\frac{1}{2}$

(c)

$\Rightarrow \begin{cases} \text{a) } a=0 \wedge b=0 \Rightarrow z_1=0 \\ \text{b) } a=0 \wedge 3a^2-b^2+1=0 \Rightarrow 1=b^2 \Rightarrow b=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} z_2 = i \\ z_3 = -i \end{cases} \\ \text{c) } a^2-3b^2-1=0 \wedge b=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} z_4 = 1 \\ z_5 = -1 \end{cases} \\ \text{d) } a^2-3b^2-1=0 \wedge 3a^2-b^2+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 = 3b^2+1 \Rightarrow 9b^2+3-b^2+1=0 \Rightarrow 8b^2=-4$ Skoro $b\in\mathbb{R}$ nie ma rozwiązania



6 Rozwiązać równania:

a) $z\bar{z} + (z-\bar{z}) = 3+2i \iff |z|^2 + 2i\,\mathrm{Im}\,z = 3+2i \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}\,z = 1 \\ |z|^2 = 3 \end{cases}$

Podstawmy

$\left.\begin{matrix} z=a+bi \\ b=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2+1=3 \rightarrow a=\pm\sqrt{2}. \Rightarrow \boxed{z=\pm\sqrt{2}+i}$

b) $i(z+\bar{z}) + i(z-\bar{z}) = 2i-3 \iff 2i\,\mathrm{Re}\,z + ii\,2\,\mathrm{Im}\,z = 2i-3 \iff$

$-2\,\mathrm{Im}\,z + 2i\,\mathrm{Re}\,z = 2i-3 \iff \begin{cases} 2\mathrm{Re}\,z = +2 \\ -2\,\mathrm{Im}\,z = -3 \end{cases} = \boxed{\begin{matrix} \mathrm{Re}\,z = 1 \\ \mathrm{Im}\,z = \frac{3}{2} \end{matrix}}$

$$\boxed{z = 1 + \frac{3i}{2}}$$

7 Rozwiązać równania.

$z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$

$z^6 = (\bar{z}+1)^6 \Rightarrow |z|^6 = |\bar{z}+1|^6 \Rightarrow |z| = |\bar{z}+1| \Rightarrow a^2+b^2 = (a+1)^2+b^2$

$\Downarrow$

$2a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{2}}$

ważne tylko w tym kierunku!!

Ale to jest warunek konieczny aby z będzie rozwiązaniem równania. Natomiast, nie jest wystarczający. ogólnie!!

$$z_{\pm} = \frac{5 \pm (5-4i)}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow z_+ = 5-2i \\ \searrow z_- = 2i \end{matrix}$$

(D)

4. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone sprzężone do swojego kwadratu ($\bar{z} = z^2$)

Napiszemy $z = a+bi$. Wtedy

$$\bar{z} = z^2 \iff a-bi = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow \begin{cases} a = a^2 - b^2 \\ -b = 2ab \end{cases}$$

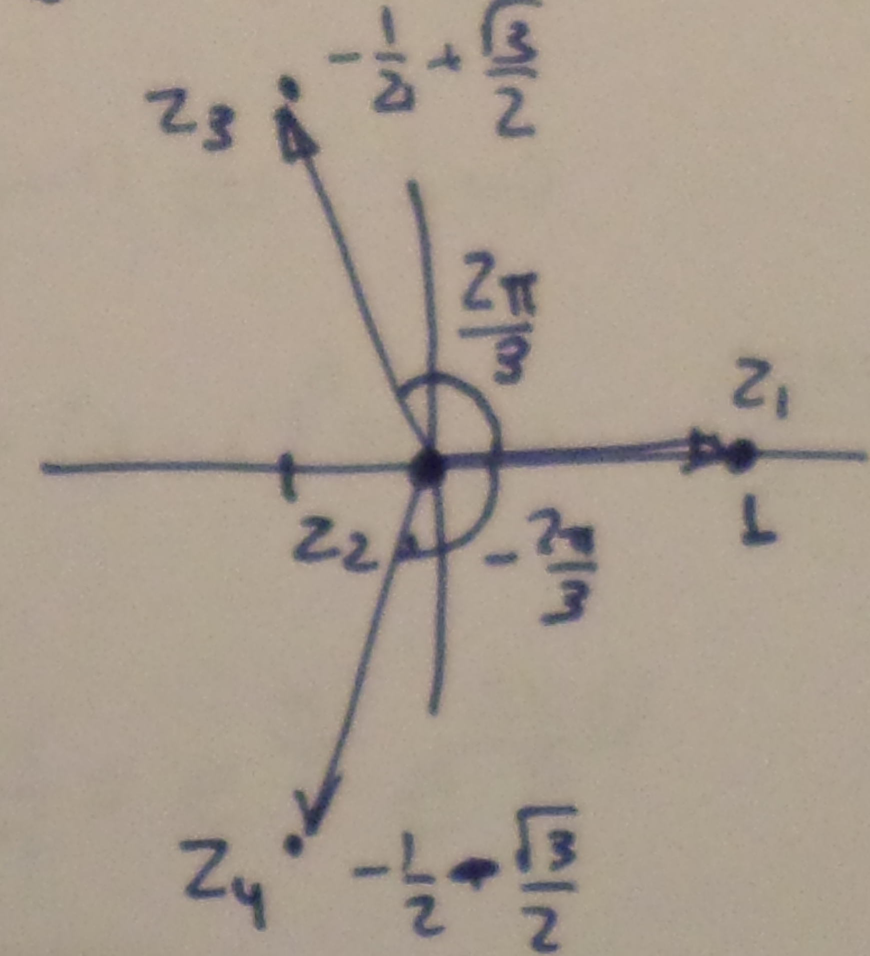
$$\Rightarrow \begin{matrix} a^2 - a - b^2 = 0 \\ (2a+1)b = 0 \end{matrix}$$

