Rozwiązania kartkówki II

J. de Lucas

Ćwiczenie 1. Rozwiąż równania:

$$\text{arc sin } 2x + \text{arc sin } x = \frac{\pi}{3}, \qquad \text{arc sin} \frac{2}{3\sqrt{x}} - \text{arc sin } \sqrt{1-x} = \text{arc sin } \frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie: Jeżeli x spełnia warunek

$$\text{arc sin } 2x + \text{arc sin } x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \text{arc sin } 2x = \frac{\pi}{3} - \text{arc sin } x, \tag{1.1}$$

to x spełnia też

$$\sin\left(\text{arc sin } 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \text{arc sin } x\right). \tag{1.2}$$

Natomiast, jeżeli x spełnia to drugie, to x nie zawsze spełnia (1.1): jeżeli dwa kąty mają taki sam sinus, nie koniecznie są sobie równe. W szególności, jeżeli x spełnia (1.2), to

$$\text{arc sin } 2x = \frac{\pi}{3} - \text{arc sin } x + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z} \vee \text{arc sin } 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{3} - \text{arc sin } x + 2\pi k\right), \; k \in \mathbb{Z}.$$

Jakkolwiek, rozwiązania (1.1) są rozwiązaniami (1.2). Więc, sprawdzamy rozwiązania równania (1.2) i sprawdzamy które z tych rozwiązań są rozwiązaniami (1.1). Skoro $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ i $\text{arc sin}(\sin\alpha) = \alpha$, mamy, że z (1.2) wynika

$$2x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\text{arc sin} x) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\text{arc sin}(x)) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\text{arc sin}(x)) - \frac{1}{2}x.$$

Pamiątamy, że $\text{arc sin}(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$, więc, $\cos(\text{arc sin}(x)) \geq 0$. Z tego,

$$\cos(\text{arc sin}(x)) = \sqrt{1 - \sin(\text{arc sin}(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

Więc,

$$2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 5x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}.$$

Jeżeli x spełnia ostatnie równanie, to też spełnia to równanie do kwadratu

$$25x^2 = 3(1-x^2) \Leftrightarrow 28x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{28}}.$$

Natomiast, rozwiązanie tego równania nie są taki same, jak rożwiązanie $5x = \sqrt{1-x^2}$, kiedy podniszicmy do kwadratu, dodajemy nowe rozwiązanie. Własnie, widać, że rozwiązanie równania $5x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$ jest nieujemna ponieważ prawa strona jest nieujemna. Więc, tylko $x = \sqrt{3/28}$ jest rozwiązaniem tego równania i równania (1.2).

Teraz musimy sprawdzić, czy x jest rozwiązaniem (1.1). To mozna sprawdzić kalkulatorem lub zauważyć, że

$$0 < \text{arc sin}\left(\sqrt{\frac{3}{28}}\right) < \text{arc sin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$0 < \text{arc sin}\left(2\sqrt{\frac{3}{28}}\right) < \pi/2.$$

Wówczas,

$$0 < \text{arc sin}\left(2\sqrt{\frac{3}{28}}\right) + \text{arc sin}\left(\sqrt{\frac{3}{28}}\right) < \frac{2\pi}{3},$$

skoro tez

$$\sin\left(\text{arc sin}\left(2\sqrt{\frac{3}{28}}\right) + \text{arc sin}\left(\sqrt{\frac{3}{28}}\right)\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

to

$$\text{arc sin}\left(2\sqrt{\frac{3}{28}}\right) + \text{arc sin}\left(\sqrt{\frac{3}{28}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Rozwiązujemy teraz

$$\text{arc}\sin\frac{2}{3\sqrt{x}} - \text{arc sin}\sqrt{1-x} = \text{arc sin}\,\frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{arc}\sin\frac{2}{3\sqrt{x}} = \text{arc sin}\,\frac{1}{3} + \text{arc sin}\sqrt{1-x}.$$