Mamy dwie opcje:

a) $b = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 1, 0 \Rightarrow \begin{cases} a+bi = 1 = z_1 \\ a+bi = 0 = z_2 \end{cases}$

b) $2a+1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Rozwiązania:



5. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone sprzężone do swojego sześcianu ($\bar{z} = z^3$)

Napiszemy $z = a+bi$. Wtedy,

$$\bar{z} = z^3 \iff a - bi = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3 i$$

$$\iff \begin{cases} a = a^3 - 3ab^2 \\ -b = 3a^2 b - b^3 \end{cases} \iff \begin{cases} a(a^2 - 3b^2 - 1) = 0 \\ b(3a^2 - b^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$$z^6=(\bar{z}+1)^6 \Rightarrow \quad z^6=\left(-\tfrac{1}{2}+bi\right)^6=\left(-\tfrac{1}{2}+1-bi\right)^6 \Leftrightarrow \left(-\tfrac{1}{2}+bi\right)^6=\left(\tfrac{1}{2}-bi\right)^6$$

to zawsze prawda!!

Więc, $z=-\frac{1}{2}+bi$, dla dowolnej $b\in\mathbb{R}$ jest rozwiązaniem.

b) $\left(\frac{1-\bar{z}}{1+z}\right)^{2003}=1 \Rightarrow \left|\frac{1-\bar{z}}{1+z}\right|=1 \Rightarrow |1-\bar{z}|=|1+z| \Rightarrow |1-a+bi|=|1+a+bi|$ ($z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$) $\Downarrow$

$$(1-a)^2+\cancel{b^2}=(1+a)^2+\cancel{b^2} \Rightarrow \cancel{1}-2a+\cancel{a^2}=\cancel{1}+2a+\cancel{a^2} \Rightarrow \underline{\underline{4a=0}}$$

Teraz $z=bi$!!

$\left(\frac{1+bi}{1+bi}\right)^{2003}=1$. zawsze więc, $z=bi$ i b jest dowolne.

c) $(z+i)^n+(z-i)^n=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

$(z+i)^n=-(z-i)^n \Rightarrow \quad |z+i|=|z-i| \Rightarrow |a+(b+1)i|=|a+(b-1)i|$

$\Leftrightarrow \cancel{a^2}+(b+1)^2=\cancel{a^2}+(b-1)^2 \Leftrightarrow b=0.$

Teraz $z=a \Rightarrow \quad (a+i)^n+(a-i)^n=0 \Rightarrow \left(\frac{a+i}{a-i}\right)^n=-1$

$$\frac{a+i}{a-i}=\sqrt[n]{e^{\pi i}e^{2k\pi i}}=\frac{a+i}{a-i}=e^{\frac{\pi i}{n}}e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

$$\frac{a+i}{a-i}=\frac{\sqrt{a^2+1}\,e^{i\varphi}}{\sqrt{a^2+1}\,e^{-i\varphi}}=e^{2i\varphi}=e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i} \Rightarrow \varphi=\frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{a} \Rightarrow \quad \operatorname{ctg}\varphi=a \Rightarrow \boxed{a=\operatorname{ctg}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$

(F)

Wykazać równości:

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\, e^{ikx} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) \overset{x \neq 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z}}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}(1 - e^{inx})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix/2} e^{i\frac{nx}{2}}(e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}})}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}(e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}})}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}}{2i} \frac{2i}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x} \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \quad \text{dla } x \neq 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z}$$

$$I = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\, e^{ikx}$$

Tak samo jak wcześniej, ale mamy Im zamiast Re. Więc

$$I = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x} \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$