To równanie tylko ma sens dla $x \in (0,1)$, tj. gdy $1-x > 0$ i $x > 0$. Postępując jak wczesniej, rozwiązania tego równania są pewnymi rozwiązaniami równania

$$\sin\left(\text{arc}\sin\frac{2}{3\sqrt{x}}\right) = \sin\left(\text{arc sin}\,\frac{1}{3} + \text{arc sin}\sqrt{1-x}\right).$$

Wówczas,

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} = \sin\left(\text{arc sin } \frac{1}{3}\right)\cos\left(\text{arc sin } \sqrt{1-x}\right) + \cos\left(\text{arc sin } \frac{1}{3}\right)\sin\left(\text{arc sin } \sqrt{1-x}\right).$$

Mamy, że

$$\cos\left(\text{arc sin}\sqrt{1-x}\right) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\text{arc sin}\sqrt{1-x})}$$

Skoro arc $\sin(\alpha) \in [-\pi/2, \pi/2]$ dla $\alpha \in [-1, 1]$, to $\cos[\text{arc sin}(\alpha)] \geq 0$. Więc,

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2} + \sqrt{1-1/3^2}\sqrt{1-x}.$$

Uważamy, że $1-x \geq 0$ i $x > 0$, więc, $(\sqrt{1-x})^2 = 1-x$ i $(\sqrt{x})^2 = x$. Wówczas,

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{8}}{3}\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2 = x + 2\sqrt{2}\sqrt{x(1-x)} \Leftrightarrow 2 - x = 2\sqrt{2}\sqrt{x(1-x)}.$$

Podnosiemy ostatnie równość do kwadratu i przypominamy, że nowe równanie ma więcej rozwiązania niż poprzednie.

$$(x-2)^2 = 8x(1-x) \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0$$

Więc,

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 16\cdot 9}}{18} = \frac{2}{3}$$

Widać, że to rozwiązanie $2 - x = 2\sqrt{2}\sqrt{x(1-x)}$. Trzeba jeszcze sprawdzić, że to rozwiązanie równania

$$\text{arc sin}\frac{2}{3\sqrt{x}} = \text{arc sin } \frac{1}{3} + \text{arc sin } \sqrt{1-x}.$$

To można zrobić kalkulatorem lub sprawdzić bezpośrednio. Właśnie, dla $x = 2/3$ mamy, że

$$\sin\left(\text{arc sin}\frac{2}{3\sqrt{2/3}}\right) = \sin\left(\text{arc sin } \frac{1}{3} + \text{arc sin } \sqrt{1-x}\right).$$

To oznacza, że

$$\arcsin\frac{2}{3\sqrt{2/3}} = 2k\pi + \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\sqrt{1-x}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

lub

$$\arcsin\frac{2}{3\sqrt{2/3}} = \pi - \left(2k\pi + \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\sqrt{1-x}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Natomiast, dla $x = 2/3$ mamy, że

$$0 < \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) < \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{6}.$$

Więc,

$$0 < \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{2\pi}{3}.$$

Ponadto,

$$0 < \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Więc, jedyna możliwość, to

$$\arcsin\frac{2}{3\sqrt{2/3}} = \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\sqrt{1-2/3}.$$

$\square$

Ćwiczenie 2. Znaleźć współczynniki stojące przy $1/x$ oraz $1/x^2$ rozwinięcia $(x+1/x)^9$.

Rozwiązanie: Korzystając z wzoru dwumianu Newtona, wynika, że

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k} x^k \frac{1}{x^{9-k}} = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k} x^{2k-9}.$$

Wyraz z $1/x$ występuje w powyższym wzoru gdy $2k-9=-1$, czyli $k=4$. Więc, współczynniki tego wyrazu to

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126.$$

Wyraz z $1/x^2$ występuje w powyższym wzoru gdy $2k-9=-2$, czyli $2k=7$. Nie ma takiego wyrazu, ponieważ $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

$\square$

Ćwiczenie 3. Sprawdź czy funkcja $f : [-1, 3) \to [0, 10)$ postaci

$$f = \begin{cases} 3x + 3, & x \in [-1, 0], \\ 10 - 2x, & x \in (0, 2], \\ 3(x - 1), & x \in (2, 3), \end{cases}$$

jest bijekcją. W takim przypadku, oblicz funkcję odwrotną.